Tema 1.- Dinámica de los sistemas de partículas

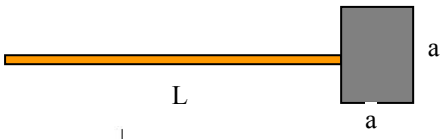
1. Tres partículas cuyas masas son m_1 = 3 kg, m_2 = 1 kg, m_3 = 2 kg se mueven bajo la influencia de un campo de fuerzas externo y de las fuerzas de interacción mutua (newtonianas), de modo que sus vectores de posición con relación a un sistema de referencia inercial vienen dados por: $\mathbf{r}_1=4\mathbf{i} + (2t^3-4)\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_2=(6t-2t^2)\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + 6t^3\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_3 =(4t^2-3)\mathbf{i} + 4t\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, donde t denota el tiempo. Calcule:
a) La expresión del vector de posición del CM del sistema, su velocidad y aceleración.
b) El momento lineal total del sistema.
c) La fuerza total que actúa sobre el sistema y sobre cada partícula.
Sol: *a)* $\mathbf{r}_{cm} = (t^2 + t + 1, t^3 + t - 2, t^3 - 5)$; $\mathbf{v}_{cm}=(2t + 1, 3t^2 + 1, 3t^2)$; $\mathbf{a}_{cm}=(2, 6t, 6t)$
b) $\mathbf{p}_S =(12t + 6, 18t^2 + 6, 18t^2)$; *c)* $\mathbf{F}_{ext} =(12, 36t, 36t)$

2.- Determine la posición del centro de masas del sistema de 3 partículas con las siguientes características:
$m_1 = 2m$ $\quad \mathbf{r}_1 = (d,0)$
$m_2 = m$ $\quad \mathbf{r}_2 = (d+b,0)$
$m_3 = 4m$ $\quad \mathbf{r}_3 = (d+b,h)$
Sol: $x_{CM} = \dfrac{7d+5b}{7}$, $y_{CM} = \dfrac{4h}{7}$

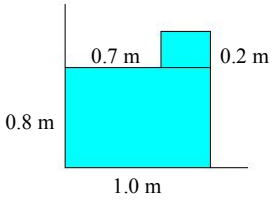
3.- Uma molécula de água está formada por un átomo de oxigeno y dos de hidrogeno. El átomo de oxigeno tiene una masa de 16 uma (u) y cada átomo de hidrógeno tiene una masa de 1 uma. Cada uno de los átomos de hidrógeno están separados una distancia media de 96 pm (96×10^{-12}m) del átomo de oxigeno y separados entre sí por un ángulo de 104,5º. Determine el centro de masas de la molécula.
Sol: $x_{CM} = 6.6$ *pm*, $y_{CM} = 0$

4.- Determine el centro de masas de una barra en los siguientes casos: a) homogénea de masas M y longitud L; b) no es homogénea, siendo λ=ax, donde "a" es constante.
Sol: *a) L/2; b) 2/3 L*

5.- Un martillo está formado por un mango de madera de longitud L = 0.6 m y masa 2 kg unido a un bloque de acero simétrico de arista a = 0.2 m y masa 10 kg, tal y como se muestra en la figura. Determine el centro de masas del sistema.
Sol: $x_{CM} = 0.63$ *m*



6.- Determine el centro de masas de la lámina metálica homogénea de la figura.
Sol: $x_{CM} = 0.52$ *m*, $y_{CM} = 0.44$ *m*



7. Con los datos y resultados del problema 1, calcule el trabajo realizado por las fuerzas que actúan sobre las partículas, cuando el sistema evoluciona durante el intervalo de tiempo de t = 0 a t = 1 s. ¿Podemos separar el trabajo realizado por las fuerzas internas del trabajo realizado por las fuerzas exteriores? Explique esto último. *Sol: 264 J*

8. En el problema anterior desglose la energía cinética total del sistema, en los instantes t=0 s y t=1 s, en dos partes, correspondientes a la energía cinética intrínseca y la energía cinética orbital.
Sol: t= 0 s, $E_{c,orbital}$ = 6 J, $E_{c,interna}$= 30 J; t= 1 s, $E_{c,orbital}$ = 102 J, $E_{c,interna}$= 198 J

9. Con un mortero se dispara verticalmente una granada con una velocidad inicial de 300 m/s, cuando la granada alcanza el punto más alto de su trayectoria explota en tres fragmentos de masas iguales. Uno de los fragmentos continúa subiendo verticalmente con una velocidad de 100 m/s, otro fragmento sube con una velocidad inicial de 250 m/s formando un ángulo con la vertical de 45 grados. Calcular: a) La velocidad inicial del tercer fragmento; b) Los puntos de caída sobre el terreno de los fragmentos.
Sol: a) 328.4 m/s, -54.43° con la horizontal; b) 2370 m, 9470 m.

10. Una bola de 0.2 kg sujeta al extremo de una cuerda ligera de 1.5 m de longitud, se suelta cuando la cuerda (que está tensa) forma un ángulo de 30 grados con la vertical, chocando elásticamente con un bloque de 0.3 kg que se halla en reposo en el punto bajo de la trayectoria de la bola. Determine la velocidad con la que sale despedido el bloque después de la colisión.
Sol: 1.58 m/s.

11. Una bala se dispara contra un bloque de madera y queda incrustada en éste. Determine la velocidad que adquiere el conjunto y el Q de esta colisión. Datos: velocidad de la bala 700 m/s, masa de la bala 100 g, masa del bloque 12 kg.
Sol: 5.78 m/s, 24298 J

12. Un vagón de ferrocarril de 20 Tm está en reposo en una pendiente con los frenos puestos. Entonces se sueltan los frenos de este vagón y desciende por la pendiente hasta la parte inferior de la misma, situada 9 m por debajo de la posición original de este vagón, chocando con otro vagón de 10 Tm que se hallaba en reposo. Los dos vagones se quedan enganchados y ascienden, por una pendiente que tienen frente a ellos, hasta una altura H. Hallar esta altura H.
Sol: H = 4.0 m

13. Dos péndulos simples de masas respectivas m y m' ambos de longitud l, están suspendidos de un mismo punto. Se separa uno de ellos de la vertical manteniendo el hilo tenso, consiguiendo así una diferencia de alturas h entre las masas pendulares, se suelta dicho péndulo colisionando con el otro que estaba en reposo en su posición original. ¿A qué altura se elevará el conjunto formado por ambos péndulos si la colisión es completamente inelástica? *Sol:* $H = \left(\frac{m}{m+m'}\right)^2 h$

14. Dejamos caer una pelota desde una altura de 10 m sobre un suelo duro y horizontal, observando que la pelota se remonta hasta una altura de 8.1 m después del primer bote. Suponiendo que el coeficiente de restitución permanece constante en los sucesivos rebotes.
a) Calcular el valor del coeficiente de restitución.
b) ¿Qué fracción de la energía se pierde en cada rebote?
c) ¿Cuántos botes dará la pelota antes de que la altura a la que se remonte sea de 10 cm?
Sol: a) 0.9; b) 19 %; c) 22

15. Una bola rebota escaleras abajo escalón por escalón, observándose que la misma se remonta en cada rebote siempre hasta la misma altura, esta altura es la altura del escalón anterior. Calcular el coeficiente de restitución entre la bola y la superficie de los escalones,

sabiendo que la altura de cada escalón es de 30 cm. Suponer que la bola y la superficie de los escalones son perfectamente lisas.
Sol: 0.707

16. En el juego de billar, el jugador desea introducir una bola en la tronera de la esquina. Si el ángulo en dirección a la tronera es de 35º, ¿hacia que ángulo se desviará la bola de impacto? Suponer que la fricción y el efecto (movimiento de rotación) son despreciables.
Sol: $\theta = 55^{o}$

17. Una bola que se mueve con una velocidad inicial de 5 m/s choca elásticamente con otra bola que está inicialmente en reposo. Después del choque, la segunda bola se mueve formando un ángulo de 30º con la dirección de la primera bola. Determine: a) la dirección de la primera bola después del choque; b) La velocidad de ambas bolas después del choque. Suponer que las bolas tienen la misma masa.
Sol: *a)* $\theta = 60^{o}$*; b)* $v_1' = 2.5$ *m/s,* $v_2' = 4.3$ *m/s*