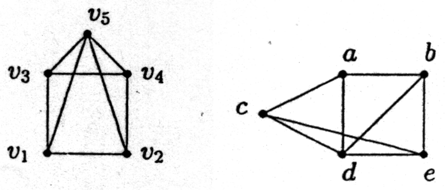
MATEMÁTICA DISCRETA

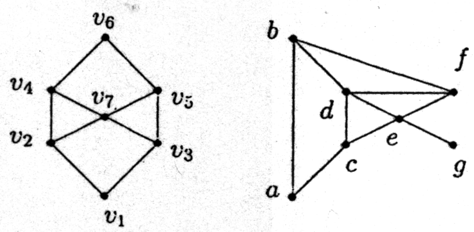
TEMA 5. GRAFOS

1 *Estudie si los siguientes grafos son isomorfos o no.*

a)



b)



2 *a) Calcule las matrices de adyacencias de los cuatro grafos anteriores.*

b) Calcule en cada uno de los cuatro grafos el número de caminos de longitud 5 que unen los vértices v_3 y v_4 en dos de los grafos, y a y e en los otros dos.

3 *Considere el grafo representado por la matriz de adyacencias*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

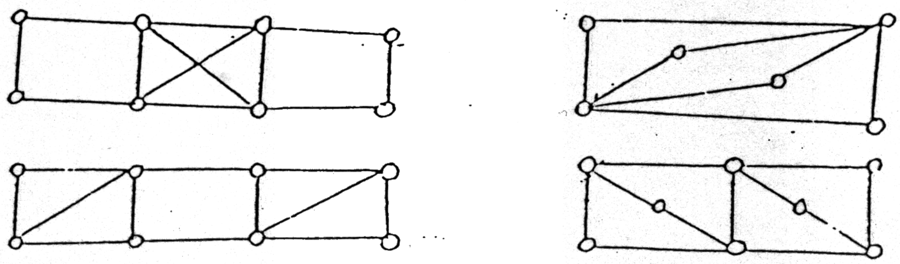
Calcule la distancia entre todos los vértices del grafo. Calcule además el número total de geodésicas que unen los vértices v_2 y v_3.

4 *El grafo G está especificado por la siguiente matriz de adyacencias:*

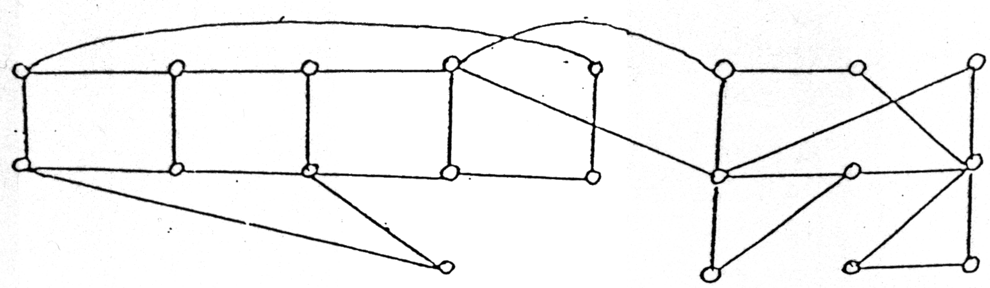
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. *¿Es G un grafo conexo?*
2. *¿Tiene G caminos cerrados de longitud 4?*

5 *El siguiente dibujo muestra cuatro grafos. Determina cuales son grafos de Euler y cuales son grafos de Hamilton. Construye caminos de Euler y ciclos de Hamilton en los casos apropiados.*

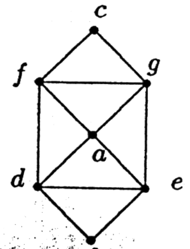


6 *Encuentra árboles extensión para los grafos del ejercicio anterior y para el siguiente grafo. Cúal es el número ciclotómico de cada uno?*



7 *Pruebe que si G es un grafo conexo cuyo camino propio más largo tiene longitud n, entonces dos caminos propios de G que tengan longitud n poseen vértices comunes.*

8 *Para comprobar que el circuito*

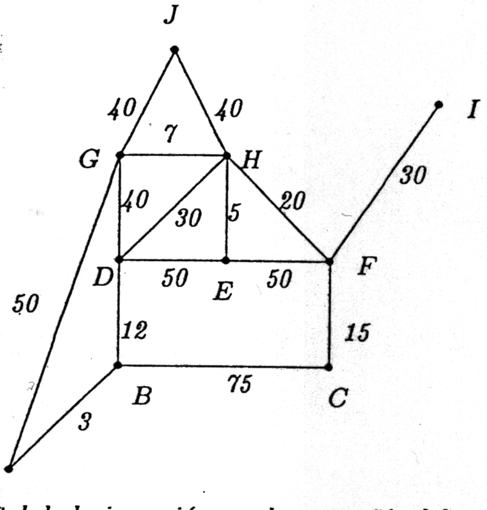


no ha sufrido daños a causa de una bajada de tensión en el fluido eléctrico, debe hacerse pasar por dicho circuito una corriente eléctrica de manera que ésta recorra exactamente una vez cada tramo del circuito. Estudie si en el circuito anteriormente dibujado este procedimiento es posible, y caso de serlo, elija uno de los caminos que permitiría el paso de la corriente eléctrica de la forma que se ha especificado.

cuales son ...dos.

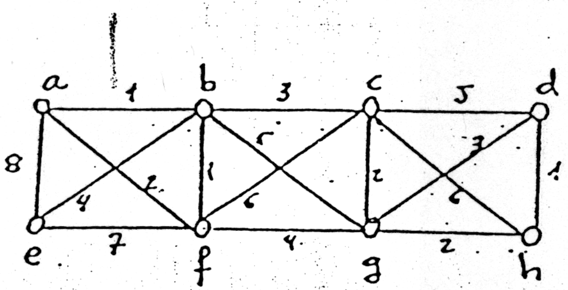
9 Calcule el número ciclotómico de un grafo completo con n vértices.

X 10 Una compañía de telecomunicaciones quiere hacer una conexión entre 10 ciudades de manera que los ordenadores de todas las ciudades puedan tener acceso a toda la información posible de que disponga cualquiera de esas ciudades. Dado que la compañía es nueva y no dispone de mucho capital, pretende que esta conexión se realice de la manera más económica posible. Encuentre dicha manera, sabiendo que los costes de conexión vienen dados en millones de pesetas por el siguiente esquema.

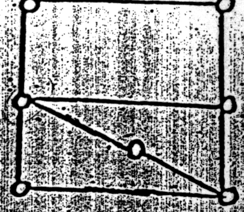


Calcule además el coste total de la inversión que la compañía deberá realizar.

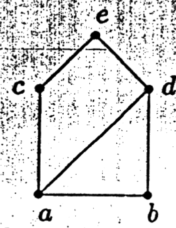
11 Los vértices a,b,...,h en el siguiente dibujo representan ocho ciudades con las distancias que aparecen en el dibujo. Construye un árbol de longitud total mínima que conecte todas las ciudades.

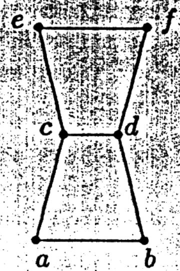


X 12 ¿Es el siguiente grafo bipartido?. Si es así, encuentra sus subconjuntos complementarios de vértices.



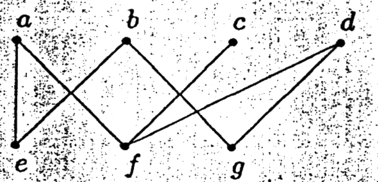
13 *Estudie si los siguientes grafos son bipartidos o no. Caso de ser bipartidos, encuentre una bipartición de los mismos.*



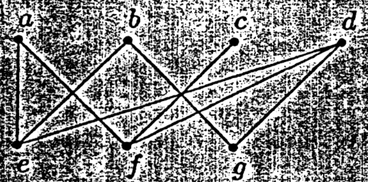


Estudie si en los grafos que resultaran bipartidos existe algún apareamiento, y si existe, escríbalo.

14 *Demuestre que el siguiente grafo bipartido verifica la condición t y la condición de diversidad. Encuentre un apareamiento.*

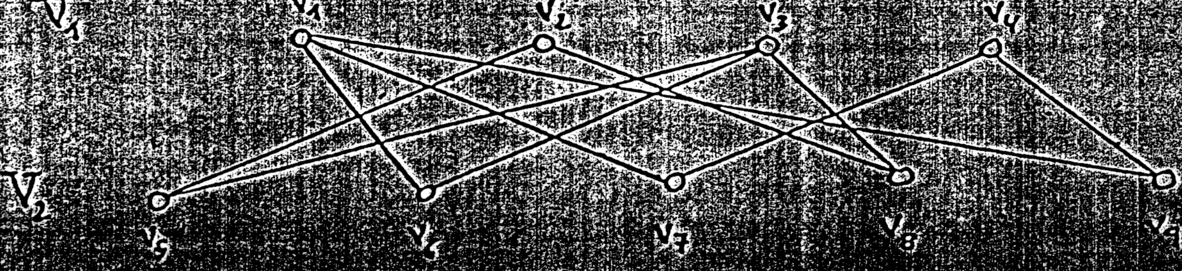


15 *Pruebe que el siguiente grafo bipartido admite un apareamiento de V_2 a V_1, en donde $V_1 = \{a, b, c, d\}$ y $V_2 = \{e, f, g\}$, y sin embargo no verifica la condición t.*

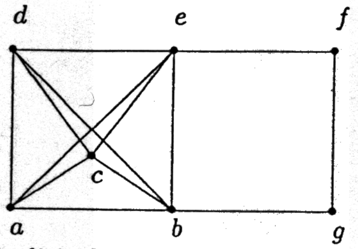


16 *Para el siguiente grafo bipartido:*

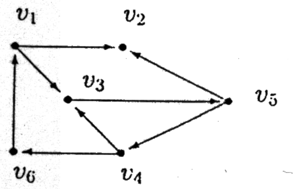
1. *Verifica que la "condición t" se satisface.*
2. *Verifica que la "condición de diversidad" se satisface.*
3. *Construir un apareamiento de V_1 a V_2.*



17 *Demuestre que el siguiente grafo no es plano.*



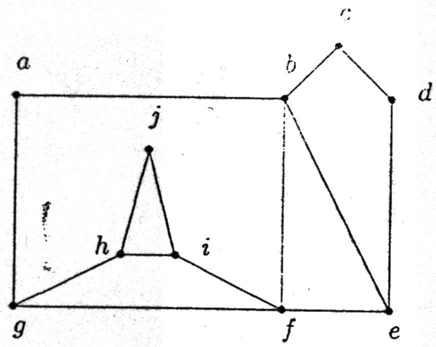
18 *Considérese el siguiente gràfo dirigido:*



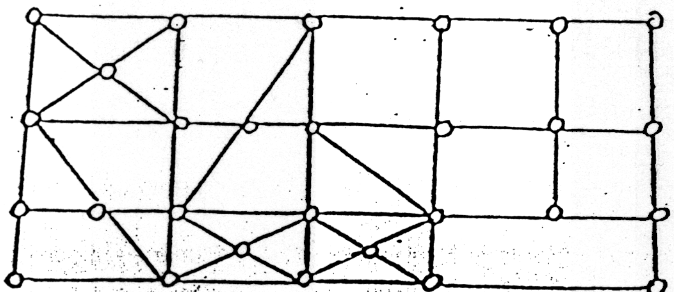
a) Calcule la matriz de adyacencias del grafo (observe que ésta no es simétrica).

b) Calcule el número de caminos dirigidos de longitud 6 que unen el vértice v_1 con el vértice v_4, y el número de caminos dirigidos de longitud 6 que unen el vértice v_4 con el vértice v_1. Calcule además el número de caminos dirigidos cerrados de longitud 6 que conectan v_5 con v_5.

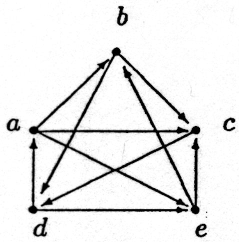
19 *Dirija el grafo que se da a continuación, de manera que desde cada vértice se pueda llegar a cualquier otro vértice por medio de un camino dirigido.*



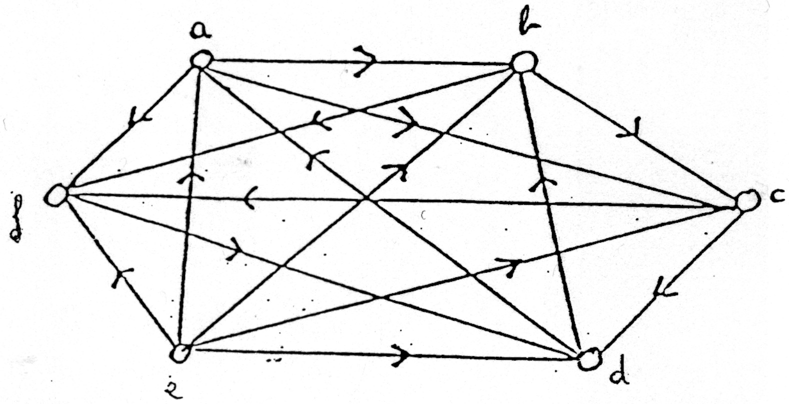
20 *El siguiente grafo muestra un mapa de calles de una urbanización. Dar a cada calle una dirección de modo que todo vértice pueda conectarse a otro.*



21 ***Encuentre un camino extensión propio en el grafo dirigido G que se da a continuación.***



22 *Encuentra un camino extensión propio en el siguiente "torneo" (un torneo es un grafo dirigido completo).*



23 *Sea* $G=(V,E)$ *un grafo no dirigido con:*

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$,

$E=\{\{v_1,v_2\},\{v_1,v_3\},\{v_1,v_4\},\{v_2,v_5\},\{v_2,v_6\},\{v_3,v_5\},\{v_3,v_7\},$
$\{v_4,v_6\},\{v_4,v_7\},\{v_5,v_8\},\{v_6,v_8\},\{v_7,v_8\}\}$.

a) Comprobar que G *es un grafo plano.*

b) Demostrar que G *no es un grafo de Euler pero su dual* $\tilde{G}$ *sí. Encontrar un camino cerrado de Euler en* $\tilde{G}$.

c) Demostrar que G *es un grafo bipartido y encontrar un apareamiento entre los dos subconjuntos complementarios de vértices de* G*. ¿Es* $\tilde{G}$ *bipartido ?.*

d) Teniendo en cuenta b), ¿es G *un grafo autodual?.*

c) Utilizando el teorema del número de caminos, ¿tiene G *algún camino cerrado de longitud tres?.*

24 *Sea* $G=(V,E)$ *un grafo no dirigido con:*

$V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5,v_6,v_7,v_8\}$,

$E=\{\ \{v_1,v_6\},\{v_1,v_7\},\{v_2,v_6\},\{v_2,v_8\},\{v_3,v_7\},\{v_3,v_8\},\{v_4,v_7\},$
$\{v_4,v_8\},\{v_5,v_7\},\{v_5,v_8\}\}$.

Todas las respuestas deben ser razonadas.

a) Estudiar si G *es un grafo de Euler. En caso afirmativo, encontrar, un camino cerrado de Euler en* G.

b) Estudiar si G *es un grafo bipartido. En caso afirmativo estudiar si* G *admite un apareamiento (según el orden de los subconjuntos complementarios de vértices).*

c) ¿Tiene G *algún camino cerrado de longitud tres?, (responder a la pregunta utilizando el apartado b)).*

d) Si asociamos al lado $\{v_i,v_j\}$ *el coste* $e_{ij}=|i-j-1|$*, encontrar un subgrafo economía para* G.