# *Práctica 2. ESTUDIO EXPERIMENTAL DEL PÉNDULO. MEDIDA DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD*

## OBJETIVOS

- Analizar experimentalmente las características del movimiento del péndulo simple.
- Determinar la aceleración de la gravedad en el lugar de operación.
- Comprobar la equivalencia entre la masa inerte y la masa gravitatoria.

## MATERIAL

- Soporte para el péndulo con limbo graduado.
- Esfera metálica con tornillo.
- Hilo para colgar la esfera.
- Cinta métrica.
- Cronómetro.

## FUNDAMENTO TEÓRICO

El péndulo simple o matemático es una masa *m*, suspendida de hilo indeformable de longitud *l* y masa despreciable. El otro extremo del hilo está sujeto a un punto fijo O. El péndulo puede oscilar en un plano vertical fijo, cuando separamos la masa de la posición de equilibrio y la soltamos. El péndulo simple puede considerarse como un sólido rígido en rotación, alrededor de un eje horizontal que pasa por O.

Su ecuación de movimiento es:

$$\vec{M}_0 = I\vec{\alpha} \qquad (2\text{-}1)$$

donde Mo es el momento respecto de O, de las fuerzas que actúan sobre la masa *m*; $I = ml^2$, el momento de inercia respecto del eje de giro y α la aceleración angular. Sobre la masa actúan su peso P y la tensión de la cuerda dirigida a lo largo de ella y con sentido hacia O.

Para establecer la ecuación de movimiento se toman ejes de referencia cartesianos, el eje OZ es perpendicular al papel y con sentido positivo hacia fuera del mismo. El ángulo θ, se cuenta respecto del eje vertical OY, siendo positivo a la derecha y negativo hacia la izquierda, el eje OX horizontal, Fig.3-1.

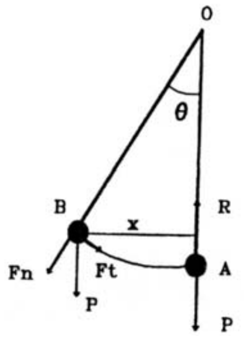


Fig. 3-1

$$\vec{M}_0 = \vec{l}x\vec{P} + \vec{l}x\vec{R} = \vec{l}x\vec{P} \tag{2-2}$$

como ***l*** y ***R*** son paralelos, su producto vectorial es nulo y por tanto

$$\vec{l}x\vec{P} = (lPsen\theta)\, i = \vec{M}_0 \tag{2-3}$$

$$\vec{\alpha} = -\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{i} \tag{2-4}$$

y según (2-1)

$$lPsen\theta = -ml^2\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2-5}$$

P = $m_g g$ , donde $m_g$ es la masa gravitatoria, que mide la capacidad de los cuerpos para atraerse mutuamente.
m = $m_i$ es la masa inerte, que mide la oposición de los cuerpos a cambiar su estado de movimiento.

La ecuación (2-5) queda finalmente como:

$$\ddot{\theta} + \frac{m_g g}{m_i l} sen\theta = 0 \tag{2-6}$$

Ecuación diferencial no se puede integrar de forma elemental. El periodo correspondiente al movimiento, en este caso es:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l.m_i}{m_g.g}}\left[1 + \frac{1}{4}sen^2\frac{\theta}{2} + ...\right] \tag{2-7}$$

Pero si consideramos valores de θ suficientemente pequeños para poder aproximar el senθ ≈ θ, la expresión (2-6) queda de la forma:

$$\ddot{\theta} + \frac{m_g g}{m_i l}\theta = 0 \tag{2-8}$$

que es la ecuación de un oscilador armónico simple. Su $\omega^2$ es $\frac{m_g \cdot g}{m_i \cdot l}$, y por tanto el periodo de oscilación viene dado por:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l \cdot m_i}{m_g \cdot g}} \tag{2-9}$$

La igualdad entre la masa inerte y la gravitatoria se admite como una simple coincidencia, comprobada por el propio Newton, en su teoría de la gravitación. Sin embargo constituye un hecho básico en la teoría general de la relatividad de Einstein, quien la consideraba como la clave nueva y fundamental para una comprensión más profunda de la naturaleza.

$$\frac{m_i}{m_G} = \text{cte} \qquad (2\text{-}10)$$

Este cociente toma el mismo valor para todos los cuerpos (que puede hacerse igual a la unidad). Si no fuera una constante universal, y tomara diferentes valores para distintos cuerpos, el periodo del péndulo simple dependería de las masas inertes y gravitatorias de cada cuerpo. Esta identidad, entre la masa inerte y la gravitatoria, conduce a la equivalencia entre un campo inercial y un campo gravitatorio, que es fundamental en la teoría de la gravitación de Einstein.

Admitiendo esta igualdad entre ambas masas, el periodo del péndulo simple queda:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad (2\text{-}11)$$

donde se pone de manifiesto que varía solamente con la longitud.

## ***MÉTODO OPERATORIO***

1) *Comprobación del isocronismo del péndulo*

Para pequeñas amplitudes, el periodo del péndulo no depende de ellas. Esto se conoce como isocronismo del péndulo. Vamos a comprobarlo de la siguiente forma:

- Fije la longitud del péndulo cercana al valor de un metro y mídala de la siguiente manera. En la posición vertical, toma la longitud $l_1$ desde el punto de suspensión al punto superior de la esfera y $l_2$ desde el punto de suspensión al punto más bajo de la esfera. Se tomará como longitud del péndulo, el valor $l = (l_1 + l_2)/2$.

- Separe la esfera unos 5º de la posición vertical, suéltela de forma que oscile en un plano vertical fijo.

- Mida el tiempo t empleado en realizar n oscilaciones (como mínimo 10). Calcule el periodo T = t/n. Empieze a contar el tiempo después de que haya realizado las dos ó tres oscilaciones primeras.

- Repita las operaciones anteriores para amplitudes sucesivamente crecientes de 5º en 5º hasta los 50º.

- Tabule correctamente los resultados.

- Haga una representación gráfica de T (en ordenadas) respecto a la amplitud θ (en abscisas). Ajuste la recta de regresión. Presente claramente los valores de la pendiente y ordenada en el origen con su cota de error y unidades. Comente el resultado.

2) *Medida del periodo en función de la longitud (a masa constante). Cálculo de g*

Según la relación (2-11), $T^2$ es proporcional a $l$, y el factor de proporcionalidad es $4\pi^2/g$. Se pretende representar $T^2$ en función de $l$, ajustar la recta de regresión y de la pendiente obtener el valor de g. Se procederá de la siguiente forma.

- Anote la sensibilidad de los aparatos de medición directa

- Mida la longitud del péndulo y su periodo. La longitud inicial debe ser del orden de un metro o más. Anota estos valores.

- Repita lo anterior tomando sucesivamente valores más pequeños de la longitud.

- Tabule correctamente los datos obtenidos.

- Haga la representación gráfica de los puntos $T^2$ (en ordenadas), $l$ (en abscisas) con sus rectángulos de error.

- Calcule la recta de regresión. Exprese claramente los valores de la pendiente y ordenada en el origen y sus cotas de error.

- Represente correctamente, en la gráfica anterior, la recta obtenida.

- Del valor de la pendiente deduzca el valor de g y su cota de error, en las unidades adecuadas.

- Calcule g, otra vez, por el siguiente procedimiento. Fije la longitud del péndulo en aproximadamente un metro y mídala con exactitud. Deje oscilar el péndulo y determine su periodo por el procedimiento ya indicado anteriormente. Mida al menos tres veces, este periodo, y mediante la dispersión en las medidas y aplicación de la teoría de errores, averigua el número de medidas que debe efectuar. Obténga el valor de T y su error. Con el valor de T despeje $g$ de la ecuación (2-11). Calcule su error.

3) *Medida del periodo en función de la masa (a longitud constante).*

- Fije la longitud del péndulo en un valor $l_0$, que no se modificará en este proceso.
- Calcule el periodo de oscilación, tomando esferas de diferentes masas, pero todas suspendidas a la misma longitud $l_0$.
- Represente T en función de la masa.

## ***CUESTIONES***

Hágase un estudio de cómo influyen en el valor del período los siguientes factores (estudiar cada factor por separado):

1. La masa de la cuerda.
2. Las perdidas por rozamiento.
3. El hecho de que la cuerda es extensible
4. El hecho de que la masa no es puntual.
5. El hecho de que las oscilaciones no son muy pequeñas.