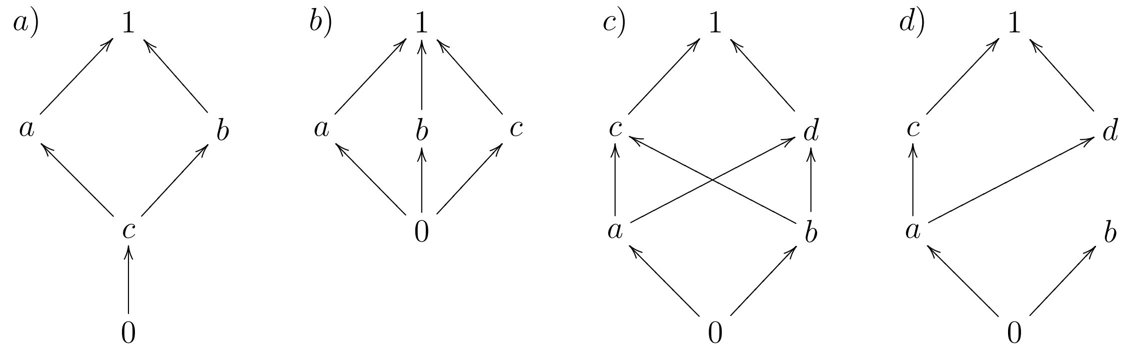
Relación 5: Retículos y álgebras de Boole.

1) Demostrar que todo retículo finito tiene cero y uno.

2) Sea G un grupo y $\mathcal{L}(G) = \{H \,/\, H \leq G\}$ el conjunto de todos los subgrupos de G. Demostrar que $\mathcal{L}(G)$ es un retículo si se definen $\sqcap$ y $\sqcup$ de la forma $H \sqcap K = H \cap K$ y $H \sqcup K =< H \cup K >$ para cualesquiera H, $K \in \mathcal{L}(G)$.

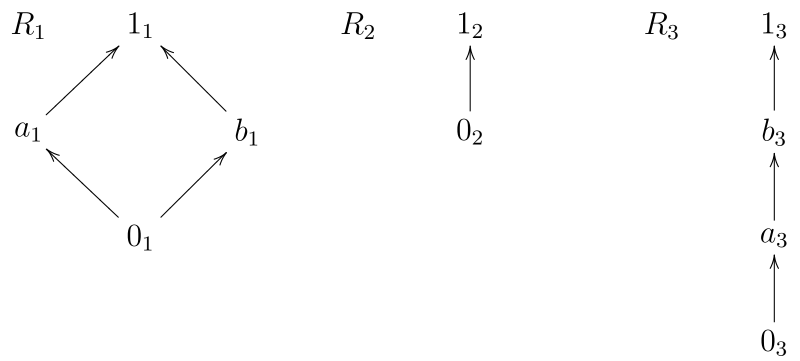
3) Estudiar si los siguientes conjuntos ordenados son retículos, y en los casos en que lo sean, escribir sus tablas de operaciones.



4) Demostrar que se verifican las siguientes relaciones para cualquier retículo $(R, \leq)$, $\forall\, a, b, c \in R$.
a) $b \leq c \Rightarrow a \sqcap b \leq a \sqcap c$, $a \sqcup b \leq a \sqcup c$.
b) $(a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) \leq a \sqcap (b \sqcup c)$.
c) $c \leq a \Rightarrow (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcup c \leq a \sqcap (b \sqcup c)$.

5) Estudiar si los siguientes subconjuntos son subretículos de los retículos que se especifican:
a) Para cualquier retículo R, cualquier subconjunto con con sólo un elemento.
b) Para cualquier retículo R y cualesquiera par de elementos $x, y \in R$ con $x \leq y$, el subconjunto $\{z \in R \,/\, x \leq z \leq y\}$.
c) Para el conjunto de las partes de un grupo G, $\mathcal{P}(G)$, el subconjunto de subgrupos de G, $\mathcal{L}(G)$.

6) Sean R_1, R_2, R_3 tres retículos con diagrama de Hasse:



Estudiar si las siguientes aplicaciones son homomorfismos de retículos:
$a)$ $f : R_1 \to R_2$, $f(0_1) = f(a_1) = f(b_1) = 0_2$, $f(1_1) = 1_2$.
$b)$ $g : R_1 \to R_2$, $g(1_1) = g(a_1) = g(b_1) = 1_2$, $g(0_1) = 0_2$.
$c)$ $h : R_1 \to R_3$, $h(0_1) = 0_3$, $h(a_1) = a_3$, $h(b_1) = b_3$, $h(1_1) = 1_3$.
$d)$ $t : R_2 \to R_3$, $t(0_2) = 0_3$, $t(1_2) = b_3$.

7) Demostrar que en cualquier álgebra de Boole B se verifican las leyes de De Morgan, para todo $x, y \in B$:

$$(x \sqcap y)' = x' \sqcup y', \qquad (x \sqcup y)' = x' \sqcap y'.$$

8) Probar que en un álgebra de Boole se verifica que:
$a)$ $\forall x, y \in B \ x \leq y \Leftrightarrow y' \leq x'$.
$b)$ $\forall x, y \in B \ x \leq y \Leftrightarrow x \sqcap y' = 0 \Leftrightarrow x' \sqcup y = 1$.

9) Sea $f : B_1 \longrightarrow B_2$ un homomorfismo booleano. Probar que:
$a)$ $f(0_1) = 0_2$, $f(1_1) = 1_2$.
$b)$ $\forall x, y \in B_1 : x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

10) Se considera el conjunto $A = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ y el orden en A dado por el grafo siguiente: $\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (f, f), (g, g), (h, h), (a, b), (a, c), (a, d),$ $(a, e), (a, f), (a, g), (a, h), (b, e), (b, f), (b, h), (c, f), (c, h), (d, g), (d, h), (e, h), (f, h), (g, h)\}$

$a)$ Estudiar si:
- A es un retículo.
- A es un retículo modular.
- A tiene tres subconjuntos de cardinal mayor que dos y que son álgebras de Boole con el orden inducido por A.

$b)$ Para los subconjuntos de A: $B = \{a, b, c, f\}$, $D = \{a, e, d, g, h\}$, $E = \{b, e, f\}$ y $F = \{a, c, d\}$ con el orden inducido por A, estudiar cuál de estos subconjuntos es:
- un subretículo de A.
- un álgebra de Boole.
- un retículo distributivo.
- un retículo complementado.

11) Sea el retículo de subgrupos de $(\mathbb{Z}_48, +)$. Dibujar el diagrama de Hasse de este retículo y estudiar si es modular, distributivo o complementado.

12) $a)$ Sea $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ un conjunto con tres elementos. Demostrar que el conjunto ordenado $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ es un álgebra de Boole. ¿Cuáles son los átomos de $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$?.

$b)$ Sea $D(30)$ el conjunto de los divisores de 30. Demostrar que $D(30)$ con la relación de divisibilidad es un álgebra de Boole isomorfa a $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$. Calcular los átomos de $(D(30), \cdot|\cdot)$.

16) Razonar la veracidad o falsedad (mediante contraejemplos cuando sea necesario) de las siguientes afirmaciones:
a) Todo retículo modular es distributivo.
b) Existen álgebras de Boole con siete elementos.
c) El retículo pentágono es un álgebra de Boole.
d) Todo retículo finito es bien ordenado.