TEMA 2. NÚMEROS NATURALES Y ENTEROS

1 *Si* $a > 1$, *pruébese por inducción que* $\sum_{i=1}^{n} a^i + 1 = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$.

2 *Demuéstrense por inducción las siguientes proposiciones:*
a) $\frac{1}{3}(n^3 + 2n) \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}$.

b) $n < 2^n\ \forall n \in \mathbb{N}$.

3 *Pruebe las siguientes afirmaciones:*
a) $\sum_{i=1}^{n}(2i - 1) = n^2$
b) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
c) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$
d) Si C *es un númro real,* $c \geq -1$, *entonces* $(1 + c)^n \geq 1 + nc$.

4 *Calcular, para* $n > 1$, *mcd(4n+1, 2n).*

5 *a) Si* $a, b \in \mathbb{N}$ *y son impares, pruébese que* $2|(a^2 + b^2)$, *pero* $4\not|(a^2 + b^2)$.
b) Sea $n \in \mathbb{N}$. *Si* n *es compuesto, pruébese que existe un primo* p *tal que* $p|n$ *y* $p \leq \sqrt{n}$.

6 *i) Sea* A *el conjunto de primos mayores que* 5, $A = \{7, 11, 13, \ldots\}$. *Demostrar que* $(n_1, n_2)\mathcal{R}_1(m_1, m_2) \Leftrightarrow n_1n_2 = m_1m_2$ *es una relación de equivalencia en* $A \times A$ *y hallar las clases.*
ii) Estudiar si $\overline{x}\mathcal{R}_2\overline{y} \Leftrightarrow \overline{x}^2 = \overline{y}^2$ *es un relación de equivalencia en* $\mathbb{Z}_7^*$ *y en caso afirmativo hallar las clases.*

7 *Comprobar que la función* $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$, $f(n) = n^2 + 2n$ *no es biyectiva. Considérese en* $\mathbb{Z}$ *la relación definida por*

$$n\mathcal{R}m \ \Leftrightarrow\ 3 \textit{ divide a } f(n) - f(m).$$

Demostrar que $\mathcal{R}$ *es una relación de equivalencia y hallar la clase de* -1.

8 *Definimos en* $A = \{2, 4, 6, 12, 20\}$ *la relación de orden* $n\mathcal{R}m \Leftrightarrow n$ *divide a* m. *Calcular los elementos maximales y minimales diciendo si son máximos o mínimos.*

9 *Razonar que el teorema de Bezout garantiza la existencia de inverso en* $\mathbb{Z}_m$ *para [a] siendo a y m coprimos.*

10 *¿Cuales son los invertibles de* $\mathbb{Z}_6$*?. ¿Y de* $\mathbb{Z}_5$*?.*

11 *Probar que todo número entero al cuadrado es congruente con 0, 1 o 4, módulo 8.*

12 *Calcular la solución general del sistema de congruencias siguiente:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & \equiv_7 & 4 \\ 2x & \equiv_3 & 1 \\ 5x-4 & \equiv_{11} & 2 \end{array}\right.$$

13 *¿Por qué el sistema de congruencias siguiente no tiene ninguna solución positiva entre los cien primeros números naturales (es decir, entre 1 y 100)?:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & \equiv_3 & 0 \\ x & \equiv_5 & 0 \\ x & \equiv_7 & 0 \end{array}\right.$$

14 *Calcular la menor solución positiva del sistema de congruencias siguiente, COMPROBANDO LA SOLUCIÓN:*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & \equiv_7 & 4 \\ 2x & \equiv_3 & 1 \\ 5x-4 & \equiv_{11} & 2 \end{array}\right.$$

15 *Para abonar una factura de* 403 *pts se entregan dólares y dan la vuelta en francos. Calcular los francos que se devuelven y los dólares entregados, siendo éstos los menores posibles. Un dólar* = 60 *pts y un franco* = 11*pts. (Solución:* 8 *dólares,* 7 *francos).*

16 *El diámetro de una moneda de* 5 *pts es de* 37*mm y el de una pts de* 23*mm. ¿ De cuántas maneras puede obtenerse la longitud de un metro, alineando monedas de* 5 *y* 1 *peseta?. (No influye la colocación de estas monedas para obtener la longitud del metro). (Solución:* 9 *monedas de* 5 *pts,* 29 *monedas de* 1 *pts).*

17 *En una clase de* 100 *alumnos el número de chicos es divisible por 13 y el de chicas es divisible por 8. Si cada chica escoge a un chico distinto como novio, ¿cuántos chicos se van a quedar sin novia?*

18 *Hallar en cada caso números enteros* n *y* m *que satisfagan las ecuaciones en los rangos que se indican.*

i) $33n + 20m = 2$, $1 < n < 20$.

ii) $n \equiv_5 1$, $n \equiv_{11} 8 \quad 1 < n < 55$.

iii) $2^{147} + 73001^{2222} + 2^{74} \cdot 74^2 \equiv_{73} n, \quad 0 \leq n < 73$.

19 *Sabiendo que* 113 *es primo, estudiar si divide a*

$$7^{226} + 3^{115} + 2^{226} \cdot 5^{113} + 17^{113} + 113113.$$

20 *Sabiendo que* 101 *es primo, hallar el resto que se obtiene al dividir* 5^{103} *entre* 101.

21 *Hallar el resto que se obtiene al dividir*
a) $4^{59} + 28! + (30!)^9 - 5$ *entre* 29,
b) $4^{63} + 30! + (32!)^8 - 1$ *entre* 31,
c) $3^{47} + 22! + (24!)^9 - 3$ *entre* 23.

22 *Hallar todas las soluciones enteras de*
a) $11x + 8y = 5$, *b)* $19x + 8y = 2$, *c)* $12x + 7y = 4$, *d)* $19x + 7y = 3$.

23 *Hallar un número natural que*
a) multiplicado por 30 deje resto 7 al dividir por 31;
b) multiplicado por 28 deje resto 3 al dividir por 29;
c) multiplicado por 36 deje resto 5 al dividir por 37;
d) multiplicado por 22 deje resto 3 al dividir por 23.

24 *Sea* $\{x \equiv_{m_i} a_i, \ i = 1, 2 \ldots, n\}$ *un sistema de* n *congruencias* $(n > 1)$ *en* $\mathbb{Z}$ *con* $(m_l, m_k) = 1$ *para todo* l, k *en* $\{1, 2, \ldots, n\}$, $l < k$. *Demostrar por inducción que el sistema posee una solución particular de la forma:* $x_0 = \sum_{i=1}^{n} t_i a_i$, *con* t_i *en* $\mathbb{Z}$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.