

TEORÍA DE MEDIDAS

INTRODUCCIÓN

Las ciencias experimentales operan con valores numéricos que se obtienen como resultado de efectuar medidas de variables, por ejemplo una temperatura, una longitud o una diferencia de potencial eléctrico. Sin embargo, estas medidas nos proporcionan valores aproximados de dichas variables ya que en el proceso intervienen tanto las imperfecciones de los instrumentos de medida, las limitaciones de nuestros sentidos o causas incontrolables. Puede también suceder que, en algunas ocasiones, el mismo proceso de la medida puede tener influencia sobre la magnitud que deseamos medir.

Admitiremos como postulado que *es imposible llegar a conocer el valor exacto de cualquier magnitud*. Esto no significa que no exista dicho valor verdadero, sino que es imposible determinarlo sin un margen de indeterminación o incertidumbre. El objetivo de la teoría de medidas consiste precisamente en acotar dichas incertidumbres, denominadas también *errores experimentales*. La importancia de esta acotación radica en que, en muchas situaciones, obtener una conclusión o tomar una decisión dependerá del grado de incertidumbre que se haya obtenido en el proceso de medida.

Para evitar malentendidos dejaremos establecido que el término *error*, que vamos a utilizar extensamente, es sinónimo de indeterminación y no de *equivocación*.

Por otra parte, muchas magnitudes no se miden, sino que se obtienen indirectamente como resultado de operar con medidas que sí se realizan directamente (por ejemplo, determinar el volumen de una esfera a partir de la medida de su diámetro) o a partir de datos que vienen en tablas. De esta forma, las indeterminaciones que se cometen en las medidas directas se propagan a la magnitud indirecta a través de los cálculos.

EL PROCESO DE MEDIDA

Medir una magnitud (medir la longitud de un objeto, por ejemplo) es un proceso o un conjunto de actividades que se lleva a cabo utilizando un instrumento. El resultado final de este proceso, que denominamos *medición* o *proceso de medida* es el número de veces que la magnitud contiene a un patrón de referencia (a sus múltiplos y submúltiplos); decimos que ese es el *valor de la magnitud* (por ejemplo, longitud = 3.27 m). Es habitual utilizar la palabra *medida* para denominar tanto la acción de medir como el resultado de dicha acción.

En todo lo dicho hay implícitos una serie de elementos que intervienen en el proceso: el **"objeto"** que se intenta medir, el **instrumento de medida**, el **patrón de referencia** y el **observador**.

CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

Definimos **error de una magnitud** como la diferencia entre su valor exacto (desconocido) y el obtenido experimentalmente. Como ya hemos citado, este error no lo consideramos como consecuencia de una *equivocación* al llevar a cabo la medida, sino como una incertidumbre inherente a cualquier proceso y, por ello, sería más adecuado darle el nombre de

incertidumbre de la magnitud. Sin embargo, seguiremos la nomenclatura tradicional, sin perder de vista su verdadero significado.

Atendiendo a las causas que los originan, clasificaremos los errores en dos grandes grupos: sistemáticos y accidentales.

Errores sistemáticos. Se denomina así a aquel error que se mantiene constante a lo largo de todo el proceso de medida y por tanto, afecta de igual manera a todas las medidas. Además, es el mismo para todas ellas. Estos errores tienen un signo definido y sus causas más probables son:

- Defecto del instrumento (error de cero, por ejemplo).
- Error del observador, ya sea debido a una mala realización de la medida o a una limitación física.
- Error en la elección del método.

Evidentemente, los errores sistemáticos se ponen de manifiesto al cambiar el instrumento de medida, el observador o el método empleado.

Ya que un error sistemático afectará a todas las medidas en la misma forma, permite detectarlo y corregirlo a través de un calibrado. Por ejemplo, un error sistemático sería el cometido al medir con un termómetro defectuoso. Comparando las medidas con las llevadas a cabo con un termómetro bien calibrado que proporciona datos correctos, se podría, de forma sencilla, proceder a la corrección de las medidas.

Error accidental o aleatorio es aquel que sucede cuando medidas sucesivas realizadas por el mismo observador, en condiciones idénticas (con la reproducción íntegra del proceso de medida), proporcionan valores diferentes, y que sólo por azar son iguales. Son de valor muy pequeño comparados con la magnitud a medir y además, supondremos que es igualmente probable obtener un valor superior o inferior al valor verdadero.

Tienen su origen en fenómenos aleatorios y, por tanto, son incontrolables. Debido a este carácter incontrolable, no se pueden corregir (como sucedía en el caso de los errores sistemáticos); sin embargo, el empleo de métodos estadísticos nos permitirá llegar a algunas conclusiones sobre el margen de incertidumbre con el cual se determina una magnitud.

EXACTITUD, PRECISIÓN Y SENSIBILIDAD

Conceptos importantes en el proceso de medida, relativos al instrumento con el que se opera:

Exactitud se define como la concordancia entre el valor exacto y el obtenido experimentalmente. Un instrumento será muy exacto si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor exacto.

Precisión se refiere al acuerdo entre las sucesivas medidas de una magnitud, llevadas a cabo en las mismas condiciones de trabajo. De este modo, un instrumento será muy preciso si las medidas realizadas con él de una cierta magnitud se encuentran muy próximas entre sí. Exactitud implica normalmente precisión, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que un aparato puede ser preciso y a la vez poco exacto (pensar en el caso de una persona que siempre llega cinco minutos tarde). En general, se puede decir que es más fácil conocer la precisión de un aparato que su exactitud.

Sensibilidad de un instrumento se define como el valor mínimo de la magnitud que puede apreciar. Por ejemplo, que la sensibilidad de una balanza sea de 5 mg significa que para masas inferiores a 5 mg, la balanza no experimentará ninguna variación. Normalmente se admite como sensibilidad el equivalente a la división más pequeña de la escala de medida. No obstante, con

demasiada frecuencia se toma media división como sensibilidad, si dichas divisiones son lo suficientemente amplias. Este último criterio no es demasiado correcto pues, aunque el observador sea capaz de distinguir posiciones intermedias, el límite lo impone el propio instrumento (escala suministrada por el fabricante).

Ejercicio. ¿Cuál es el valor más pequeño que se puede apreciar con...

- a) una regla milimetrada
- b) una báscula de baño
- c) tu reloj
- d) el cuentakilómetros de un coche
- e) el velocímetro de un coche

ERRORES ABSOLUTO Y RELATIVO

Se define el **error absoluto** de una medida como la diferencia entre el valor medido x y el valor exacto x_0 :

$$\Delta x = |x - x_0| \quad (1)$$

El error absoluto representa la desviación, en términos absolutos, de la medida respecto al valor exacto. Ya que no conocemos este valor exacto, deberemos establecer un procedimiento para calcular este error (por ejemplo y como se verá más adelante, definir el valor exacto como el valor medio de las medidas realizadas).

Se define el **error relativo** de una medida como el cociente entre el error absoluto y el valor exacto de la magnitud y se suele dar también en forma de porcentaje:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta x}{x_0} \quad (2)$$

ORDEN DE MAGNITUD es la potencia de diez más próxima al valor medido.

1150 km	Es del orden de 1000 km = 10^3 km
7650 km	Es del orden de 10000 km = 10^4 km
335 m	Es del orden de 100 m = 10^2 m
850 m	Es del orden de 1000m = 10^3 m
0,25 m	Es del orden de 0,01 = 10^{-2} m
0,2 m	Es del orden de 0,1 = 10^{-1} m

CIFRAS SIGNIFICATIVAS, son aquellos dígitos realmente representativos de un proceso de medida. Dado el valor de una medida:

- La cifra más a la izquierda y diferente de 0 es la cifra más significativa.
- Para un número entero, la cifra más a la derecha y diferente de 0 es la cifra menos significativa.
- Con punto decimal, el número más a la derecha es la cifra significativa, aunque sea 0
- Todos los dígitos comprendidos entre éstas, son cifras significativas.

Ejemplo: Los números 7.452, 0.7452 y 0.0007452 tienen todos ellos 4 cifras significativas; el 7 es la cifra más significativa y el 2 final es la menos significativa.

Ejemplo:

3.0 m supone que hemos medido hasta los dm. Tenemos 2 cifras significativas.
 3.332 m supone que hemos medido hasta los mm. Tenemos 4 cifras significativas.
 3.33 m supone que hemos medido hasta Tenemos

Sin embargo, si se trata de un número como el 7200 tenemos un problema de interpretación; aparentemente tiene cuatro cifras significativas, pero debemos distinguir el caso en que todos los ceros finales son representativos o si se han puesto para rellenar. Para resolver este dilema se utiliza la notación de mantisa y exponente; por ejemplo, si solamente fuesen correctas las dos primeras cifras el número debería escribirse como 72×10^2 o, mejor aún, 7.2×10^3 .

Ejemplo: Una medida de longitud de 2.3 m tiene 2 cifras significativas, igual que 0.0023 km. Podemos escribir por tanto: $2.3 \text{ m} = 2.3 \times 10^2 \text{ cm} = 2.3 \times 10^{-3} \text{ km}$.

Ejercicio: ¿Cuál es la incorrección en esta expresión? $2.3 \text{ m} = 230 \text{ cm}$

ERRORES EN MEDIDAS DIRECTAS.

Intentemos ahora determinar el valor de una magnitud por medida directa con un instrumento, así como su error absoluto asociado, expresándolo con las cifras necesarias.

Número de medidas

En multitud de casos, la determinación de una magnitud muestra valores sensiblemente diferentes en sucesivas tomas de datos (por su propia naturaleza, por la sensibilidad del instrumento de medida, etc.). Es conveniente en estos casos tener en cuenta criterios estadísticos que validen el resultado final. Para ello deben realizarse un número determinado de medidas individuales, que dependerá del grado de dispersión de las mismas. El procedimiento (basado en criterios estadísticos) para determinar este número es el siguiente:

Se realizan tres medidas de la magnitud y se calcula su valor medio $\bar{x}$ como:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (3)$$

donde x_i es cada una de las N medidas.

Se calcula la **dispersión o rango** D de las medidas, es decir la diferencia entre el valor máximo y el mínimo obtenidos. Finalmente se calcula el porcentaje de dispersión T :

$$T = \frac{D}{\bar{x}} \cdot 100 (\%) \quad (4)$$

El valor de T determinará el número total de medidas necesarias:

T de las 3 primeras medidas	Nº total de medidas necesarias
$T \leq 2\%$	3
$2\% < T < 8\%$	6
$8\% < T < 15\%$	15
$T > 15\%$	al menos 50

Una vez realizadas las medidas necesarias, se toma como:

Valor exacto de la magnitud: $\bar{x}$, el valor medio de todas las medidas

Error absoluto de la magnitud: a partir de la expresión:

$$\Delta x = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}{N(N-1)} \right]^{1/2} \quad (5)$$

Esta última es una expresión laboriosa de aplicar si no se dispone de una hoja de cálculo o calculadora programable, de forma que se suelen utilizar aproximaciones más sencillas para el caso de que el número de datos no sea grande:

Si se han realizado hasta 3 medidas: el error absoluto es el valor de la sensibilidad del aparato, S .

Si se han realizado entre 4 y 12 medidas: el error absoluto es el máximo valor entre la sensibilidad del aparato y el rango D dividido por el número de medidas:

$$\Delta x = \max \{ S, D / N \} \quad (6)$$

EXPRESIÓN DEL RESULTADO DEL PROCESO DE MEDIDA

Una vez realizado un proceso de medida, sea ésta directa o indirecta (que se verá a continuación), el resultado se expresará de la siguiente forma:

$$\bar{x} \pm \Delta x \quad (7)$$

donde x es el valor "verdadero" de la magnitud y está determinado con una incertidumbre Δx . Lo que esto significa es que el valor de la magnitud x está comprendida, con una elevada probabilidad, en el intervalo:

$$\bar{x} - \Delta x < x < \bar{x} + \Delta x$$

Pero ¿con cuántas cifras se debe expresar el resultado? Para la correcta expresión de una medida y de su error, seguiremos las siguientes **normas o convenciones**.

Se acepta que el error absoluto con el que se exprese el resultado puede tener como máximo dos cifras significativas:

- Puede darse con dos cifras significativas si la primera de ellas es un 1, o si siendo la primera un 2, la segunda no llega a 5.
- En todos los demás casos debe darse un valor con una sola cifra significativa, aplicando el proceso de redondeo que se explica a continuación.

No tiene sentido, por lo tanto, expresar el valor de la magnitud obtenida con más precisión: *debe tener sólo las cifras necesarias para que su cifra menos significativa sea del mismo orden decimal que la última cifra significativa del error absoluto.*

Procedimiento de redondeo o de eliminación de cifras sobrantes. Suponemos en este ejemplo que debemos quedarnos sólo con dos cifras decimales:

- si la cifra a eliminar es menor que 5, la eliminamos directamente (4.722 pasa a ser 4.72).
- si es mayor o igual que 5, la última cifra se aumenta en una unidad (4.728 se convierte en 4.73).

Ejemplo. Una cierta longitud es $L = 12.432$ cm y su error absoluto es $\Delta L = 0.254$ cm. En primer lugar aplicaremos los criterios mencionados al error absoluto: aunque la primera cifra significativa es un 2, no podemos mantener la segunda por ser ≥ 5 , de modo que redondearemos a la primera cifra significativa, resultando 0.3. Por lo tanto el valor de la longitud será $L = (12.4 \pm 0.3)$ cm.

Ejemplo. La distancia media de la tierra al sol es $D = (149500000 \pm 5000)$ km. Según las normas, debemos escribirla en potencias de 10, de modo que todas las cifras que aparezcan sean significativas. De esta forma, la distancia de la tierra al sol es $(149500 \pm 5) \cdot 10^3$ km.

Más ejemplos.

Valores incorrectos	Valores correctos
3.4128 ± 0.123	3.4 ± 0.12
6.3 ± 0.091	$(630 \pm 9) \cdot 10^{-2}$
46288 ± 1540	$(463 \pm 15) \cdot 10^2$
428.351 ± 0.27	428.4 ± 0.3
3432.23 ± 99.2	$(34 \pm 1) \cdot 10^2$

En el caso de un valor que se obtiene de leerlo en una tabla en la que no figura el error absoluto, se toma para éste el correspondiente a una unidad de la última cifra significativa incluida en la tabla. Por ejemplo, si en una tabla aparece para la densidad del agua el valor 0.99823 g/cm^3 , tomaremos como error absoluto 0.00001 g/cm^3 .

Asimismo, para los números irracionales tendremos que fijar un número de cifras en su aproximación real de modo que no afecte al resultado final. En caso de no saber cuál sería el número de cifras que no afectan a dicho cálculo, es posible asociar a un número irracional un error absoluto igual a la unidad del orden de la última cifra que se tiene en cuenta. Por ejemplo se puede tomar un valor adecuado de $\pi = 3.142 \pm 0.001$.

DETERMINACIÓN DE MAGNITUDES INDIRECTAS

Muchas magnitudes no se miden directamente, sino que se obtienen a través de aplicar una expresión matemática en la que intervienen variables que son medibles directamente o se obtienen de tablas (por ejemplo, deseamos determinar el área de un círculo midiendo su diámetro: $S = \pi (d/4)^2$). Las magnitudes de partida tienen un error inherente y estos errores se propagarán a las magnitudes indirectas sucesivas, en el proceso que se denomina **propagación de errores**.

Sea F una magnitud que depende de otras magnitudes ($x, y, z, \dots$) que hemos medido. De éstas, por lo tanto, conocemos su valor exacto y su error absoluto. Expresamos esta dependencia como:

$$F = F(x, y, z, \dots) \quad (8)$$

El valor de la magnitud F será el resultado de sustituir en la expresión anterior los valores de las magnitudes ($x, y, z, \dots$) de las que depende.

Para conocer el error absoluto de F , procederemos al cálculo de la diferencial total, que se expresa mediante la siguiente ecuación:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \dots \quad (9)$$

La diferencial se interpreta como la variación que sufre la función F al cambiar el valor de las variables de las que depende. Así, el error absoluto Δx en la determinación de la variable x , se sustituirá en dx , hallándose cómo afecta a la función F . Tendremos una fórmula que nos permitirá evaluar el error absoluto asociado a una magnitud indirecta, siempre que conozcamos los valores y los errores de las magnitudes directas de las que depende. Es decir:

$$\Delta F = \left| \frac{\partial F}{\partial x} \right| \Delta x + \left| \frac{\partial F}{\partial y} \right| \Delta y + \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| \Delta z + \dots \quad (10)$$

Se han puesto los valores absolutos de las derivadas porque los errores siempre se suman y **nunca se compensan**.

La determinación de los errores de una magnitud indirecta se simplifica notablemente para el caso de funciones de la forma:

$$F = x^a y^b z^c \dots \quad (11)$$

siendo a , b , y c constantes positivas o negativas. Si tomamos logaritmos, se cumple que:

$$\ln F = a \ln x + b \ln y + c \ln z + \dots \quad (12)$$

y al hacer la diferencial de $\ln(F)$ será:

$$d \ln F = a d \ln x + b d \ln y + c d \ln z + \dots \quad (13)$$

y teniendo en cuenta que

$$d \ln u = \frac{du}{u} \quad (14)$$

se reduce a

$$\frac{dF}{F} = a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y} + c \frac{dz}{z} + \dots \quad (15)$$

en la que, si sustituimos las diferenciales por los errores absolutos, llegaremos a la expresión:

$$\frac{\Delta F}{F} = \left| a \frac{\Delta x}{x} \right| + \left| b \frac{\Delta y}{y} \right| + \left| c \frac{\Delta z}{z} \right| + \dots \quad (16)$$

La siguiente tabla resume algunos de los casos más habituales de la propagación de errores:

Relación	Error
$z = x + y$	$\Delta z = \Delta x + \Delta y$
$z = x - y$	
$z = x \cdot y$	$\Delta z / z = \Delta x / x + \Delta y / y $
$z = x / y$	
$z = x^n$	$\Delta z / z = n \Delta x / x $
$z = \ln x$	$\Delta z = \Delta x / x $
$z = \exp(x)$	$\Delta z / z = \Delta x$

Ejemplo: Se quiere determinar el volumen de un cilindro ($V = \pi R^2 h$) a partir de medidas geométricas. La altura se mide con una regla (sensibilidad 1 mm) y el radio de la base con un calibre (sensibilidad 0.05 mm). Los resultados de las medidas han sido $h = 15.8$ cm y $R = 45.25$ mm. Determine el volumen y su error.

La altura y el radio se han medido en unidades diferentes (cm y mm respectivamente). Las expresaremos en la más pequeña, en este caso a mm; $h = 158 \pm 1$ mm; $R = 45.25 \pm 0.05$ mm

Se toma un valor para π suficientemente preciso, para evitar que tenga repercusiones en el resultado final: $\pi = 3.141592$.

Cálculo del volumen. $V = 886054.2151$ mm³

Cálculo del error que se comete: $\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial R} \right| \Delta R + \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right| \Delta h = \pi h 2R \Delta R + \pi R^2 \Delta h$

$$\Delta V = \pi (667.55 + 89.25) = 2452.61 \text{ mm}^3$$

Aplicando las reglas de redondeo y de la expresión de cifras significativas, llegamos a:

$$V = (886 \pm 3) \cdot 10^3 \text{ mm}^3$$

El error relativo de esta determinación: $\Delta V / V = 0.00339$, es decir, inferior a 0.4 %

Ejemplo: Determinación de la resistencia eléctrica de un material

Para ello medimos con un amperímetro la intensidad que atraviesa el material y con un voltímetro la diferencia de potencial entre sus extremos. Ambos valores resultan ser en este caso: $I = 3.2 \pm 0.1$ mA y $V = 2.1 \pm 0.1$ voltios. El valor de la resistencia de dicho material se calculará aplicando la expresión de la ley de Ohm: $R = V / I = 656.25 \Omega$.

Su error podemos calcularlo aplicando la regla de diferenciación a la ley de Ohm:

$$\frac{\Delta R}{R} = \frac{\Delta V}{V} + \frac{\Delta I}{I} = \frac{0.1}{2.1} + \frac{0.1}{3.2} = 0.07885$$

por lo tanto, $\Delta R = R * 0.07885 = 51.745 \Omega$

El resultado será: $R = 656.25 \pm 51.745 \Omega$. Pero debemos aplicar ahora el criterio de cifras significativas, con lo cual, el resultado final será: $R = (6.6 \pm 0.5) \times 10^2 \Omega$.

Ejercicios propuestos.

1. Con un termómetro que mide en grados centígrados se determina una temperatura y resulta ser de 23.7°C . Calcular la temperatura en grados Kelvin, junto con su error.

2. En una tabla de datos encontramos que la longitud de una determinada pieza es de 15.1 pulgadas. Calcular su longitud en centímetros junto con su error.

3. Teniendo en cuenta que los números que intervienen en las expresiones tienen todas sus cifras exactas, calcular el resultado y el error de las siguientes operaciones matemáticas:

a) $S = 1.732 + 3.14 + 0.007 - 2.718$

b) $P = 1.73205 / 1.41$

4. Se han medido las aristas de un cubo y ha resultado un valor de 1.34 cm, con un error absoluto de 0.05 cm. Calcular el volumen del cubo junto con su error.

5. Se ha medido un ángulo y ha resultado ser de $82^\circ.4$. En instrumento de medida tiene un error de $0^\circ.2$. Calcular el valor del seno del ángulo junto con su error.

TOMA DE DATOS Y ELABORACIÓN DE TABLAS DE DATOS

Previamente a la toma de datos de un ensayo, hemos de tener claro cuales son los datos que se van a medir, en que unidades se van a medir y qué sensibilidad tiene el instrumento de medida.

- La tabla que se elabore ha de tener un nombre representativo.
- Deberá estar confeccionada en columnas, porque son más fáciles de anotar y de leer.
- Cada columna debe tener el nombre de la variable y en qué unidades se está midiendo.
- En la columna se anotará el dato medido tal y como se lee del instrumento de medida. Si es necesario transformar este dato para hacer cálculos posteriores, se hará en otra columna diferente. Por ejemplo, si se está midiendo una intensidad en miliamperios, pero para los cálculos posteriores se necesita en amperios, se añadirá otra columna con estos valores.
- Cuando se comete un error en la anotación de un dato, no corregirlo encima; se tacha y se escribe bien al lado o debajo.

Recordar

Guardar la tabla en la que figuren los datos originales. Es un seguro para poder hacer verificaciones.

Conseguir un dato cuesta tiempo (y a veces, en vida real, muchos recursos). Tomarlo bien cuesta poco.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS

Además de disponer de una tabla de resultados experimentales, es conveniente expresar dichos resultados en forma gráfica. Esta forma de presentación tiene las siguientes ventajas:

- Permite una visualización global del comportamiento del fenómeno en todo el intervalo en que se han obtenido medidas experimentales.
- Es posible deducir el valor de datos que no se han medido, por interpolación entre los valores que se han medido en el intervalo representado. (Cuidado con las extrapolaciones, que son siempre arriesgadas).
- Pone de relieve si alguna medida que se ha determinado incorrectamente ya que se puede ver si se dispone de forma anormal respecto del resto de datos.

Las representaciones gráficas deben ajustarse a una serie de normas que facilitan que se obtengan de ellas la máxima información posible. Por ejemplo:

- La gráfica debe realizarse en papel milimetrado. Los ejes deben estar bien trazados y en sus extremos se indicará la magnitud que se representa en dicho eje así como las unidades de la misma.
- La gráfica llevará un título en la parte superior que sea suficientemente explícito.
- En general, la variable independiente irá en abscisas y la dependiente en ordenadas.
- Las escalas han de escogerse de forma que comprendan solamente los intervalos dentro de los cuales existen datos a representar. Es conveniente utilizar escalas sencillas con el objeto de facilitar la lectura de los datos.
- Sobre los ejes sólo se indican los valores correspondientes a las divisiones, uniformemente espaciadas. No se marcarán los valores de los datos medidos.
- Los valores se representarán mediante un punto correspondiente al dato medido, rodeado de un *rectángulo de error*. Este rectángulo está centrado en el punto experimental (x,y) su base abarca desde $x-\Delta x$ hasta $x+\Delta x$ y su altura desde $y-\Delta y$ hasta $y+\Delta y$. En el caso en que cualquiera de los errores sea despreciable en comparación con la escala utilizada, el rectángulo de error se reduce a un segmento vertical u horizontal. En caso de que ambos errores sean despreciables el rectángulo de error se reduce a un punto.
- Una vez representados los valores, puede trazarse una gráfica mediante una línea fina y continua, nunca quebrada, que ajuste lo mejor posible el mayor número de datos.
- Si, una vez representada la gráfica, se observa algún punto claramente desplazado de la línea que ajustar el fenómeno, habrá que rechazarlo y, si es posible, repetir la medida. Este punto erróneo no se debe incluir en los análisis posteriores.

AJUSTE LINEAL POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

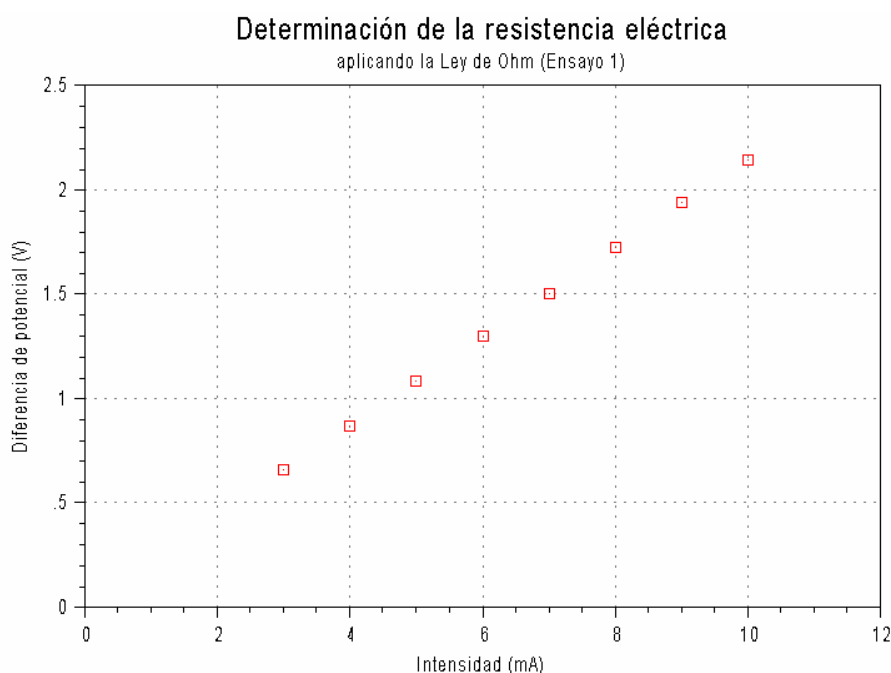
Muchas veces las variables representativas de un fenómeno físico están relacionadas de forma lineal. Es decir, la variable y depende la variable x en la forma:

$$y = ax + b \quad (17)$$

a es la pendiente de la recta que las relaciona y b es la ordenada en el origen.

Ejemplos de comportamiento lineal:

1. La relación entre la fuerza deformadora sobre un muelle y el alargamiento del mismo en la zona elástica



$$F = -K \Delta l \quad (18)$$

En este caso, la pendiente de la relación, a , es la constante elástica del muelle K y la ordenada en el origen, b , es cero.

2. La relación entre la diferencia de potencial aplicada a un material conductor óhmico y la intensidad que lo atraviesa (ley de Ohm):

$$V = R I \quad (19)$$

En este caso la pendiente es la resistencia eléctrica R y la ordenada en el origen será cero.

La aplicación del *método de los mínimos cuadrados* permite conocer si los datos (x_i, y_i) describen un comportamiento lineal y además determinar la ecuación de la recta ($y = ax + b$) que mejor se ajusta al conjunto de los N pares de datos.

Pendiente de la recta

$$a = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (20)$$

Ordenada en el origen

$$b = \frac{\sum_{i=1}^N x_i^2 \sum_{i=1}^N y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N x_i y_i}{N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2} \quad (21)$$

Lógicamente, los errores implícitos en cualquier medida hacen que los puntos medidos no se dispongan sobre una recta sino que, a lo sumo, se sitúen en una zona cercana a la misma. El análisis por mínimos cuadrados nos permite calcular los *errores* de la pendiente y de la ordenada en el origen:

$$\Delta a = \left[\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2}{(N-2) \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right]^{1/2} \quad (22)$$

$$\Delta b = \left[\left(\frac{1}{N} + \frac{(\bar{x})^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^N (y_i - ax_i - b)^2}{(N-2)} \right) \right]^{1/2} \quad (23)$$

El método también proporciona un *coeficiente de correlación lineal*, r , que da cuenta del grado de adecuación de los puntos a una recta. La expresión del coeficiente de correlación es:

$$r = \frac{N \sum_{i=1}^N x_i y_i - \sum_{i=1}^N x_i \sum_{i=1}^N y_i}{\sqrt{\left(N \sum_{i=1}^N x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N x_i \right)^2 \right) \left(N \sum_{i=1}^N y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^N y_i \right)^2 \right)}} \quad (24)$$

En valor absoluto, r puede tomar valores comprendidos entre 0 y 1:

- $Abs(r) = 1 \rightarrow$ los puntos se ajustan perfectamente a una línea recta
- $Abs(r) \cong 0 \rightarrow$ los puntos se encuentran dispersos y no existe una correlación entre ambos conjuntos de datos.
- $r > 0$ Existe una correlación positiva entre ambas variables ($a > 0$)
- $r < 0$ Indica que una variable crece mientras que la otra decrece ($a < 0$).

Si no se dispone de una calculadora programable o un paquete informático adecuado, se pueden obtener los valores del ajuste por mínimos cuadrados a una tabla de datos, generando una

tabla como la siguiente, en la que aparecen todas las variables que intervienen en las fórmulas para determinar a y b :

	x_i (unid)	y_i (unid)	x^2	$x \cdot y$	y^2
	0.200	106	0.04	21.2	11236
	0.229	124	0.0524	28.396	15376
	0.251	135	0.0630	33.885	18225
	0.278	150	0.0773	41.7	22500
	0.318	169	0.1011	53.742	28561
Σ	1.276	684	0.3338	178.923	95898
$(\Sigma)^2$	1.6282	467856			
Media	0.2552	136.8			
(Media)²	0.06513				

(utilizaremos el término x_m o $\bar{x}$, para representar el valor medio de la variable x):

Una vez que se conocen a y b , se construye una segunda tabla a partir de la que se determinan los errores de los parámetros y el coeficiente de correlación:

x_i (unid)	y_i (unid)	$x - x_m$	$(x - x_m)^2$	$y - a \cdot x - b$	$(y - a \cdot x - b)^2$
0.200	106	-0.0552	3.05e-3	-1.46	2.1316
0.229	124	-0.0262	6.86e-4	1.1265	1.2690
0.251	135	-0.0042	1.764e-5	0.4335	0.1879
0.278	150	0.0228	5.20e-4	1.083	1.1729
0.318	169	0.0628	3.94e-3	-1.177	1.3853
		$\Sigma = 0$	$\Sigma = 8.21e-3$	$\Sigma = 0$	$\Sigma = 6.1467$

Otro método alternativo: Una vez construida la primera de las tablas, es posible también resolver el problema utilizando los siguientes valores intermedios:

$$D = \sum x_i^2 - N \bar{x}^2$$

$$G = \sum y_i^2 - N \bar{y}^2$$

$$E = \sum x_i y_i - \bar{x} \sum y_i$$

$$F = \sum (y_i - \bar{y})^2$$

con ellos calculamos $a = \frac{E}{D}$; $b = \bar{y} - a\bar{x}$

Los errores de los parámetros y el coeficiente de correlación se calculan como:

$$(\Delta a)^2 = \frac{DF - E^2}{(N - 2)D^2}$$

$$(\Delta b)^2 = (\Delta a)^2 \left(\frac{D}{N} + \bar{x}^2 \right)$$

$$r = E / \sqrt{DG}$$

Transformaciones para intentar linealizar una dependencia no lineal.

Es posible que la apariencia en la representación de la variable y frente a x no sea lineal pero que mediante una transformación apropiada pueda quedar con aspecto lineal. Veamos algunas de estas transformaciones:

- Si la relación es del tipo: $y = a/x + b$, utilizando la transformación $z = 1/x$, puede quedar con aspecto lineal.
- Si es una relación de la forma, $y^2 = ax + b$. Para linealizar utilizamos la transformación $z = y^2$.
- Si es una relación en forma potencial, $y = bx^a$. Tomando logaritmos se consigue una apariencia lineal: $\ln y = \ln b + a \ln x$.

Una vez realizadas las transformaciones de las variables, representaremos gráficamente la nueva relación para verificar si hemos obtenido una relación lineal.

INTERPOLACIÓN

En una tabla se puede presentar una magnitud y , en función de una variable independiente x , es decir $y = f(x)$; o en función de dos variables independientes x y z , es decir, $y = f(x, z)$. En el primer caso, la tabla se denomina de entrada simple y en el segundo la tabla es de entrada doble.

Con frecuencia se precisan datos que no se encuentran disponibles en las tablas, sino que se encuentran entre dos valores dados; tendremos entonces que realizar una interpolación entre dichos valores de la tabla.

Interpolación en tablas de entrada simple

Queremos conocer el valor de la variable y para un valor de x que no está tabulado. El primer paso consiste en localizar los dos valores x_1 y x_2 de la tabla entre los cuales se encuentra el dato x . Si a estos valores corresponden las variables independientes y_1 y y_2 respectivamente, el valor y correspondiente al valor x se obtiene suponiendo que entre x_1 y x_2 , la variación de y con x es de tipo lineal. Por tanto:

$$y = y_1 + \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}(x - x_1) \quad (25)$$

El error de y será:

$$\Delta y = \left| \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right| \Delta x \quad (26)$$

Ejercicio. En una tabla aparece la temperatura que adquiere un determinado compuesto en función de la presión a la que se le somete:

<i>Presión (bares)</i>	<i>Temperatura (°C)</i>
0.50	81.35
0.60	85.95
0.70	89.96
0.80	93.51

Obtener la temperatura para una presión de 0.55 bares junto con su error.

Interpolación en tablas de doble entrada

En las tablas de doble entrada cada pareja de valores x, z proporciona un valor de y . En este caso hay que determinar los valores entre los que se encuentra el punto x, z . Expuesto en forma de tabla:

	x_1	x_2
z_1	y_{11}	y_{12}
z_2	y_{21}	y_{22}

La relación aproximada que permite el cálculo de y es:

$$y = y_{11} + \frac{y_{21} - y_{11}}{x_2 - x_1} (x - x_1) + \frac{y_{12} - y_{11}}{z_2 - z_1} (z - z_1) \quad (27)$$

y su error puede calcularse a través de:

$$\Delta y = \left| \frac{y_{21} - y_{11}}{x_2 - x_1} \right| \Delta x + \left| \frac{y_{12} - y_{11}}{z_2 - z_1} \right| \Delta z \quad (28)$$

