Tema 6. ELASTICIDAD.

Nota: El contenido de estos apuntes pretende ser un resumen de la materia desarrollada en el curso. Por ello, el alumno debe de completarlo con las explicaciones y discusiones llevadas a cabo en clase y con la bibliografía recomendada.

6.1 Introducción. Conceptos básicos.

Hasta ahora se han considerado los cuerpos como sólidos rígidos (que no se deforman al aplicarles fuerzas) pero esto es una idealización que no ocurre en los cuerpos reales que sí se deforman.

Un ***cuerpo se deforma*** cuando al aplicarle fuerzas *éste cambia de forma o de tamaño.*

La ***Elasticidad*** *estudia la relación entre las fuerzas aplicadas a los cuerpos y las correspondientes deformaciones*.

Cuerpo elástico: Aquél que cuando desaparecen las fuerzas o momentos exteriores *recuperan* su *forma o tamaño original.*

Cuerpo inelástico: Aquél que cuando desaparecen las fuerzas o momentos no retorna perfectamente a su estado inicial.

Comportamiento plástico: Cuando las fuerzas aplicadas son grandes y al cesar estas fuerzas el cuerpo no retorna a su estado inicial y tiene una deformación permanente.

Los cuerpos reales pueden sufrir cambios de forma o de volumen (e incluso la ruptura) aunque la resultante de las fuerzas exteriores sea cero.

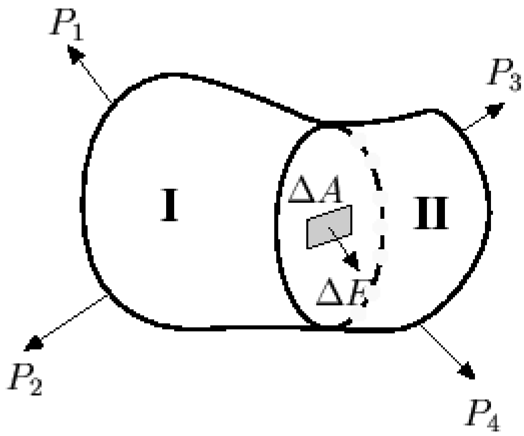
La deformación de estructuras (estiramientos, acortamientos, flexiones, retorceduras, etc.) debido a la acción de fuerzas implica la aparición de esfuerzos que pueden llevar hasta la ruptura.

La ***Elasticidad*** *estudia la relación entre las fuerzas y las deformaciones, sobre todo en los cuerpos elásticos.*

La deformación está íntimamente ligada a las fuerzas existentes entre los átomos o moléculas pero aquí se ignorará la naturaleza atómica o molecular de la materia considerando el cuerpo como un continuo y tendremos en cuenta las *magnitudes medibles: fuerzas exteriores y deformaciones.*

Las ***fuerzas de masa*** están asociadas con el cuerpo considerado (afectan a todas las partes del mismo) y no son consecuencia de un contacto directo con otros cuerpos y entre ellas podemos citar las fuerzas gravitacionales, las de inercia, las magnéticas.etc. Se especifican en términos de *fuerzas por unidad de volumen* . Las componentes de la intensidad de estas fuerzas según los ejes coordenados, son F_x , F_y y F_z .

Las ***fuerzas de superficie*** son debidas al contacto físico entre dos cuerpos. Si ampliamos el concepto podríamos incluir en dicho concepto las fuerzas que una superficie imaginaria dentro de un cuerpo ejerce sobre la superficie adyacente, lo que resulta muy práctico para establecer ecuaciones de equilibrio y otras.



Si un cuerpo, como el de la figura, está en equilibrio, si aislamos una de las partes en que el plano divide al cuerpo, p.e. la porción izquierda, para restituir el equilibrio debemos aplicar sobre la sección producida una distribución de fuerzas idéntica a la que la porción eliminada (la de la derecha) ejercía sobre la otra. O sea, las fuerzas de superficie $\boldsymbol{P_1}$ y $\boldsymbol{P_2}$, de la parte **I**, se mantienen en equilibrio con las fuerzas que la parte **II** del cuerpo ejerce sobre la parte **I,** fuerzas repartidas sobre toda la superficie *del corte*, de forma que cualquier área elemental ΔA está sometida a una fuerza ΔF. Por tanto, la *fuerza "media" por unidad de área* es

$$P_{media} = \frac{\Delta F}{\Delta A}$$

El ***esfuerzo (o tensión) en un punto*** se define como el *valor límite de la fuerza por unidad de área*, cuando ésta tiende a cero:

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA}$$

El ***esfuerzo*** en un elemento diferencial de área, dA *es un vector en la misma dirección que el vector de fuerza* dF**.** La fuerza dF, o lo que es lo mismo, el esfuerzo ***P***, **NO** está dirigido según una dirección preestablecida, como puede ser la **normal** al plano de la superficie.

Aunque en general la dirección del vector esfuerzo no coincidirá con la de la normal **n** a la superficie, siempre es posible elegir un sistema de coordenadas cartesianas con un eje coincidente con la dirección normal **n** y los otros dos ejes contenidos en el plano de la sección, y proyectar el vector ***dF*** sobre estos ejes.

El concepto vectorial del esfuerzo implica que *tiene que estar referido a un plano determinado*, ya que si se modifica el plano considerado que engloba al punto el esfuerzo será diferente. Si queremos conocer el esfuerzo en cualquier plano que pase por el punto considerado, *ya no se puede hablar del esfuerzo como un vector si no como un tensor.*

Para definir totalmente el vector esfuerzo, tenemos que especificar su magnitud, dirección y el plano sobre el que actúa. Por eso es mejor hablar del *estado tensional* de un punto, o simplemente ***esfuerzo en un punto*** entendido como el conocimiento del esfuerzo o tensión en todo plano que pase por el punto, o sea expresándolo como en tensor.

6.2 Esfuerzo normal.

*El **esfuerzo** es una medida de la fuerza por unidad de* área (en la que se aplica) *que causa la deformación.*

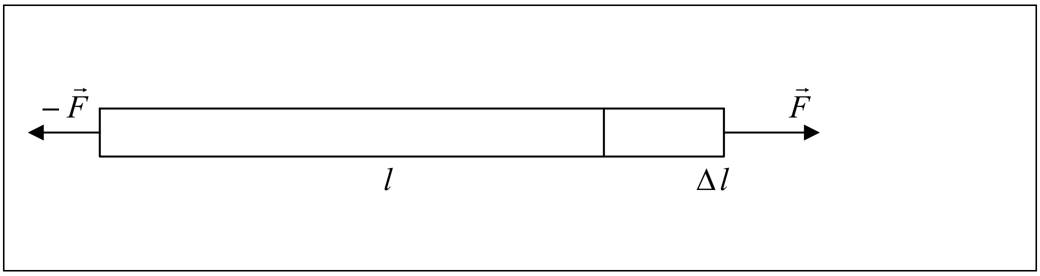
Si la fuerza aplicada no es normal ni paralela a la superficie, siempre puede descomponerse en la suma vectorial de otras dos tal que siempre una sea normal y la otra paralela a la superficie considerada.

Los ***esfuerzos con dirección normal*** a la sección, se denotan normalmente como $\boldsymbol{\sigma}$ (sigma) y se denominan como ***esfuerzo de tracción o tensión*** *cuando apunta hacia afuera de la sección*, tratando de estirar al elemento analizado, y como ***esfuerzo de compresión*** cuando apunta hacia la sección, tratando de aplastar al elemento analizado.

El ***esfuerzo con dirección paralela*** al área en la que se aplica se denota como $\boldsymbol{\tau}$ (tau) y *representa un esfuerzo de corte* ya que este esfuerzo trata de cortar el elemento analizado, tal como una tijera cuando corta papel.

Las unidades de los esfuerzos son las de fuerza dividida por área (las mismas que para la presión), pero el esfuerzo no es un vector sino un tensor.

Las unidades que más se utilizan son: Pascal (**Pa) = N/ m^2**, (S.I.); **din/ cm^2** (c.g.s.); **Kp/m^2**, (s. Técnico); atmósfera técnica **(Kp/cm^2**); atmósfera (atm); **bar**.



6.3 Deformación unitaria longitudinal.

Si a una barra de longitud l le aplicamos una fuerza de tracción $\vec{F}$ y la barra sufre un alargamiento Δl, se define ***alargamiento o deformación longitudinal*** como:

$$\varepsilon_l = \frac{\Delta l}{l}$$

La ***deformación longitudinal*** es la variación relativa de longitud.

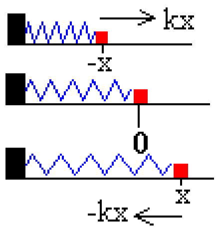
La relación entre la fuerza F y el alargamiento Δl viene dada por el ***coeficiente de rigidez*** K_s:

$$F = K_s \, \Delta l$$

El *coeficiente de rigidez* depende de la geometría del cuerpo, de su temperatura y presión y, en algunos casos, de la dirección en la que se deforma (anisotropía).

6.4 Ley de Hooke.

Cuando estiramos (o comprimimos) un muelle, la *fuerza recuperadora es directamente proporcional a la deformación x (*al cambio de longitud x respecto de la posición de equilibrio) *y de signo contraria a ésta.* $\boldsymbol{F = - k\, x}$**,** Siendo $\boldsymbol{k}$ una constante de proporcionalidad, denominada ***constante elástica*** del muelle. El signo menos en la ecuación anterior se debe a que *la fuerza recuperadora es opuesta a la deformación.*



Para $x>0$, $F = - k\, x$

Para $x<0$, $F = k\, x$

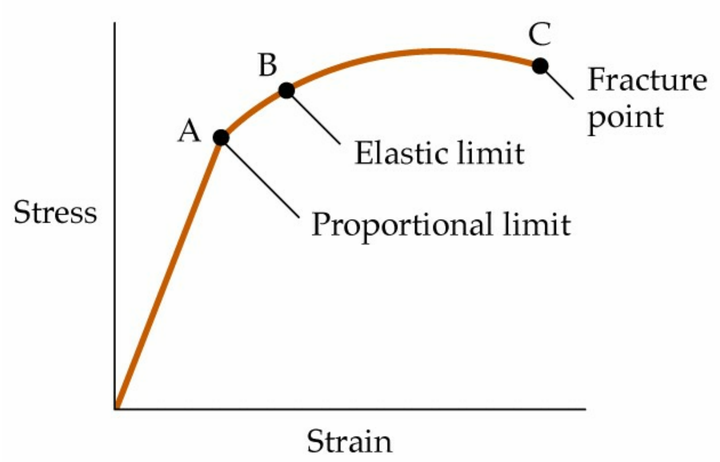
La ***energía potencial*** $\boldsymbol{E_p}$ correspondiente a la fuerza F vale:

$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2 + c$$

porque el trabajo realizado por esta fuerza conservativa cuando la partícula se desplaza desde la posición x_A a la posición x_B es:

$$\int_A^B F dx = \int_A^B -kx dx = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

La ***ley de Hooke*** *es solo aplicable a deformaciones unitarias pequeñas*, hasta que se alcanza el límite de proporcionalidad (*ver figura)*.



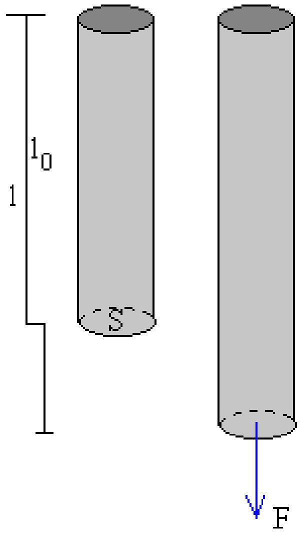
En las ***curvas esfuerzo - deformación*** de un material hay un tramo de ***comportamiento perfectamente elástico*** en el que la *relación esfuerzo – deformación es lineal* (punto **A**). De ahí hasta otro punto **B** (de *límite elástico*) el material sigue un ***comportamiento elástico*** (sigue habiendo una relación entre esfuerzo y deformación, aunque no es lineal, y si se retira el esfuerzo se recupera la longitud inicial). Si se sigue aumentando la carga (por encima del punto b hasta el punto **B'**), el material se deforma rápidamente y *si se retira el esfuerzo no se recupera la longitud inicial, quedando una deformación permanente y el cuerpo tiene un* ***comportamiento plástico.*** Si se sigue aumentando la carga (por encima del punto **B'**), el material llega hasta un estado en el que ***se rompe*** (punto **C**).

Cuerpos frágiles: Los que *se rompen al superar el límite elástico*.

Cuerpos dúctiles: Los que *se siguen deformando al superar el límite elástico,* siguiendo un comportamiento plástico.

Fatiga elástica: *Alteración de las características elásticas* tras muchas deformaciones.

6.5 Deformación por tracción o compresión. Módulo de Young.



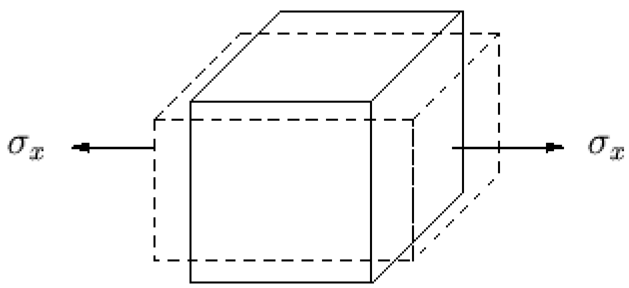
Si aplicamos una fuerza F a una barra de longitud l_0 el material se deforma longitudinalmente y se alarga $l - l_0$.

La razón de proporcionalidad entre el esfuerzo (fuerza por unidad de área) y deformación unitaria (deformación por unidad de longitud) está dada por la constante ***E,*** denominada ***módulo de Young*** , que es característico de cada material.

$$\frac{F}{S} = E\,\frac{l - l_0}{l}$$

La Ley de Hooke relaciona la deformación ε_x de una barra sometida a esfuerzo axil, con la tensión normal generada por dicho esfuerzo σ_x, mediante la constante ***E*** que se denomina *módulo de elasticidad lineal o* ***módulo de Young***.

$$\sigma_x = E\,\varepsilon_x$$



La *rigidez de un material queda caracterizada* por la relación entre el esfuerzo σ_x y deformación ε_x, o sea *por el módulo de Young.* $E = \dfrac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = \dfrac{F_x / A}{\Delta x / x}$

El *módulo de Young* tiene las mismas unidades que el esfuerzo.

10.6 Coeficiente de Poisson.

Todo elemento solicitado a carga axial experimenta una deformación no solo en el sentido de la solicitación (deformación primaria ε_x), *sino también según el eje perpendicular* (***deformación secundaria o inducida*** ε_y, ε_z), o sea, *toda tracción longitudinal con alargamiento implica una contracción transversal* (disminución de la sección del elemento estirado).

El ***coeficiente de Poisson*** *es la relación de la deformación perpendicular a la axial.*

$$\upsilon = -\frac{\varepsilon_p}{\varepsilon_a}$$

Y si el cuerpo es isótropo:

$$\upsilon = -\frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} = \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}$$

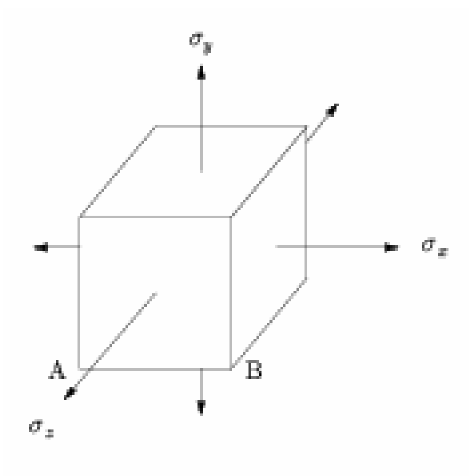
Cuerpo isótropo: Tiene las mismas características físicas en todas las direcciones. *Anisótropo*, cuando depende de la dirección.

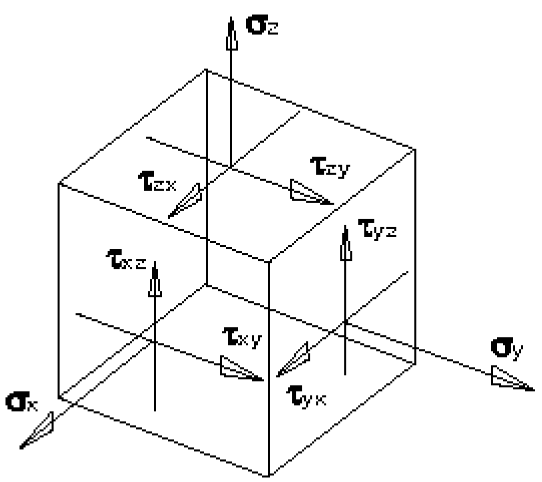
Cuerpo homogéneo: Tiene igual densidad . *Inhomogéneo*: Diferente densidad.

Los cuerpos homogéneos e isótropos tienen definidas sus característica elásticas con el módulo de Young y el coeficiente de Poisson.

10.7 Deformación debida a tres esfuerzos ortogonales.

La solicitación uniaxial es prácticamente una excepción, ya que en la realidad lo más común es encontrar solicitaciones biaxiales y triaxiales. Consideremos ahora un elemento (*pequeño trozo de material ubicado dentro del cuerpo con forma de cubo con aristas de valor : dx, dy , dz*) sometido a un estado de tensión triaxial en la que la longitud inicial de AB es la unidad.





Las componentes normales y tangenciales de los esfuerzos se utilizan con frecuencia y resultan más significativas. Definimos por σ la *componente perpendicular al plano sobre el que actúa.* El *esfuerzo tangencial* se representa por τ y *se encuentra en la superficie del plano sobre el que actúa.*

La notación utilizada es: σ_x *para el* ***esfuerzo normal*** *aplicado en la cara normal al eje* x, de igual forma se definen σ_y, σ_z. Para los ***esfuerzos cortantes****, la notación es* τ_{ab} *que denota el esfuerzo de corte que actúa en la cara normal al eje 'a' y que apunta en la dirección del eje 'b'*. De esta forma se tienen: τ_{xy} , τ_{xz} , τ_{yx} , τ_{yz} , τ_{zx} , τ_{zy}.

La *componente de la deformación*, ε_x, la determinamos suponiendo que σ_x se aplica primero, cambiando la longitud AB una cantidad $\frac{1}{E}\sigma_x$. Luego se aplica σ_y, que produce un cambio adicional en la longitud AB igual a $-\frac{\upsilon}{E}\sigma_y\ (1+\frac{\sigma_z}{E})$. Pero como $\frac{1}{E}\sigma_x$ es una deformación elástica es despreciable con respecto a la unidad y la podemos eliminar. Cuando aplicamos σ_z e ignorando nuevamente el término de orden superior, el cambio de la longitud AB lo expresamos por $-(\frac{\upsilon}{E}\sigma_z)$.

La *deformación total en la dirección del eje X*, viene dada por:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \upsilon\,(\sigma_y + \sigma_z)\right]$$

Y por un razonamiento análogo tendremos las otras dos deformaciones:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \upsilon\,(\sigma_x + \sigma_z)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \upsilon\,(\sigma_x + \sigma_y)\right]$$

6.8 Compresión uniforme. Módulo de compresibilidad.

Supongamos que tenemos *un estado de esfuerzos, debido a una* ***compresión uniforme*** que actúa por toda la superficie del cuerpo y perpendicular a ella, definido por:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -\,p$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

si aplicamos estos valores a las ecuaciones anteriores obtenemos las componentes de la deformación:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\left(\frac{1-2\upsilon}{E}\right) p$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Definimos la *dilatación* o ***deformación volumétrica***, ε como el cambio de volumen unitario (cambio del volumen total ΔV dividido por el volumen original *V*) y lo expresamos mediante:

$$\varepsilon = -\frac{\Delta V}{V}$$

o bien:
$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Para el caso de *presión hidrostática* tendríamos:

$$\varepsilon = -\frac{3}{E}(1-2\upsilon)\, p = -\frac{1}{K}\, p$$

donde $K = \dfrac{E}{3\,(1-2\upsilon)}$ es el *Módulo Volumétrico de Elasticidad* o ***Módulo de deformación volumétrica.***

El módulo de deformación volumétrica representa la razón negativa de la presión hidrostática con la dilatación resultante.

$$K = -\frac{\Delta p}{\Delta V / V}$$

La constante ε así como σ_m, definida por la ecuación:

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$$

es de especial interés en el estudio de la plasticidad. El hecho de que la dilatación, bajo cualquier estado de tensiones, venga definida por la ecuación es evidente, ya que las deformaciones tangenciales no producen cambio alguno en el volumen. En consecuencia,

$$\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = -\left(\frac{1-2\upsilon}{E}\right) 3\sigma_m$$

es decir, la relación:

$$\varepsilon = \frac{1}{K}\sigma_m$$

cumple para cualquier estado de tensiones.

A la inversa de *K* se le conoce como ***coeficiente de compresibilidad*** (*B = 1/K.)*

A la cantidad σ_m se le conoce como *componente esférica --o hidrostática—del esfuerzo*.

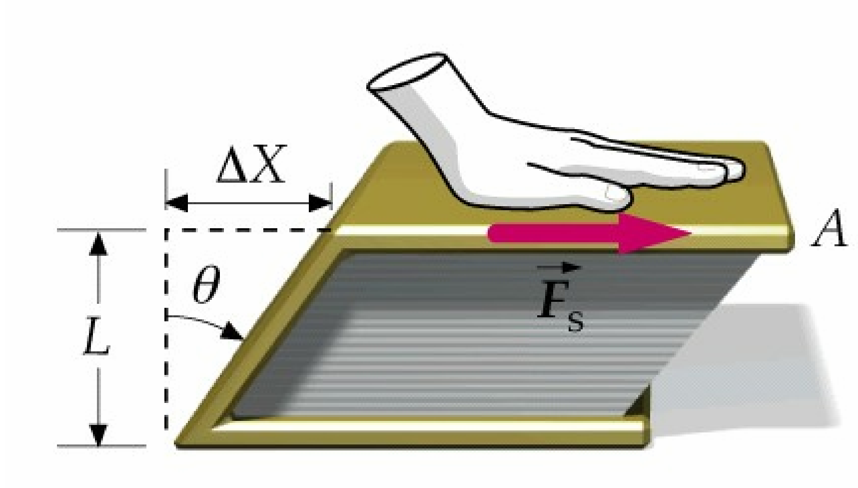
Los valores de ε y de σ_m son invariantes con respecto a cualquier transformación de ejes ortogonal.

6.9 Cizalladura. Módulo de rigidez.

Hasta hora solo hemos tenido en cuenta fuerzas normales a las superficies que dan lugar a esfuerzos normales y a deformaciones de volumen. Supongamos ahora que las fuerzas ***F*** que se aplican son tangenciales a una superficie ***A***, el cambio que se produce en el cuerpo es solo un cambio de forma ya que el volumen permanece constante.

El ***esfuerzo cortante o tangencial τ****, es la fuerza de corte o tangencial por unidad de área:*

Esfuerzo cortante **=** *fuerza de corte / área de corte* $\tau = \frac{F_s}{A}$



El *esfuerzo cortante* tiene las mismas dimensiones que la presión *pero tiene la dirección de la fuerza tangencial* .

Las ***unidades*** *del esfuerzo cortante* son las mismas que la de la presión **N / m²** en el S.I..

Cuando actúan *esfuerzos cortantes* el material se deforma como si el material (p.e. un cubo) estuviera formado por láminas paralelas y se deformaran como lo haría el libro de la figura; a esta deformación que supone un deslizamiento según el *esfuerzo cortante o de cizalladura* se denomina ***deformación cortante, angular o de cizalladura*** y vale:

$$\gamma = \frac{\Delta x}{l} = \tan\theta = \frac{F_s / A}{G} = \frac{\tau}{G}$$

donde *G* se denomina *módulo de elasticidad tangencial* o más habitualmente ***módulo de rigidez*** *(*o también módulo de *cortante o de cizalladura).*

$$G = \frac{\tau}{\gamma} = \frac{F_s}{A\tan\theta} = \frac{F_s}{A\,\theta}$$

La deformación por cizalladura se produce sólo en los sólidos, por eso se dice que estos presentan rigidez. Los sólidos pueden tener deformaciones volumétricas y de forma, mientras que los fluidos solo tienen deformación volumétrica.

La relación *esfuerzo cortante –deformación de cizalladura*, en un estado bidimensional de cizalladura pura, cumple, dentro de los límites elásticos de la ley de Hooke, una relación del tipo:

$$\tau_{yz} = G\,\gamma_{yz} \qquad \text{o bien : } \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\,\tau_{yz}\,;$$

donde $$\gamma_{yz} = \gamma_y + \gamma_z = \frac{\Delta\varsigma}{\Delta y} + \frac{\Delta\eta}{\Delta z}$$

6.10 Deformación por torsión. Constante de torsión.

Ver en clase.