2.6. El PERT en incertidumbre

Hasta ahora nos hemos movido en un marco en el que considerábamos conocidos los tiempos de ejecución de las actividades y las señalábamos en el grafo PERT sin apuntar ninguna duda al respecto; sin embargo, en la práctica, y sobre todo cuando se trata de planificar tareas nuevas no realizadas anteriormente, es muy difícil conocer el tiempo que va a llevar su ejecución. No obstante, en estos casos sí podemos considerar la duración de las actividades en términos de probabilidad.

Los técnicos podrán aventurar fácilmente dos márgenes temporales entre los que cada tarea habrá de ser ejecutada: un tiempo mínimo u optimista (hipótesis que se cumpliría si todas las cosas marchan bien) y un tiempo máximo o pesimista (que supondría la aparición de algún problema que hiciera retrasar la terminación del trabajo); entre el margen inferior y superior se situaría el tiempo normal o medio que fuera compatible con la terminación de la tarea en circunstancias normales. Al tiempo optimista le llamaremos (t_o); al medio o más probable (t_m) y al máximo o pesimista (t_p).

Una vez establecidos los tiempos mencionados, supondremos que la duración de una actividad cualquiera, a la que llamaremos (d), es una variable aleatoria que va a ajustarse a cierta distribución de probabilidad que, normalmente, va a ser una distribución del tipo Beta, con una función de densidad igual a cero definida en los intervalos ($-\infty$, t_0) y (t_p, ∞) y con una función de densidad definida en el intervalo (t_p, ∞); concretamente:

$$f(d) = 0 \Rightarrow para - \infty < d < t_0$$

$$f(d) = \frac{(d - t_0)p \times (t_p - d)^q}{(t_p - t_0)^{p+q+1} \times \beta(p+1;\ q+1} \Rightarrow para\ t_0 < d < t_p \qquad [1]$$

$$f(d) = 0 \Rightarrow para\ t_p < d < \infty$$

β es una función euleriana de primera especie cuya representación gráfica presenta formas campaniformes asimétricas, tanto a la derecha como a la izquierda:

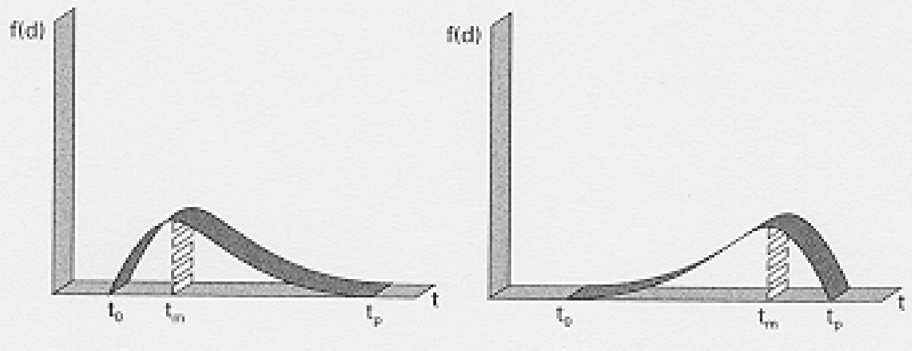

Figura 8.23.

Como queda de manifiesto en las fórmulas que acabamos de exponer, la función sólo existe entre los valores t_0 y t_p (tiempos optimista y pesimista) y según la figuras 8.23 el valor máximo de la distribución coincide con el valor de t_m, que a su vez se corresponde con la moda de la distribución.

Después de definir la función de densidad de la variable aleatoria *duración de una actividad* (d) conviene presentar la esperanza matemática y la varianza de esa función. Los valores que alcancen en cada caso las esperanzas matemáticas de las variables (d) van a ser los que se utilicen como valores de las duraciones de las tareas en el método PERT cuando se considera la incertidumbre.

1. Esperanza matemática:

$$E(d) = \frac{t_0 + (p+q) \times t_m + t_p}{p+q+2} = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6} \qquad [2]$$

lo que supone que en la práctica $p + q$ sea igual a 4, lo que implica que el valor normal de la distribución se pondera 4 veces más que los valores extremos.

2. Varianza:

$$\sigma_d^2 = \frac{(t_p - t_0)^2}{36} = \left[\frac{t_p - t_0}{6}\right]^2 \qquad [3]$$

La expresión de la varianza supone el cuadrado de la sexta parte del recorrido entre los dos extremos en los que está definida la función, concretamente la distancia temporal que separa el tiempo pesimista del optimista.

Con los datos indicados hasta ahora se puede, en un ambiente de incertidumbre, llegar hasta la determinación del camino crítico, siguiendo los pasos que se exponen a continuación:

1. Los técnicos definen las actividades que integran el proyecto y establecen el orden de prelación de todas ellas.
2. Con esos datos se dibuja el grafo PERT del proyecto.
3. Se elabora una tabla en la que se estiman, para cada actividad, un tiempo de ejecución optimista (t_0), otro normal o medio (t_m) y otro pesimista (t_p).
4. Se determina el tiempo PERT o duración esperada de cada actividad calculando la esperanza matemática de cada una según la expresión (2).
5. Los valores obtenidos se trasladan al grafo PERT como duración de las actividades y con ellos, actuando como lo hacíamos anteriormente en un ambiente de certeza, se calculan los tiempos early y last de cada nudo, y se define el camino crítico.

Téngase en cuenta que, al trabajar en un ambiente de incertidumbre, que nos ha obligado a tratar las duraciones de las actividades como variables aleatorias, la duración del camino crítico no será más que otra variable aleatoria, compuesta por la suma de los valores asignados a las variables aleatorias, que definen las duraciones de las actividades que componen el camino crítico.

Así, si llamamos T_n a la variable aleatoria «duración del camino crítico», siendo «n» el número de actividades que componen dicho camino, podemos expresar la esperanza matemática y la varianza de T_n:

$$E(T_n) = \sum_{ij \in U^*} E(d_{ij})$$

$$\sigma^2(T_n) = \sum_{ij \in U^*} \sigma^2(d_{ij})$$

donde U^* representa el conjunto de flechas que conforman el camino crítico. En principio, la esperanza matemática del camino crítico $E(T_n)$, es la duración esperada del proyecto, pero, en ocasiones, esta duración se ha comprobado como demasiado optimista y entonces, la cifra se suele corregir al alza añadiendo un margen de seguridad entre el 10 y el 20%.

Por otro lado, como las actividades de un PERT son independientes unas de otras y en consecuencia también son independientes las duraciones de esas actividades, la varianza de la duración del camino crítico, o lo que es lo mismo, la varianza de la duración estimada del proyecto será igual a la suma de las varianzas de las duraciones de las tareas que componen dicho camino.

Otra ventaja que puede obtenerse del tratamiento que estamos estudiando es que cuando el número de actividades que integran el camino crítico de un proyecto es suficientemente grande como para poder aplicar el teorema Central del Límite, podemos aceptar que la variable aleatoria «duración del proyecto» sigue una distribución normal de parámetros $[E(T_n), \sigma(T_n)]$ que podemos transformar en una normal estandarizada de parámetros $[E = 1, \sigma = 0]$, lo que nos permitirá calcular la probabilidad asociada a que el proyecto tenga una duración superior o inferior a un cierto número de unidades de tiempo o de que se encuentre comprendida en un cierto intervalo.

Pensamos que lo que mejor contribuirá a la comprensión de todo lo apuntado es aplicarlo a un ejemplo.

Se dispone de la siguiente información, relativa a un proyecto denominado ALFA:

Tabla 8.8

TABLA DE PRECEDENCIAS DEL PROYECTO ALFA

La actividad (i) precede a	*La actividad (j)*
A	D
D	E, H
B, C, E	F
C	G
F, G	I
H, I	J, K
J	L
K	M

Además, los expertos, después de los estudios oportunos, han señalado los tiempos optimista, normal y pesimista de cada una de las actividades y han elaborado la siguiente tabla:

Tabla 8.9

Actividades	*Tiempo optimista (t_0)*	*Tiempo medio (t_m)*	*Tiempo pesimista (t_p)*
A	4	7	10
B	8	15	16
C	7	8	15
D	6	7	14
E	5	6	7
F	8	10	18
G	14	15	16
H	6	7	14
I	3	6	15
J	7	9	17
K	7	11	15
L	6	8	10
M	5	9	13

a partir de los datos anteriores se pide:

1. Dibujar el grafo PERT correspondiente al proyecto ALFA.
2. Determinar los tiempos PERT o duraciones estimadas de las actividades.
3. Calcular los tiempos *early* y *last* esperados de los nudos.
4. Especificar el camino crítico y su duración esperada.
5. Definir las oscilaciones de los nudos y las holguras de las actividades no críticas.
6. Averiguar las desviaciones típicas de las duraciones de las actividades.
7. Establecer la duración esperada del proyecto, su varianza y su desviación típica.
8. Concretar la probabilidad de que se tarde en terminar el proyecto un periodo de tiempo igual o superior a los 65 días.

Pasamos a continuación a dar respuesta a las demandas anteriores:

1. Grafo PERT del proyecto ALFA:

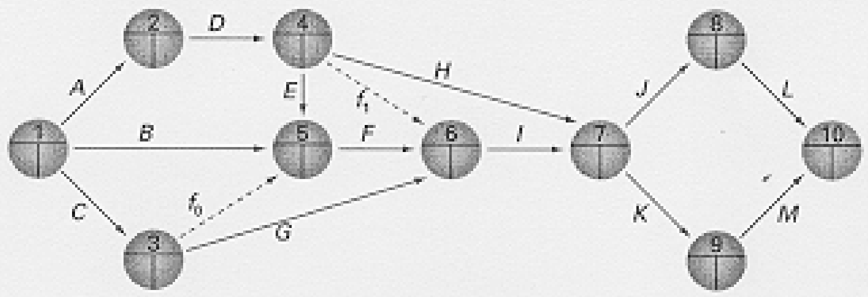

Figura 8.24.

2. Tiempos PERT o duraciones estimadas de las actividades:

Recordemos que la duración de cada actividad es una variable aleatoria que sigue una distribución de probabilidad del tipo Beta, acotada por los tiempos pesimista y optimista y cuya esperanza matemática es:

$$E(d) = \frac{t_0 + (p+q) \times t_m + t_p}{p+q+2} = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{6}$$

Según esto, la duración esperada de cada actividad será:

$$d_A = \frac{4+4\times 7+10}{6} = 7\ u.t.$$

$$d_B = \frac{8+4\times 15+16}{6} = 14\ u.t.$$

$$d_C = \frac{7+4\times 8+15}{6} = 9\ u.t.$$

$$d_D = \frac{6+4\times 7+14}{6} = 8\ u.t.$$

$$d_E = \frac{5+4\times 6+7}{6} = 6\ u.t.$$

$$d_F = \frac{8+4\times 10+18}{6} = 11\ u.t.$$

$$d_G = \frac{14+4\times 15+16}{6} = 15\ u.t.$$

$$d_H = \frac{6+4\times 7+14}{6} = 8\ u.t.$$

$$d_I = \frac{3+4\times 6+15}{6} = 7\ u.t.$$

$$d_J = \frac{7+4\times 9+17}{6} = 10\ u.t.$$

$$d_K = \frac{7+4\times 11+15}{6} = 11\ u.t.$$

$$d_L = \frac{6+4\times 8+10}{6} = 8\ u.t.$$

$$d_M = \frac{5+4\times 9+13}{6} = 9\ u.t.$$

Ahora, estas esperanzas matemáticas de las duraciones de las actividades las tratamos como ya sabemos, es decir, como las duraciones que vamos a trasladar al grafo PERT para calcular posteriormente los tiempos early y last de los nudos; en consecuencia, ahora el grafo anterior queda así:

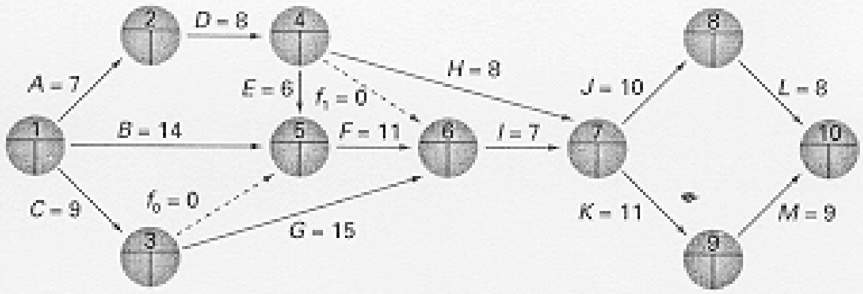

Figura 8.25.

3. Tiempos *early* y *last* de los nudos

Como el supuesto que subyace en este modelo es que las actividades se van a ejecutar en los tiempos definidos por sus esperanzas matemáticas, ahora procede actuar como si estuviéramos en una situación de certeza; por ello, aplicamos las fórmulas ya conocidas para calcular los tiempos *early* y *last* de los nudos; son los siguientes:

$E_1 = 0$	$L_{10} = 59$
$E_2 = 7$	$L_9 = 50$
$E_3 = 9$	$L_8 = 51$
$E_4 = 15$	$L_7 = 39$
$E_5 = 21$	$L_6 = 32$
$E_6 = 32$	$L_5 = 21$
$E_7 = 39$	$L_4 = 15$
$E_8 = 49$	$L_3 = 17$
$E_9 = 50$	$L_2 = 7$
$E_{10} = 59$	$L_1 = 0$

Una vez calculados los tiempos, los trasladamos al grafo PERT

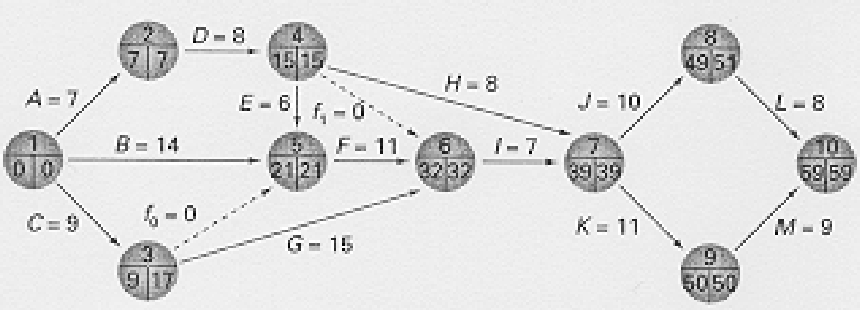

Figura 8.26.

4. Determinación del camino crítico y de su duración esperada:

Como ya sabemos, el camino crítico está formado por la sucesión de actividades que unen los nudos críticos, es decir, aquellos en que coinciden sus tiempos early y last; en nuestro caso, los nudos críticos son el 1, 2, 4, 5, 6, 7, 9 y 10, por lo que el camino crítico esta formado por las actividades A, D, E, F, I, K y M.

La duración esperada del camino crítico es igual a la suma de las duraciones esperadas de las actividades que lo componen; es decir, $E(T_n) = \sum_{ij \in U^*} E(d_{ij})$ y, por lo tanto, la suma de las esperanzas matemáticas de las actividades que conforman el camino crítico será:

$$E(T_n) = \sum (d_A, d_D, d_E, d_F, d_I, d_K, d_M) = (7 + 8 + 6 + 11 + 7 + 11 + 9) = 59 \ u.t.$$

Para visualizar el grafo PERT completo lo representamos señalando con trazo más grueso las actividades que componen el camino crítico:

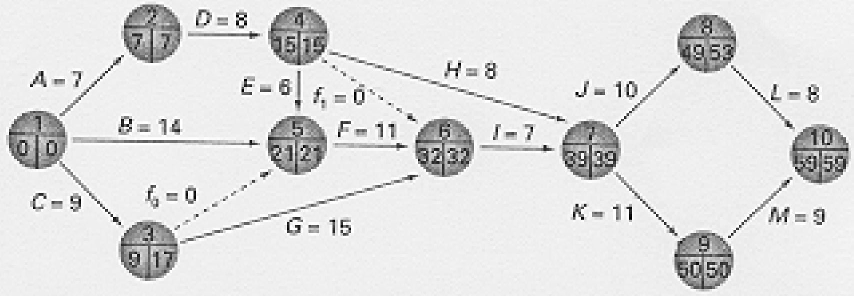

Figura 8.27.

5. Oscilaciones de los nudos y holguras de las actividades:

Como sabemos las oscilaciones de los nudos vienen dadas por la diferencia entre sus tiempos *early* y *last;* por tanto, para cada nudo la oscilación será:

Nudos	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Oscilación	0	0	8	0	0	0	0	2	0	0

Ahora presentamos una tabla en la que se han calculado las holguras de las actividades:

Tabla 8.10

Actividades	t_{ij}	E_i	E_j	L_i	L_j	H_T	O_j	H_L	O_i	H_I
A	7	0	7	0	7	0	0	0	0	0
B	14	0	21	0	21	7	0	7	0	7
C	9	0	9	0	17	8	8	0	0	0
D	8	7	15	7	15	0	0	0	0	0
E	6	15	21	15	21	0	0	0	0	0
F	11	21	32	21	32	0	0	0	0	0
G	15	9	32	17	32	8	0	8	8	0
H	8	15	39	15	39	16	0	16	0	16
I	7	32	39	32	39	0	0	0	0	0
J	10	39	49	39	51	2	2	0	0	0
K	11	39	50	39	50	0	0	0	0	0
L	8	49	59	51	59	2	0	–7	2	–9
M	9	50	59	50	59	0	0	0	0	0

6. Desviaciones típicas de las duraciones de las actividades del camino crítico

Como la hipótesis que subyace a nuestro análisis es que la duración de cada actividad es una variable aleatoria, que se ajusta a una cierta distribución de probabilidad Beta cuya esperanza matemática viene definida por la expresión:

$$E(d) = \frac{t_0 + 4t_m + t_p}{p + q + 2}$$

y cuya varianza se ajusta a:

$$\sigma^2(d) = \frac{(t_p - t_0)^2}{36}$$

podemos calcular las varianzas de las variables aleatorias *duración de las actividades* y posteriormente obtener las desviaciones típicas de las mismas:

$$\sigma_A^2 = \frac{(10-4)^2}{36} = 1 \Leftrightarrow \sigma_A = \sqrt{1} = 1$$

$$\sigma_D^2 = \frac{(14-6)^2}{36} = 1{,}777 \Leftrightarrow \sigma_D = \sqrt{1{,}777} = 1{,}333$$

$$\sigma_E^2 = \frac{(7-5)^2}{36} = 0{,}111 \Leftrightarrow \sigma_E = \sqrt{0{,}111} = 0{,}333$$

$$\sigma_F^2 = \frac{(18-8)^2}{36} = 2{,}777 \Leftrightarrow \sigma_H = \sqrt{2{,}777} = 1{,}666$$

$$\sigma_I^2 = \frac{(15-3)^2}{36} = 4 \Leftrightarrow \sigma_I = \sqrt{4} = 2$$

$$\sigma_K^2 = \frac{(15-7)^2}{36} = 1{,}777 \Leftrightarrow \sigma_K = \sqrt{1{,}777} = 1{,}333$$

$$\sigma_M^2 = \frac{(13-9)^2}{36} = 0{,}444 \Leftrightarrow \sigma_M = \sqrt{0{,}444} = 0{,}666$$

7. Duración esperada del proyecto, su varianza y su desviación típica.

La duración esperada del proyecto es la duración del camino crítico y ésta viene dada por la suma de las duraciones esperadas de las actividades críticas; es decir, de A, D, E, F, I, K y M; por lo tanto, como ya se expuso más arriba:

$$E(T_n) = 7 + 8 + 6 + 11 + 7 + 11 + 9 = 59 \; u.t.$$

La varianza de la duración del proyecto es igual a la suma de las varianzas de las duraciones de las actividades del camino crítico:

$$\sigma^2(T_n) = \sigma_A^2 + \sigma_D^2 + \sigma_E^2 + \sigma_F^2 + \sigma_I^2 + \sigma_K^2 + \sigma_M^2 =$$
$$= 1 + 1{,}77 + 0{,}11 + 2{,}77 + 4 + 1{,}77 + 0{,}44 = 11{,}86$$

Y en consecuencia, su desviación típica será:

$$\sigma(T_n) = \sqrt{11{,}86} = 3{,}4438$$

8. Calcular la probabilidad de que se tarde en terminar el proyecto un período de tiempo superior a los 65 días.

Para el análisis que sigue es preciso que aceptemos el Teorema Central del límite, lo que supone aceptar que el número de actividades que componen el camino crítico es lo suficientemente grande como para que la variable aleatoria «duración del camino crítico» siga una distribución normal de parámetros [$E(d)$, $\sigma(d)$], lo que en nuestro caso supondría:

$$d(T_n) \rightarrow N[E(T_n), \sigma(T_n)] \rightarrow N[59; 3{,}4438]$$

El valor de la esperanza matemática de la variable aleatoria $d(T_n)$ representa la duración asociada a una equiprobabilidad (50%) de acabar el proyecto antes o después de esa fecha; es decir, habría un 50% de probabilidades de acabar el proyecto antes de 59 días y otro 50% de acabarlo después de los 59 días. Teniendo en cuenta esto, lo que nos piden es determinar la probabilidad asociada al hecho de terminar el proyecto en más de 65 días.

Si como decíamos anteriormente, admitimos la aplicación del Teorema Central del Límite, podemos establecer la relación que existe entre la variable $d(T_n)$ y la función de densidad normal estandarizada (ε); en efecto, nuestra función esta definida por la expresión anterior y la normal estandarizada se define por la expresión:

$$\varepsilon \rightarrow N[E(0); \sigma(1)]$$

y entre las dos se establece la siguiente relación:

$$d(T_n) = \sigma(d) \times \varepsilon + E(d)$$

que en nuestro caso toma el siguiente valor:

$$d(T_n) = \sigma(d) \times \varepsilon + E(d) = 3{,}4438 \times \varepsilon + 59$$

Si ahora despejamos ε, tenemos que:

$$\varepsilon = \frac{d(T_n) - 59}{3{,}4438}$$

Teniendo esto en cuenta, y sabiendo que el problema nos pide que calculemos la probabilidad que existe de terminar el proyecto en un tiempo máximo de 65 días, dicha probabilidad la podemos representar así:

$$P[d(T_n) \leq 65] = P(3{,}4438 \times \varepsilon + 59 \leq 65)$$

Si ahora, del paréntesis de esta última expresión despejamos ε, resulta:

$$P\left(\varepsilon \leq \frac{65-59}{3,4438}\right) = P(\varepsilon \leq 1,7422)$$

Sólo nos queda recurrir a las tablas de la distribución normal y verificar que la probabilidad de acabar el proyecto como muy tarde en 65 días es el 95,91% (magnitud que encontramos en la tabla en la intersección de la fila 1,7 y de la columna 0,04), y como lo que nos pide el problema es la probabilidad de que el proyecto se termine más tarde de esa fecha, la respuesta a la pregunta planteada es que dicha probabilidad es del : 100-95,91 = 4,09%.

2.7. EL PERT COSTE

Manejando los conocimientos adquiridos hasta ahora, podemos planificar la duración de un proyecto cualquiera tanto si estamos ante un escenario de certeza como de incertidumbre; sin embargo, también es de mucha utilidad para el responsable de la gestión empresarial en el área de la producción, poder establecer a priori hipótesis que combinen la duración y el coste del proyecto. Con el objetivo de incorporar la variable «*coste*» al método PERT, vamos a estudiar a continuación la variante conocida por el nombre de PERT-COSTE.

La primera cuestión que conviene plantear es la diferencia que debe establecerse entre diferentes tipos de costes; por un lado, distinguiremos el coste directo de las actividades, el coste directo total del proyecto a analizar y el coste indirecto.

1. Coste Directo es el que puede imputarse sin ninguna duda a las diferentes actividades que integran el proyecto. Ejemplos de este tipo de costes son las materias primas, la mano de obra, etc.
2. Coste Directo Total del Proyecto es la suma de los costes directos de las actividades.
3. Coste indirecto es aquél que requiere algún criterio de reparto para poder ser imputado a las actividades del proyecto, como, por ejemplo, los gastos financieros de la empresa, los gastos de energía consumida, etc.

La razón por la que hacemos una distinción entre costes directos e indirectos es porque nuestro interés al estudiar el PERT-COSTE se centra en relacionar «tiempo de duración del proyecto y coste», y ocurre que cada uno de los dos tipos de coste que acabamos de describir presenta un comportamiento diferente respecto al tiempo de duración de un proyecto; en efecto:

- Entre los costes indirectos y el tiempo se da una relación directa; esto es, cuanto más tiempo dure el proyecto, mayores serán los costes indirectos y ello porque la inmovilización financiera será más cara, el gasto por amortizaciones de los equipos más alto, el consumo de energia mayor, etc, etc.