Práctica 6. MOMENTO DE INERCIA. TEOREMA DE STEINER

OBJETIVOS

- Determinar la constante recuperadora de un muelle en espiral.
- Determinar momentos de inercia de cuerpos con diferentes geometrías.
- Comprobar el teorema de Steiner.

MATERIAL

- Muelle espiral con soporte
- Dinamómetro
- Cronómetro
- Calibrador
- Cuerpos con diferentes geometrías: esfera, disco, cilindro hueco y cilindro macizo
- Disco con perforaciones
- Barra metálica con masas móviles

FUNDAMENTO TEÓRICO

La ecuación de la rotación de un cuerpo rígido viene dada por

$$\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt} \tag{6-1}$$

Donde $\vec{M}_O$ es el momento resultante respecto de O, y $\vec{L}_O$ es el momento angular respecto de O. Generalmente el punto O suele ser el c.d.g. del cuerpo. La ecuación es válida para un sistema inercial de referencia. Cuando existe simetría respecto del eje de rotación, $\vec{L}_O = I\vec{\varpi}$ y la ecuación (6-1) queda:

$$\vec{M}_O = \frac{d(I\vec{\varpi})}{dt} = I\frac{d\vec{\varpi}}{dt} = I\vec{\alpha} \tag{6-2}$$

Los cuerpos aquí utilizados, cumplen esta condición de simetría respecto del eje vertical que pasa por su c.d.g., que es el eje respecto del cual rotan. $\vec{M}_O$ y $\vec{\alpha}$ tienen la dirección de este eje de rotación.

El momento de fuerza aplicado actúa sobre el muelle y lo deforma según la ley de Hooke:

$$M_0 = -D\theta \tag{6-3}$$

donde D es la constante recuperadora del muelle o también constante restauradora angular.

De (6-2) podemos deducir que:

$$-D\theta = M_O = I\frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{D}{I}\theta = 0 \tag{6-4}$$

que es la ecuación de un movimiento oscilatorio de periodo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D}} \tag{6-5}$$

Si deseamos obtener el momento de inercia, hemos de determinar primero la constante recuperadora D y lo haremos de la siguiente forma. La expresión (6-3) nos indica que la relación entre el momento M_O y el ángulo θ es lineal, y por tanto teniendo diferentes valores del momento y las correspondientes desviaciones angulares θ, que producen, le ajustamos la recta de regresión y de su pendiente, según la ecuación (6-3), hallamos el valor de D. Una vez conocido este valor, midiendo el periodo podemos hallar el momento de inercia de la expresión (5-5).

Si deseamos conocer el momento de inercia del cuerpo respecto de un eje de rotación, paralelo al anterior, pero que no pase por el c.d.g., basta con aplicar el teorema de Steiner, (de los ejes paralelos).

$$\mathrm{I_A} = \mathrm{I} + \mathrm{md}^2 \tag{5-6}$$

donde I_A es el momento de inercia respecto de un eje vertical que no pasa por el c.d.g. sino por un punto A que está a una distancia d del c.d.g.; m es la masa del cuerpo, e I es el momento de inercia respecto de un eje vertical que pasa por el c.d.g, o sea, el momento de inercia calculado con (6-5).

El periodo para la oscilación, cuando el eje de giro pasa por A, es

$$\mathrm{T}^2 = \frac{4\pi^2}{\mathrm{D}}(\mathrm{I} + \mathrm{md}^2) \tag{5-7}$$

<u>MÉTODO OPERATIVO</u>

1. *Determinación de la constante recuperadora del muelle D*

- Mida el diámetro del disco perforado. Monte el disco en el sistema giratorio de manera que el eje de rotación pase por su centro.

- Con el dinamómetro, enganchado mediante el hilo en su borde, aplique una fuerza horizontal que gire el disco un ángulo de $\pi/2$ radianes. Debe cuidar que el dinamómetro forme un ángulo recto con la hilera de orificios en el disco, y que esté en el mismo plano del disco. Anote el ángulo y la fuerza.

- Repita la operación anterior para valores del ángulo de π, $3\pi/2$, 2π y $5\pi/2$ radianes.

- Calcule el valor del momento M, correspondiente a cada fuerza aplicada F. En las condiciones que se ha operado $M = F.r$. Siendo r, el radio del disco perforado.

- Represente gráficamente los puntos (θ, M), con sus rectángulos de error.
- Ajuste la recta de regresión. De su pendiente calcula D, con su error y unidades.
- Represente en el gráfico anterior la recta obtenida.
- Exprese correctamente el valor obtenido D.

2. *Cálculo de los momentos de inercia*

- Desmonte el disco perforado del sistema giratorio.
- Determine la masa de los sólidos problema y mida sus dimensiones siempre que se pueda con el calibrador, y en caso contrario con la cinta métrica. ***Dato***: el radio de la esfera es $7x10^{-2}$ m.
- Coloque uno de los cuerpos disponibles sobre el soporte del muelle espiral. Déle al disco un giro de π radianes. Determine el periodo de oscilación con la horquilla de barrera de luz. Anote este periodo, indicando el cuerpo al que corresponde.
- De la expresión (6-5) calcule su momento de inercia y la cota de error, todo expresado correctamente.
- Calcule, a partir de la masa y dimensiones determinadas previamente, el momento de inercia teórico para ese cuerpo. Compara el resultado experimental con el teórico y discute resultados.
- Repita, las operaciones indicadas a partir de 3º apartado, con los sólidos restantes.

3. *Comprobación del teorema de Steiner*

- Mida la distancia entre los orificios del disco perforado de la manera siguiente:
  Mida la distancia l, entre los bordes más alejados de dos orificios consecutivos.
  Mida el diámetro d, de uno de los orificios. La distancia entre los centros es: $l - d$.
- Monte el disco perforado en el soporte del muelle. Calcula el periodo de oscilación por el procedimiento anteriormente expuesto.
- Repita el procedimiento para todos los orificios, comenzando por el del centro, consecutivamente hacia el más alejado.
- Anote los valores de T^2 y la distancia del orificio al c.d.g. a. Este valor es $a = n(l-d)$. Siendo n, el número de orificio contado desde el centro (1, 2,...).
- Represente gráficamente los valores (a^2, T^2).
- Ajuste la recta de regresión y de ella, obtén la masa m del disco y su momento de inercia I, respecto del c.d.g., por medio de la ecuación (6-7).

- Compare los resultados experimentales con los teóricos.

CUESTIONES

1) Comente la frase “cuando sobre un cuerpo no actúa ningún par de fuerzas el cuerpo no gira”. Ponga un ejemplo.

2) Explique en qué se fundamenta el hacer girar un huevo sobre un plano horizontal para saber si está cocido o crudo.

3) ¿Por qué para realizar un triple salto mortal desde un trampolín resulta más facil si se encoge el cuerpo hasta unir la cabeza con las rodillas?

4) En el método operatorio, para calcular la constante restauradora angular D, se exige que el dinamómetro esté en una posición perpendicular al radio del disco ¿por qué?, ¿qué pasa si es diferente?, ¿y si el dinamómetro no está en el mismo plano que el disco?

5) Explique cómo se puede calcular el momento de inercia de un cuerpo cualquiera y su masa, por medio de un muelle de constante recuperadora conocida. ¿Es necesario conocer la posición de su c.d.g? ¿Razone la respuesta?