Tema 0.- Teoría de Campos

1. Dados los vectores **a**= 2**i** + **j** + 2**k** y **b**= 4**i** + 4**j** + 2**k**. Determinar: a) El ángulo θ formado por ellos; b) El vector unitario que es perpendicular al vector **a** y está contenido en el plano XY.
Sol: a) $\theta = 27^o16'$*; b)* $\mathbf{u} = -0.447\mathbf{i} + 0.894\mathbf{j}$

2. Dados los vectores: **a**= 5**i** + 2**j** + 3**k**; **b**= x**i** + 2**j** + z**k**; **c**= 3**i** + y**j** + **k**. Determinar x,y,z para que estos vectores sean mutuamente perpendiculares. *Sol:* $x = 14.5; y = -9; z = -25.5$

3. ¿En qué condiciones el módulo del producto vectorial es igual al producto escalar?
Sol: $a = 45^o$

4. Dado el vector **a** que pasa por el punto A y dado el punto P, calcular el producto vectorial **-PAxa** y el producto mixto **c.**(**PA**x**a**). Siendo el vector **a** = 2**i** - **j** + 4**k** y el **c** un vector unitario de cosenos directores α =0.5, β = -0.707 y γ = 0.5, los puntos A y P tienen las coordenadas (3,1,1) y (1,-1,2), respectivamente. *Sol:* $\mathbf{PA} \times \mathbf{a} = 7\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$; $\mathbf{c}.(\mathbf{PA} \times \mathbf{a}) = 7.57$

5. Dado un vector **a** de módulo unidad cuya recta de acción pasa por los puntos A y B. Calcular el producto vectorial de **a** con el vector de posición del punto A y con el vector de posición del punto B. Los puntos A y B tienen las coordenadas (3,0,2) y (0,6,4), respectivamente. *Sol:* $\mathbf{a} \times \mathbf{A} = 1.714\mathbf{i} + 1.714\mathbf{j} - 2.571\mathbf{k}$; $\mathbf{a} \times \mathbf{B} = 1.714\mathbf{i} + 1.714\mathbf{j} - 2.571\mathbf{k}$

6. Dado el vector **a**=A(cos(ωt)**i** + sen(ωt)**j**) siendo A y ω constantes, y siendo t la variable escalar independiente. a) Hallar su módulo y la derivada de éste; b) Hallar d**a**/dt y |d**a**/dt|. Demostrar que **a** y d**a**/dt son perpendiculares. *Sol: a) A, 0; b)* $d\mathbf{a}/dt = -\omega A sen(\omega t)\mathbf{i} + \omega A cos(\omega t)\mathbf{j}$; $|d\mathbf{a}/dt| = \omega A$

7. Sea el campo escalar $f(x,y,z) = x^3 + 2yx^2 + y^3 + z^2(x+y)$. Hallar **grad**(f) en el punto (1,1,1). *Sol: (8,6,4)*

8. Sea el campo vectorial $\mathbf{A}=r^2\mathbf{r}$ donde r =x**i** + y**j** + z**k**. Demostrar que div $\mathbf{A}= 5r^2$.

9. Demostrar que el campo vectorial $\mathbf{A} = (3x^2y + zy^2)\mathbf{i} + (x^3 + 2xyz)\mathbf{j} + y^2x\mathbf{k}$ es irrotacional y encontrar el potencial del que deriva. *Sol:* $F = x^3y + xy^2z + C$

10. La función potencial de un campo vectorial viene dada por $z^2x - 2y - x^3/3 + 5$.a) Calcular el campo vectorial; b) Comprobar que es irrotacional. *Sol: a)* $\mathbf{A} = (z^2-x^2)\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2xz\mathbf{k}$;

11. Dado el campo vectorial $\mathbf{A}=x^2y\mathbf{i} + (xz-y^2)\mathbf{j} + 3xz^2\mathbf{k}$. Calcular todas las derivadas parciales de primer orden respecto de las variables x,y,z, así como d**A**.
Sol: $dA_x = 2xydx + x^2dy$; $dA_y = zdx - 2ydy + xdz$; $dA_z = 3z^2dx + 6xzdz$

12. Calcular la derivada direccional de la función $f(x,y,z)= 2xz - y^2$ en la dirección y sentido dado por el vector 2**i** + **j** - **k** en el punto (1,3,2). Determinar en dicho punto la dirección del máximo crecimiento de f, así como el valor de dicho crecimiento por unidad de longitud en la citada dirección. *Sol: 0; (2,-3,1);* $\sqrt{56}$