TEMA 3. GRUPOS DE PERMUTACIONES

1 *Hallar un subgrupo de orden dos del grupo* $G = \{e, \lambda, \mu, \gamma\}$ *que tiene como tabla de multiplicación:*

	e	λ	μ	γ
e	e	λ	μ	γ
λ	λ	μ	γ	e
μ	μ	γ	e	λ
γ	γ	e	λ	μ

2 *Demostrar que el grupo* $G = \left\{(\overline{n}, \overline{m}) \ : \ \overline{n} \in \mathbb{Z}_2, \ \overline{m} \in \mathbb{Z}_5\right\}$ *con la operación suma, es cíclico.*
Observación: Los pares de clases se suman de la manera obvia, es decir, $(\overline{n}, \overline{m}) + (\overline{k}, \overline{l}) = (\overline{n+k}, \overline{m+l})$.

3 *Hallar razonadamente un subgrupo de orden tres de* $\mathbb{Z}_{342}$.

4 *Comprobar que el grupo* $\mathbb{Z}_9^* = \left\{\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{7}, \overline{8}\right\}$ *es cíclico (con la multiplicación). Demostrar que*

$$\phi : (\mathbb{Z}_6, +) \longrightarrow (\mathbb{Z}_9^*, \times) \qquad \overline{x} \longrightarrow \overline{(4^x)}$$

es un homomorfismo pero no un isomorfismo, y sin embargo $(\mathbb{Z}_6, +) \cong (\mathbb{Z}_9^*, \times)$.

5 *Demostrar que* $\phi : \mathbb{Z}_8 \longrightarrow \mathbb{Z}_8$ *dado por* $\phi(\overline{x}) = \overline{2x}$ *es un homomorfismo de grupos pero no un isomorfismo.*

6 *Sea* $5\mathbb{Z}$ *el grupo formado por los múltiplos de 5. Estudiar si* $\phi : 5\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ *definido por* $\phi(m) = \overline{m}^2$*, es un homomorfismo. En caso afirmativo hallar su núcleo.*

7 *Si* $\sigma, \tau \in S_{10}$ *cumplen que* $\sigma\tau$ *tiene orden 5, ¿cuál es el orden de* $\tau\sigma$*?*

8 *Encontrar, si existe, un elemento de* S_5 *de orden 6. Encontrar, si existe, un elemento de orden 5 en* S_3.

9 *Calcula en* S_5 *el inverso, el orden y la signatura de la siguiente permutación:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

10 *Dada la permutación siguiente*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 8 & 11 & 9 & 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

descomponerla como producto de ciclos disjuntos y como producto de transposiciones. Calcular sig(σ) *(signatura de* σ*), ord*(σ) *(orden de* σ*) y* σ^{451}.

11 *Determina el grupo de simetrías de un pentágono regular,* D_5*. Encuentra dos generadores para* D_5*. Demuestra que* D_5 *es isomorfo a un subgrupo de* A_5.

12 *Sean*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 8 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 8 & 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular $(\sigma\,\tau)^{16}$.

13 *Sea* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 5 & 1 & 6 & 2 & 7 & 8 & 9 & 4 \end{pmatrix}$. *Calcular* σ^{50} *descomponiendo* σ *en producto de ciclos disjuntos.*

14 *Sean* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 8 & 7 & 2 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ *y* $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 1 & 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

i) Calcular el orden de σ *y de* τ.

ii) Hallar la signatura de $\left(\sigma^{14}\tau^2\sigma^{1997}\right)^{1421997}$.

iii) Hallar $(\sigma\tau)^{61}$.

15 *Sean* $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 4 & 7 & 6 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$. *Calcular el orden y la signatura de* σ, τ^{101} *y* $\tau\sigma$.

16 *Decidir si* $\mathcal{R}_1$ *y* $\mathcal{R}_2$ *son relaciones de orden de equivalencia o ninguna de las dos cosas en los conjuntos que se indican:*

i) En $\mathbb{Z}$, $n\mathcal{R}_1 m \Leftrightarrow g(n) \leq g(m)$ *donde* $g(n) = \frac{n+1}{2n+1}$.

ii) En S_3, $\sigma\mathcal{R}_2\tau \Leftrightarrow (\sigma\tau^{-1})^2 = Id$.

17 *Sean*

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 7 & 2 & 8 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 9 & 8 & 2 & 6 & 1 & 3 & 7 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular σ^n *donde* n *es el orden de* τ.

18 *Seis tahúres se reúnen a jugar con una baraja de 40 cartas. Como ninguno se fía de los otros al barajar, deciden hacerlo de la siguiente extraña manera: Dividen el mazo (cortando) en seis montones y cada tahúr pasa la carta superior de su montón a la parte de abajo. Después colocan todos los montones tal como estaban formando el mazo. Tras repetir este proceso cierto número de veces, una persona ajena a la partida comprueba que las cartas no están marcadas y dice: "¡Tanta complicación y todas las cartas excepto dos están en la misma posición que al principio!" Demostrar que alguien ha hecho trampas.*

19 *a) Calcular los elementos del grupo de isometrías de un pentágono regular* D_5, *expresándolos en notación ciclo. Demostrar que* D_5 *está generado por dos elementos.*
b) Dada la permutación siguiente

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 7 & 5 & 6 & 1 & 8 & 11 & 9 & 10 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

descomponerla como producto de ciclos disjuntos y como producto de transposiciones. Calcular sig(σ) *(signatura de* σ*), ord*(σ) *(orden de* σ*) y* σ^{451}.

20 *¿Cuántos elementos hay en* S_4*, en* A_4 *y en* D_4*?. ¿Cuántas transposiciones hay en* A_4*?.*

21 *Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*
i) Para toda permutación $\sigma \in S_{121}$ *se cumple que* σ^{121} *es par.*

ii) Si $n_1, n_2, n_3 \in I\!N$ *cumplen* $mcd(n_1, n_2, n_3) = 1$ *entonces* $mcd(n_1, n_2) = 1$ *y* $mcd(n_2, n_3) = 1$.

iii) El grupo $G = \{\gamma, \beta, \alpha, \delta\}$ *cuya tabla de multiplicación se indica, es cíclico.*

	γ	β	α	δ
γ	γ	β	α	δ
β	β	γ	δ	α
α	α	δ	β	γ
δ	δ	α	γ	β

iv) El número $77726^6 - 1$ *es primo.*

v) Si $A, B \subset I\!R$ *entonces* $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.

22 *Decir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*
i) El número $n^2 + 8n + 15$ *no es primo para ningún* $n \in I\!N$.

ii) En $I\!R$ *no existe ninguna relación que sea a la vez de orden y de equivalencia.*

iii) En S_4 *sólo hay 6 elementos de orden 2.*

iv) Si p *es primo entonces* p *divide a* $2^{p^2} - 2$.