Tema 1. Teoría de Campos

Nota: El contenido de estos apuntes pretende ser un resumen de la materia desarrollada en el curso. Por ello, el alumno debe de completarlo con las explicaciones y discusiones llevadas a cabo en clase y con la bibliografía recomendada.

1.1 Magnitudes escalares y vectoriales

Magnitud escalar (o escalar), es *toda magnitud que está definida mediante un número* y su unidad de medida.
Los *escalares dependen únicamente de la unidad de medida y no del sistema de referencia.*

Son ejemplos de magnitudes escalares: la masa, la carga, la temperatura, la energía, etc.

Magnitud vectorial *es aquella que está representada mediante un vector, el cual es un segmento orientado en el espacio.*

Para que una magnitud vectorial pueda estar perfectamente definida es necesario dar además de su *valor numérico* (módulo) y unidad de medida correspondiente, su *punto de aplicación* (coincide con el origen del vector), su *dirección* y *sentido*. Depende por tanto del sistema de referencia, y tiene tantas componentes (o coordenadas) como dimensiones tenga el espacio o sistema de referencia en el que se representa.

La dirección *es una línea orientada en el espacio* que se determina en función de los ángulos que forma con los ejes del sistema de referencia.

El sentido del vector viene definido por la posición relativa del extremo respecto del origen.

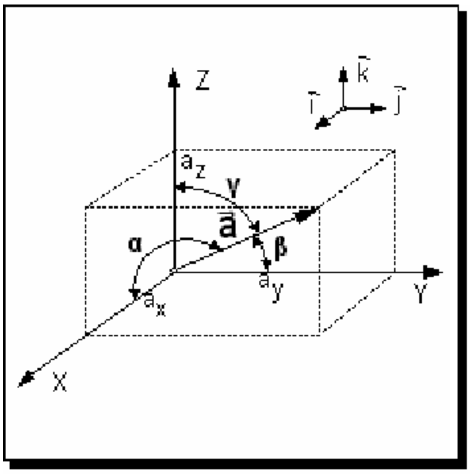
Son ejemplos de magnitudes vectoriales: la velocidad, la aceleración, la fuerza, el campo gravitatorio, etc.

1.2 Vectores unitarios y descomposición de vectores.

Un vector $\vec{a}$ se representa en un sistema de ejes cartesianos x, y, z como:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$$

donde (a_x, a_y, a_z) son las *componentes escalares del vector* (o *proyecciones del vector* sobre los ejes x, y, z), ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$) son los vectores unitarios en las direcciones de los ejes x, y, z respectivamente y se denominan versores, y ($a_x\hat{i}$, $a_y\hat{j}$, $a_z\hat{k}$) son las componentes vectoriales.



Los vectores ($\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$) forman una ***base ortonormal*** en el espacio vectorial R^3.

Módulo de un vector $\vec{a}$ es el valor absoluto de dicha magnitud y se corresponde con la longitud del vector.

Si $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, el módulo del vector se expresa como:

$$|\vec{a}| \equiv a = d(A,B) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Dado un vector cualquiera $\vec{a}$, se puede obtener un ***vector unitario*** de la misma dirección y sentido dividiendo dicho vector por su módulo:

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Los ***ángulos directores*** de un vector *son cada uno de los ángulos α, β y γ que forma el vector con los ejes coordenados **x, y, z**.*

$$a_x = a\cos\alpha \qquad a_y = a\cos\beta \qquad a_z = a\cos\gamma$$

Los **cosenos directores** ($\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$) *se obtienen en función de las componentes* a_x, a_y, a_z *y de el módulo del vector*:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}\ ,\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}\ ,\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Los cosenos directores verifican que:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

1.3 Tipos de vectores.

Vector nulo: *Vector cuyo módulo es cero*. Es un vector especial, pues carece de dirección y sentido.

$$\vec{0} = (0,0,0)$$

Vector unitario: *Vector cuyo módulo es uno*. Vector unitario $\hat{a}$ de otro dado $\vec{a}$ es el que tiene la misma dirección y sentido que $\vec{a}$ pero con módulo igual a 1:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

Vectores iguales: *Aquellos cuyos módulo, dirección y sentido son iguales.*

Vectores opuestos: *Aquellos cuyos módulo y dirección son iguales y sus sentidos son opuestos.*

El vector opuesto de un vector tiene las mismas componentes cambiadas de signo *y la suma de un vector y su opuesto es siempre el vector nulo.*

$$-\vec{a} = (-a_x, a_y, a_z)$$

Vectores libres: *Aquellos que pueden trasladarse paralelos a sí mismos sin que varíe su efecto*. Vienen definidos por sus componentes y carecen de punto de aplicación y de línea de acción.

Vectores equipolentes: *Aquellos que vienen definidos por sus componentes y línea de acción pero carecen de punto de aplicación*.

Vectores fijos: *Aquellos que vienen definidos por sus componentes, línea de acción y punto de aplicación*. No se pueden trasladar sin que varíe su efecto, p.e. el peso de un cuerpo.

Vectores iguales: *Aquellos cuyas coordenadas son iguales*.

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow a_x = b_x, a_y = b_y, a_z = b_z$$

1.4 Operaciones con vectores

1.4.1 Suma y diferencia analítica de vectores.

La ***suma de varios vectores*** es también *otro vector cuyas componentes es la suma de las componentes de dichos vectores.*

Si: $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$

La suma de los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ es:

$$\vec{S} = \vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_x + b_x)\hat{j} + (a_x + b_x)\hat{k}$$

La suma es una ley de composición interna y dota al conjunto de los vectores de estructura de *Grupo Conmutativo.*

Si dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ forman un ángulo α,

$$S = \left|\vec{a} + \vec{b}\right| = a^2 + b^2 + 2\ a\ b\ \cos\alpha$$

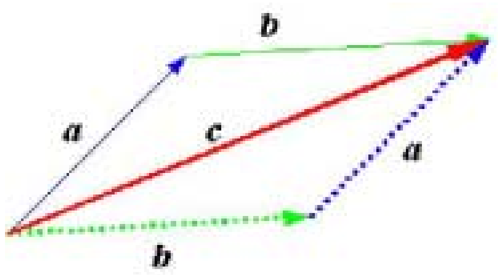
La ***resta de dos vectores*** $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se realiza sumándole al vector $\vec{a}$ el inverso de $\vec{b}$:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_x - b_x)\hat{j} + (a_x - b_x)\hat{k}$$

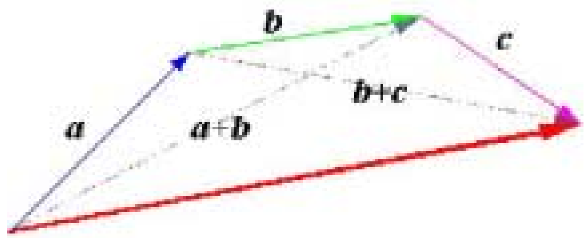
Si se restan dos vectores iguales su resultado es el vector nulo o cero: $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$

Suma gráfica de vectores:

Regla del paralelogramo



Regla del polígono



1.4.2 Producto de un vector por un escalar.

El producto de un vector $\vec{a}$ por un escalar n da como resultado un nuevo vector $\vec{A}$ de la misma dirección y cuyo módulo es n veces el vector original.

$$\vec{A} = n\,\vec{a}$$

El sentido de $\vec{A}$ coincide con el sentido de $\vec{a}$ si $n \in R^{+}$.

Analíticamente:

$$\vec{A} = n\vec{a} = n\,(a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}) = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}$$

Si el escalar n es adimensional, los vectores $\vec{a}$ y $\vec{A}$ tienen las mismas dimensiones, en caso contrario sus ecuaciones de dimensiones son diferentes y por tanto sus unidades.

Propiedades:

$\forall \alpha \text{ y } \beta \in R$ y $\forall \vec{a} \text{ y } \vec{b} \in R^3$

- $(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$
- $\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$
- $(\alpha\ \beta)\ \vec{a} = \alpha\,(\beta\ \vec{a})$
- Si α=1, $\alpha\vec{a} = \vec{a}$

1.4.3 Producto escalar.

El ***producto escalar*** de dos vectores libres $\vec{a}$ y $\vec{b}$ *es un escalar que es igual al producto de los módulos de cada uno de los vectores por el coseno del ángulo* θ *que forman*:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab\cos\theta$$

La ***expresión analítica del producto escalar*** de dos vectores, en función de sus componentes es:

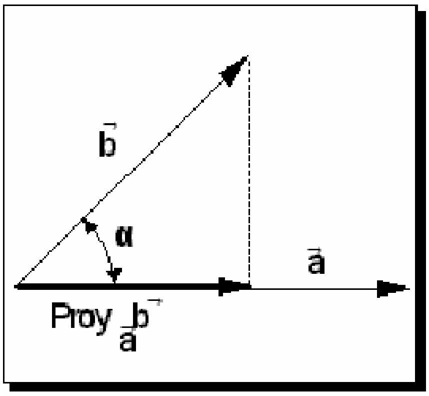
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Propiedades del producto escalar:

- Es *conmutativo*: $\vec{a}\ .\ \vec{b} = \vec{b}\ .\ \vec{a}$
- Es *nulo si alguno de los dos vectores es el vector nulo o si los dos vectores son perpendiculares*.
- *Distributiva*: $\vec{a}\ .\ (\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}$
- Para cualquier escalar n: $(n\ \vec{a})\cdot\vec{b} = n\,(\vec{a}\cdot\vec{b})$

La **interpretación geométrica del producto escalar** es que el valor absoluto de (a·b) es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro vector sobre él.

La proyección de un vector $\vec{b}$ sobre otro vector $\vec{a}$ se calcula:



$$\text{proy}_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=b\cos\alpha$$

De la misma forma:

$$\text{proy}_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=a\cos\alpha$$

El *ángulo que forman los dos vectores* se puede determinar a partir de la expresión:

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$$

1.4.4 Producto vectorial.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ se expresa de la forma $\vec{a}\,x\,\vec{b}$. Es otro vector perpendicular tanto a $\vec{a}$ como a $\vec{b}$, cuyo módulo es $(a\,b\,\text{sen}\alpha)$, siendo α el ángulo entre ellos,

$$|\vec{a}x\vec{b}| = ab\ \text{sen}\alpha$$

su *sentido está dado por la regla del tornillo* (del sacacorchos o de la mano derecha), entendiendo como el sentido de avance de un tornillo que girase desde el primer vector al segundo.

El módulo del producto vectorial de dos vectores equivale al área del paralelogramo definido por ambos.

La ***expresión analítica del producto vectorial*** $\vec{a} \times \vec{b}$ es lo mismo que hallar las componentes de dicho vector $\vec{a} \times \vec{b}$, por lo que si:

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \qquad \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$$

entonces, $\vec{a} \times \vec{b}$ *se puede expresar como un determinante de tercer orden*:

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_yb_z - a_zb_y)\hat{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\hat{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\hat{k}$$

Propiedades:

- No es conmutativo $\vec{a}x\vec{b} \neq \vec{b}x\vec{a}$
- $\alpha\,(\vec{a}x\vec{b}) = \alpha\vec{a} \text{ x } \vec{b} = a \text{ x } \alpha\vec{b}$
- Si $\vec{a}$ es perpendicular a $\vec{b}$, entonces $|\vec{a}x\vec{b}| = ab$
- Si $\vec{a}$ es paralelo a $\vec{b}$, entonces $|\vec{a}x\vec{b}| = 0$

1.4.5 Producto mixto de tres vectores.

El Producto mixto de tres vectores es un escalar que se representa de la forma $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ y se obtiene a partir de:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a}\,.\,(\vec{b}x\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Gráficamente, el producto mixto de los tres vectores representa el volumen del paralelepípedo de aristas dichos vectores.

1.5 Momento de un vector

1.5.1 Momento de un vector respecto a un punto. Teorema de Varignon.

El *momento de un vector* $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ respecto de un punto O es un vector $\vec{M}_0$ que cumple:

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \text{ x } \vec{a}$$

Se trata del producto vectorial de dos vectores, por lo que si las coordenadas de los puntos son *O(x_o,y_o,z_o)* y *A(x_A,y_A,z_A)*, el vector momento tiene la expresión:

$$M_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_A - x_0 & y_A - y_0 & z_A - z_0 \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

y si las coordenadas de *O* son *O(0,0,0)*.

$$M_O = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_A & y_A & z_A \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$$

Teorema de Varignon.

El momento respecto a un punto de un vector que es suma de varios vectores concurrentes es igual a la suma de los momentos de cada vector componente respecto al mismo punto.

$$\vec{M}_p = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \text{ x } \vec{a}_i = \vec{r}_i \text{ x } \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i = \vec{r}_i \text{ x } \vec{A}$$

Si el punto p pertenece a la línea de acción de la resultante de varios vectores concurrentes, el momento del sistema de vectores respecto de dicho punto es cero.

1.5.2 Momento de un vector respecto de un eje.

El *momento de un vector* $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ *respecto a un eje E* es la proyección sobre el eje del momento del vector respecto a un punto cualquiera del eje.

$$M_E = \vec{M}_0 \cdot \vec{u} = M_0 u \cos\alpha$$

siendo $\vec{u}$ un vector cualquiera contenido en el eje.

Si los vectores de la fórmula anterior se expresan en función de sus componentes cartesianas, podremos escribir:

$$M_E = M_{0x} u_x + M_{0y} u_y + M_{0z} u_z$$

1.6 Derivada de un vector respecto a un escalar.

Si $\vec{a}$ es una función vectorial que depende de un escalar *t*, siendo:

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$$

la ***derivada del vector*** $\vec{a}$ *respecto del tiempo* ***t*** es, por definición:

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \frac{da_x(t)}{dt}\hat{i} + \frac{da_y(t)}{dt}\hat{j} + \frac{da_z(t)}{dt}\hat{k}$$

ya que *la derivada de los vectores unitarios es cero* por ser estos **constantes** (en módulo, dirección y sentido).

Derivada parcial de un vector respecto de un escalar

Supongamos que la función vectorial $\vec{a}$ depende de más de un escalar $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$. La derivada parcial de $\vec{a}$ respecto a cada escalar lo representamos por $\frac{\partial\vec{a}}{\partial x}, \frac{\partial\vec{a}}{\partial y}, \frac{\partial\vec{a}}{\partial z}$ respectivamente y se determina a partir de:

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial a_y}{\partial x}\hat{j} + \frac{\partial a_z}{\partial x}\overleftarrow{k}$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial y} = \frac{\partial a_x}{\partial y}\hat{i} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial a_z}{\partial y}\overleftarrow{k}$$

$$\frac{\partial\vec{a}}{\partial z} = \frac{\partial a_x}{\partial z}\hat{i} + \frac{\partial a_y}{\partial z}\hat{j} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\overleftarrow{k}$$

La diferencial total de la función vectorial $\vec{a}$ se representa por $d\vec{a}$ y expresa la variación total de vector respecto a los escalares x, y, z:

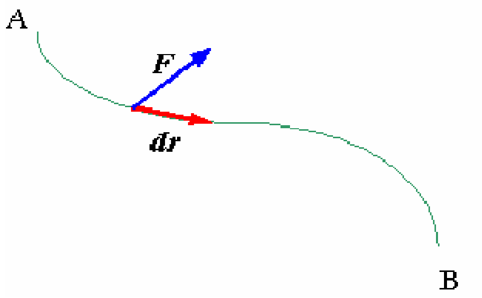
$$d\vec{a} = \frac{\partial\vec{a}}{\partial x}dx + \frac{\partial\vec{a}}{\partial y}dy + \frac{\partial\vec{a}}{\partial z}dz$$

1.7 Integral de un vector respecto a un escalar. Circulación.

La ***integral de un vector*** $\vec{F}$ *respecto a un parámetro t* se realiza integrando componente a componente el vector:

$$\int \vec{F}\,dt = \int F_x dt\,\hat{i} + \int F_y dt\,\hat{j} + \int F_z dt\,\hat{k}$$

Se denomina ***circulación*** **C** del vector $\vec{F}(x, y, z)$ a lo largo de una curva cualquiera entre los puntos **A** y **B** a:



$$C = \int_A^B \vec{F}(x,y,z).\, d\vec{r}$$

y como $d\vec{r} = dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}$, la *circulación* del vector $\vec{F}$ a lo largo de la curva C entre los puntos A y B se puede expresar de la forma:

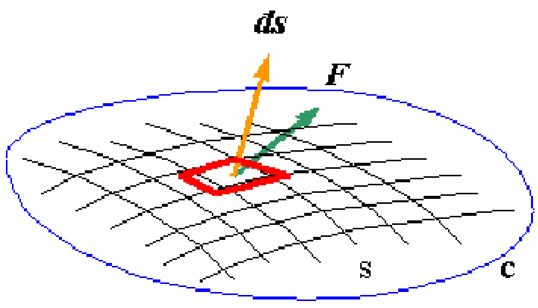
$$C = \int_A^B (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

1.8 Integral de un vector sobre una superficie. Flujo.

El *flujo de un vector* $\vec{F}$ *a través de una superficie* S viene dado por:

$$\Phi = \iint_S \vec{F}.d\vec{s} = \iint_S \left(F_x ds_x + F_y ds_y + F_z ds_z\right)$$

donde dS_x, dS_y y dS_z *son las proyecciones del vector superficie en los planos perpendicular a x* (el plano *yz)*, *perpendicular a y* (el plano *xz)* y *perpendicular a z* (el plano *xy*) respectivamente.



$$d\vec{s} = dydz\,\hat{i} + dxdz\,\hat{j} + dxdy\,\hat{k}$$

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iint_S \left(F_x dydz + F_y dxdz + F_z dxdy\right)$$

1.9 Concepto de campo. Campos escalares y vectoriales.

Un ***campo***, en sentido físico, *es una magnitud definida en un cierto espacio y que se puede expresar analíticamente como una función de las coordenadas espaciales y del tiempo*. Si la *magnitud es escalar*, tendremos un ***campo escalar***, y si la *magnitud es vectorial*, tendremos un ***campo vectorial***.

Los campos pueden ser:

Campos estacionarios, *cuando únicamente dependen de las coordenadas espaciales y no dependen del tiempo.*

Campos no estacionarios, *cuando dependen del tiempo*.

Además, los campos pueden ser **uniformes**, *si no dependen de las coordenadas espaciales,* es decir, si su valor (módulo, dirección y sentido) es el mismo en todos los puntos y **no uniformes.**

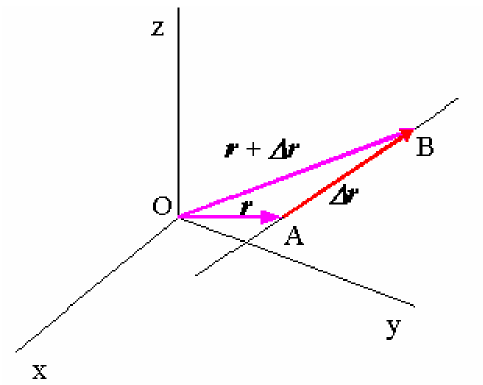
Las líneas que en cada punto son tangentes al vector campo se denominan líneas de campo y cumplen la ecuación:

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$

1.10 Gradiente de un campo escalar.

Sea un campo escalar estacionario U(x,y,z), y queremos saber con qué rapidez varía dicho campo cuando nos desplazamos en la dirección de la recta definida por los puntos A y B.

El campo U, al ir de punto A a B experimenta una variación ΔU en un desplazamiento Δr.



La rapidez media en dicho trayecto es: Δ**U**/ Δ **r,** y la rapidez puntual en A es evidentemente el límite de Δ**U**/ Δ**r**, cuando Δ**r** tiende a cero.

Derivada de U *en el punto A y en la dirección AB*, dU, *es el límite de ΔU cuando Δr tiende a cero.*

En un sistema de *coordenadas cartesianas*:

$$\mathrm{dU} = \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{x}}\mathrm{dx} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{y}}\mathrm{dy} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial \mathrm{z}}\mathrm{dz}$$

que puede expresarse como:

$$dU = \left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right]\cdot d\vec{r}$$

luego

$$\frac{dU}{dr} = \left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right]\cdot \vec{u}_{AB}$$

siendo $\vec{u}_{AB}$ un vector unitario en la dirección de la recta AB.

El vector $\left[\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right]$ se denomina gradiente de la función escalar U(x,y,z).

$$\textbf{\textit{grad}}\ \mathbf{U} = \frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k} = \nabla U$$

donde el operador ∇ viene definido por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

*La derivada de **U** en la dirección AB es igual a la proyección del gradiente de **U** sobre esa dirección.*

Si α es el ángulo que forman ***grad*** **U** y la recta AB, *la dirección en la que **U** varía más rápidamente (mayor derivada direccional) es precisamente la dirección del gradiente* y su valor es precisamente el módulo de ***grad*** **U**.

$$\left(\frac{dU}{dr}\right)_{AB} = [\text{grad U}]\cdot \vec{u}_{AB} = |\text{grad U}|\cos\alpha$$

*Superficies equipotenciales son aquellas cuyos puntos tienen un mismo valor del campo **U**.*

Propiedades:

- La magnitud del gradiente de U es igual a la máxima variación del incremento de U por unidad de longitud.
- La dirección del gradiente de U en un punto es la dirección de máxima variación del incremento de U por unidad de longitud.
- La componente del gradiente de una función U en cualquier dirección da la razón del cambio $\frac{dU}{dr}$ en dicha dirección.

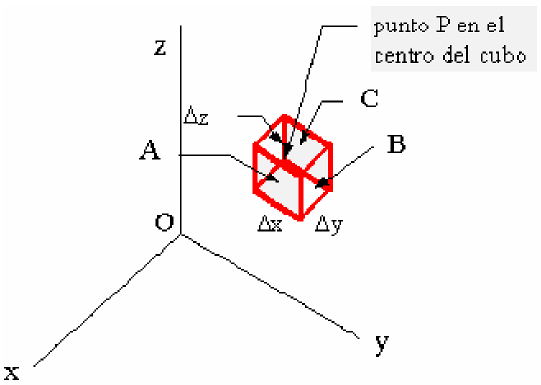
1.11 Divergencia de un campo vectorial.

Sea un espacio en el que existe un campo vectorial $\vec{F}$ y sea P un punto dentro de un pequeño volumen Δv limitado a su vez por una superficie Δs.

En coordenadas cartesianas, el volumen Δv de un prisma recto de aristas Δx, Δy, Δz, (paralelas a los ejes x, y, y z, respectivamente) es:

$$\Delta v = \Delta x \; \Delta y \; \Delta z$$

El *flujo del campo* $\vec{F}$ *a través de la superficie Δs* que delimita el volumen es:



$$\Phi_F = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

El flujo por unidad de volumen es: $\dfrac{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta v}$

Divergencia de $\vec{F}$ *es el límite, cuando* Δv *tiende a cero, del flujo por unidad de volumen:*

$$\operatorname{div} \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F} = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{s}}{\Delta v}$$

La expresión de la divergencia de $\vec{F}$ en ***coordenadas cartesianas*** es:

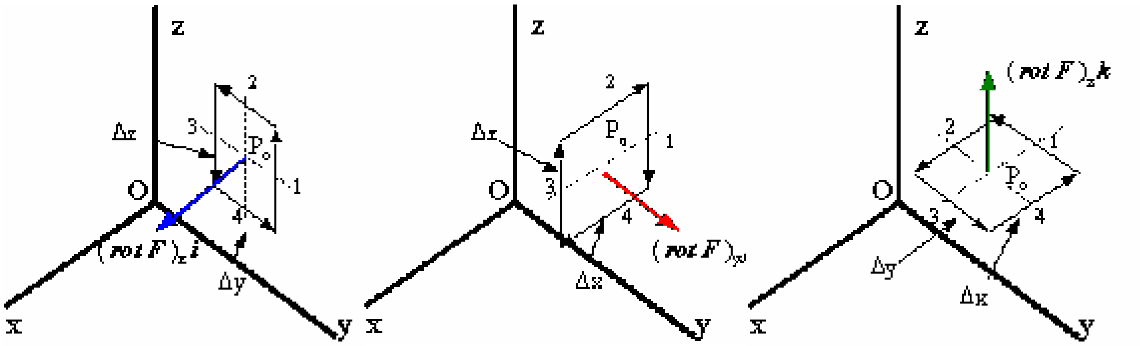
$$\nabla \cdot F = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \left(F_x \; \hat{i} + F_y \; \hat{j} + F_z \; \hat{k} \right) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

La divergencia de un campo vectorial relaciona dicho campo con la función escalar origen del campo. Un ejemplo es la relación entre la densidad de carga ρ y el campo eléctrico creado por ella (ley de Gauss):

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

1.12 Rotacional.

Sea un espacio en el que está definido un campo vectorial $\vec{F}$, y sea un punto P alrededor del cual suponemos una curva cerrada y plana C, que limita una superficie pequeña S que incluye al punto P, la circulación de $\vec{F}$ alrededor de la curva C dependerá de la orientación de esta y escogemos la orientación en la que el valor de dicha circulación es máximo.



Rotacional de $\vec{F}$ *en el punto P es el valor de un vector perpendicular a la superficie S, cuando Δs tiende a cero, cuyo módulo es* $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$ *y cuyo sentido viene determinado por la regla del sacacorchos o de la mano derecha.*

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{1}{\Delta s} \left[\vec{u}_n \cdot \oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} \right]_{max}$$

donde $\vec{u}_n$ es un vector unitario en la dirección perpendicular a la superficie Δs.

El rotacional de un campo vectorial indica la variación en el giro del vector por unidad de longitud.

Su expresión en coordenadas cartesianas es:

$$\mathrm{rot}\,\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \hat{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \hat{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \hat{k}$$

Si el rotacional de una campo vectorial $\vec{F}$ es nulo, implica la existencia de un campo escalar U, potencial de $\vec{F}$, tal que $\vec{F} = \nabla U$. Por ello, la condición necesaria y suficiente para que un campo vectorial sea gradiente de un campo escalar es que su rotacional sea 0.

El rotacional de un campo vectorial relaciona dicho campo con la función vectorial origen del campo. Un ejemplo es la relación entre la densidad de corriente $\vec{J}$ y el campo magnético $\vec{B}$ creado por ella (ley de Ampere):

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

1.13 Operador Laplaciano.

El Laplaciano de una función escalar U(x,y,z) se define como la divergencia del gradiente de dicha función:

$$\Delta U(x,y,z) = \nabla \cdot \nabla U = \nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

Para una función vectorial $\vec{F}$, el Laplaciano de dicha función se define como:

$$\Delta \vec{F} = \text{grad}\,(\text{div}\,\vec{F}) - \text{rot}\,(\text{rot}\,\vec{F})$$

El operador Laplaciano será de gran importancia en cursos superiores.

1.14 Teorema de Stokes.

Consideremos una línea cerrada C que limita una superficie S.

El flujo del rotacional de un vector $\vec{F}$ *sobre una cara de un casquete de superficie es igual a la circulación de* $\vec{F}$ *a lo largo del contorno de dicho casquete.*

$$\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

1.15 Teorema de Gauss

Sea una superficie S que delimita un volumen V.

El flujo de un vector $\vec{F}$ *a través de la superficie cerrada es igual a la divergencia del vector a través del volumen que delimita dicha superficie.*

$$\oiint_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = \iiint_V \nabla \cdot \vec{F}\, dv$$

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

[1] S. Burbano de Ercilla. FISICA GENERAL. Editorial Librería General, Zaragoza.

[2] M.R. Ortega. LECCIONES DE FÍSICA, MECÁNICA 1. Universidad Autónoma de Barcelona, Bellaterra.