RELACIÓN 3

Polinomios

1. Prueba que $\mathbb{Z}_p$ es un cuerpo si p es primo.
2. Prueba que $M_2(\mathbb{Z})$ y $\mathbb{Z}[i]$ son anillos.
3. Sean $f(x) = x^6 + 3x^5 + 4x^2 - 3x + 2$ y $g(x) = x^2 - 2x - 3$. Calcula $q(x)$ y $r(x)$ en $\mathbb{Z}_7[x]$ tales que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$.
4. Calcula en $\mathbb{Q}[x]$ el m.c.d., $d(x)$, y $u(x)$ y $v(x)$ tales que $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$ para $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 8x - 4$ y $g(x) = x^3 - 3x^2 + 4$.
5. Calcula en $\mathbb{Z}_5[x]$ el m.c.d., $d(x$ de $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x + 2$ y $g(x) = x^2 + 4x + 3$, así como $u(x)$ y $v(x)$ tales que $d(x) = f(x)u(x) + g(x)v(x)$ en $\mathbb{Z}_5[x]$.
6. Calcula un polinomio $p(x)$
   (a) que pertenezca a $\mathbb{Z}_7[x]$ y tal que $p(0) = 2$, $p(1) = 3$ y $p(4) = 2$
   (b) que pertenezca a $\mathbb{Z}_5[x]$ y tal que $p(0) = 1$, $p(1) = 2$, $p(2) = 4$ y $p(3) = 0$.
7. Estudia la irreducibilidad en $\mathbb{Z}[x]$ de
   (a) $x^2 - 12$
   (b) $8x^3 + 6x^2 - 9x + 24$
   (c) $4x^{10} - 9x^3 + 24x - 15$
   (d) $2x^{10} - 25x^3 + 10x^2 - 30$
8. Estudia la irreducibilidad sobre $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ y $\mathbb{Z}_3[x]$ de
   (a) $x^2 + x + 1$
   (b) $2x^5 - 6x^3 + 9x^2 - 15$
   (c) $x^5 + x + 2$
9. Factoriza sobre $\mathbb{Z}_3[x]$ y $\mathbb{Z}_5[x]$
   (a) $x^6 + 2x^5 + 2x^4 + 2x^3 + x^2$
   (b) $x^4 + 5x^3 + 9x^2 + 8x + 4$