

Control automático con herramientas interactivas

Control automático con herramientas interactivas

José Luis Guzmán Sánchez

(Profesor Titular de Ingeniería de Sistemas y Automática - UAL)

Ramón Costa Castelló

(Profesor Titular de Ingeniería de Sistemas y Automática - UPC)

Manuel Berenguel Soria

(Catedrático de Ingeniería de Sistemas y Automática - UAL)

Sebastián Dormido Bencomo

(Catedrático de Ingeniería de Sistemas y Automática - UNED)

PEARSON

UNED

CONTROL AUTOMÁTICO CON HERRAMIENTAS INTERACTIVAS

*José Luis Guzmán Sánchez, Ramón Costa Castelló,
Manuel Berenguel Soria, Sebastián Dormido Bencomo*

PEARSON EDUCACIÓN, S.A., Madrid, 2012

ISBN: 978-84-8322-750-3

ISBN UNED: 978-84-362-6434-0

Materia: 681.5 Control automático (Ingeniería)

Formato: 195 × 250 mm. Páginas: 280

Cualquier forma de reproducción, distribución, comunicación pública o transformación de esta obra sólo puede ser realizada con la autorización de sus titulares, salvo excepción prevista por la ley. La infracción de los derechos mencionados puede ser constitutiva de delito contra la propiedad intelectual (arts. 270 y sgts. Código penal).

Diríjase a CEDRO (Centro Español de Derechos Reprográficos -www.cedro.org), si necesita fotocopiar o escanear algún fragmento de esta obra.

Todos los derechos reservados.

© 2012 PEARSON EDUCACIÓN S.A.

Ribera del Loira, 28
28042 Madrid (España)

ISBN: 9788483227503

Deposito Legal:

Equipo de edición:

Editor: Miguel Martín-Romo

Técnico editorial: Esther Martín

Equipo de diseño:

Diseñador: Elena Jaramillo

Técnico de diseño: Irene Medina

Equipo de producción:

Directora: Marta Illescas

Coordinadora: Tini Cardoso

Diseño de cubierta: Copibook, S. L.

Composición: Los autores

Impreso por:

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN

Este libro incluye enlaces a sitios web cuya gestión, mantenimiento y control son responsabilidad única y exclusiva de terceros ajenos a PEARSON EDUCACIÓN, S.A. Los enlaces u otras referencias a sitios web se incluyen con finalidad estrictamente informativa y se proporcionan en el estado en que se encuentran en el momento de publicación sin garantías, expresas o implícitas, sobre la información que se proporcione en ellas. Los enlaces no implican el aval de PEARSON EDUCACION S.A a tales sitios, páginas web, funcionalidades y sus respectivos contenidos o cualquier asociación con sus administradores. En consecuencia, PEARSON EDUCACIÓN S.A., no asume responsabilidad alguna por los daños que se puedan derivar de hipotéticas infracciones de los derechos de propiedad intelectual y/o industrial que puedan contener dichos sitios web ni por las pérdidas, delitos o los daños y perjuicios derivados, directa o indirectamente, del uso de tales sitios web y de su información. Al acceder a tales enlaces externos de los sitios web, el usuario estará bajo la protección de datos y políticas de privacidad o prácticas y otros contenidos de tales sitios web y no de PEARSON EDUCACION S.A.

Este libro ha sido impreso con papel y tintas ecológicos

A Aurelia (J.L. Guzmán)
A Marta y Belén (R. Costa)
A Mari Paz (M. Berenguel)
A María Antonia (S. Dormido)

Índice general

Prólogo	III
Prefacio	VII
Página web del libro	X
Agradecimientos	X
Nomenclatura	XI
Introducción	XI
Diagrama de bloques básico y señales asociadas	XII
Variables y parámetros	XIII
Funciones	XV
Otros símbolos	XVI
Símbolos interactivos	XVI
1. Introducción	1
Introducción	1
1.1 El proceso de Bolonia: Alcance y objetivos	2
1.2 Qué entendemos por visualización	3
1.3 El papel de la visualización en la enseñanza del control automático	5
1.4 Qué entendemos por interactividad	5
1.5 El papel de la interactividad en la enseñanza del control automático	7
1.6 Objetivos del libro: Componentes y estructuras de las herramientas interactivas	8
2. De los modelos físicos no lineales a los modelos lineales	19
Introducción	19
2.1 El sistema de un tanque	22
3. Respuesta temporal	29
Introducción	29
3.1 Respuesta temporal de los sistemas lineales de primer orden de tiempo continuo sin ceros	32
3.2 Respuesta temporal de los sistemas lineales de segundo orden de tiempo continuo sin ceros	38
3.3 Efecto de un cero en la respuesta temporal de sistemas lineales de primer orden de tiempo continuo	48
3.4 Efecto de un cero en la respuesta temporal de sistemas lineales de segundo orden de tiempo continuo	53
3.5 Respuesta temporal de sistemas lineales genéricos de tiempo continuo	59
3.6 Dominancia en el dominio temporal	66

II · Índice general

3.7	Ajuste de modelos en el dominio temporal	70
4.	Respuesta en frecuencia	77
	Introducción	77
4.1	Concepto de respuesta en frecuencia	78
4.2	Respuesta en frecuencia de los sistemas lineales de primer orden de tiempo continuo sin ceros	88
4.3	Respuesta en frecuencia de los sistemas lineales de segundo orden de tiempo continuo sin ceros	93
4.4	Efecto de un cero en la respuesta en frecuencia de sistemas lineales de primer orden de tiempo continuo	99
4.5	Efecto de un cero en la respuesta en frecuencia de sistemas lineales de segundo orden de tiempo continuo	103
4.6	Respuesta en frecuencia de sistemas lineales genéricos de tiempo continuo	106
4.7	El desfase en sistemas de fase no mínima	113
4.8	Ajuste de modelos en el dominio de la frecuencia	119
5.	Relación de los parámetros de los modelos con los modelos físicos	123
	Introducción	123
5.1	El sistema de un tanque II	123
6.	Sistemas en lazo cerrado y estabilidad	127
	Introducción	127
6.1	El lugar de las raíces	131
6.2	El criterio de Nyquist	139
6.3	Diagramas de Bode: Margen de fase y margen de ganancia	144
6.4	Limitaciones impuestas por el tiempo de retardo en sistemas en lazo cerrado	151
7.	Diseño de sistemas de control	155
	Introducción	155
7.1	Errores en estado estacionario en sistemas de control con realimentación unitaria	157
7.2	Redes de avance y retraso de fase	163
7.3	Control Proporcional, Integral y Derivativo (PID)	167
7.4	Diseño de controladores de retraso de fase en el dominio frecuencial	177
7.5	Diseño de controladores de avance de fase en el dominio frecuencial	184
7.6	Diseño de controladores de avance y retraso de fase en el dominio frecuencial	189
7.7	Diseño de controladores de retraso de fase en el lugar de las raíces	193
7.8	Diseño de controladores de avance de fase en el lugar de las raíces	198
7.9	Control PI de sistemas de primer orden sin tiempo de retardo por el método de asignación de polos	206
7.10	Control PI de sistemas de primer orden sin tiempo de retardo por el método de cancelación de polos	211
7.11	Control PID basado en las reglas de Ziegler-Nichols en lazo abierto	215
8.	Control de sistemas físicos	223
	Introducción	223
8.1	El sistema de un tanque III	224
9.	Introducción al control en el espacio de estados	227
	Introducción	227
9.1	Espacio de Estados	229
	Bibliografía	245
	Índice alfabético	247

Prólogo

El ingeniero, cuando diseña o proyecta un ingenio, se auxilia de una representación de ese sistema que le sirve de ayuda en el propio proceso de concepción al permitirle un “diálogo” con lo que está imaginando. Por ello, la geometría en general, y el dibujo en particular, han estado entre las herramientas clásicas de todo ingeniero, que le han permitido tener imágenes aproximadas de aquello que aún no existe, pero que, gracias a su labor, acabará existiendo. Tanto edificios y obras públicas como máquinas se han beneficiado de las representaciones gráficas para su proyecto. De este modo, las imágenes han sido una herramienta básica en la actividad del ingeniero. Sin embargo, el recurso a la geometría se restringe a concepciones estáticas, y no a las dinámicas en las que el tiempo se convierte en una dimensión esencial y que, como se verá más abajo, son las propias del ingeniero de control, por lo que el estudiante que se inicia en esa rama de la ingeniería debe familiarizarse con el comportamiento temporal.

Si dirigimos la mirada a los sistemas realimentados, el problema con la realimentación es que, pese a la simplicidad del principio en el que se basa, su puesta en práctica puede producir problemas de inestabilidad, ya que se trata de una cadena causal circular, lo que unido a los inevitables retrasos e inercias a lo largo de la cadena tiende a producir perniciosos efectos oscilatorios, en forma de transitorios indeseables. Precisamente una de las labores genuinas del ingeniero de control es someter esos transitorios a especificaciones adecuadas. Pero, como es patente, estos procesos se propagan en el tiempo por lo que inevitablemente se requiere, para un estudio adecuado de los sistemas realimentados, disponer de herramientas que permitan manejarse con comodidad y eficacia en ese dominio. En un principio, se emplearon técnicas que podríamos llamar indirectas, en el sentido de que lo que se estudiaba eran características matemáticas de los transitorios, como los autovalores de la forma linealizada en torno al punto de operación, con los que se determinaba la estabilidad relativa del sistema. Este hecho empezó a investigarse sistemáticamente en el siglo XIX, empleando para ello métodos algebraicos.

Los métodos de análisis de los sistemas realimentados alcanzaron su madurez en el XX, especialmente con los trabajos en los Laboratorios Bell, en cuya nómina figuraba el ingeniero de telecomunicación Harold Black, que concibió el amplificador de realimentación negativa para compensar la pérdida de calidad en la transmisión a distancia de señales eléctricas por las líneas telefónicas. Este dispositivo electrónico fue objeto de un estudio sistemático mediante métodos en el dominio de la frecuencia, con los que estaban familiarizados los ingenieros de telecomunicación. Con estos métodos se obtuvo una solución general al problema del diseño de sistemas realimentados, que permitía calcular los elementos de compensación necesarios para que el sistema cumpliera unas determinadas especificaciones. Pero estos métodos se desarrollaban en el dominio de la frecuencia, por lo que tuvieron que interpretarse

en ese dominio las especificaciones en el dominio del tiempo de una forma que no era intuitiva. No obstante, la flexibilidad y posibilidades que ofrecían los métodos frecuenciales hicieron que finalmente acabaran imponiéndose incluso en ámbitos en los que la interpretación en el dominio de la frecuencia resultaba un tanto forzada. Además se limitaban al estudio de sistemas lineales por lo que su ámbito de aplicación era restringido. No obstante, su éxito fue crucial para la consolidación de los métodos de diseño de sistemas realimentados y para la génesis de la propia ingeniería de control.

En todo caso, la aparición de oscilaciones, atenuadas o no, inherentes a la introducción de la realimentación convierte a los transitorios en un factor distorsionador del comportamiento esperado. Y estos transitorios se desenvuelven en el dominio del tiempo, por lo que es a ese dominio al que debe recurrirse en última instancia cuando se acomete el análisis y diseño de sistemas de control.

La llegada del ordenador hizo concebir que los procedimientos numéricos, ponderados como más exactos, sustituirían a los gráficos. Y ello influyó incluso en los planteamientos teóricos. De los métodos frecuenciales se pasó a las variables de estado, imbuidas de métodos basados en el álgebra matricial, cuya puesta en práctica implicaba el empleo de cálculos numéricos. Parecía que los métodos gráficos estaban destinados a desaparecer, reemplazados por los más precisos de tipo numérico. Sin embargo, aquellos métodos basados en imágenes se resistían a extinguirse porque poseían, por su propia naturaleza gráfica, un carácter intuitivo que facilitaba el proceso de diseño.

Felizmente los progresos en la informática han permitido que los tradicionales, y a veces engorrosos, métodos gráficos adquieran unas posibilidades insólitas para los ingenieros que en los años treinta, en los orígenes de los métodos de diseño de sistemas de control, no podían ni soñar y que las hubiesen recibido con alborozo. De este modo los métodos gráficos mediante ordenador han permitido que los métodos clásicos de diseño de sistemas realimentados recobren actualidad y pujanza.

Pero posiblemente la mayor influencia de los métodos informáticos en la concepción y diseño de sistemas de control la ha aportado la posibilidad de simular el comportamiento del sistema en el dominio del tiempo, además de permitir animaciones que complementan la mera evolución de las variables en el tiempo. Se abre así una vía esplendorosa para el estudio de sistemas de control. Esta es la vía que recorren con brillantez los autores de este libro que además se benefician de unos métodos “amigables” (cómodos y flexibles) de simulación interactiva que abren unas oportunidades insólitas para el estudiante de sistemas realimentados.

El resultado de las perspectivas que permiten estos nuevos métodos informáticos se hace patente en el libro que el lector tiene en sus manos, el cual presenta una exuberante exploración de esas oportunidades. Sus aportaciones son muy notables y constituyen una valiosa contribución para los que se inician en la ingeniería de control. El mundo de posibilidades que se despliegan en las páginas de este libro son ciertamente fascinantes, por lo que será muy bien recibido por los jóvenes que se adentran en el estudio del control por realimentación, que encontrarán en las páginas que siguen un cúmulo de atractivos medios informáticos para familiarizarse con los métodos tradicionales de control con suma facilidad y elegancia.

De este modo, el lector encontrará en este libro un conjunto de herramientas para su ordenador que le ayudarán a comprender los conceptos básicos relativos al estudio de los sistemas realimentados; y para ello dispondrá de una serie de ejemplos de dificultad progresiva con los que se ilustran esos conceptos mediante un aprendizaje basado en estos ejemplos.

Así, el estudiante que se forma en control automático mediante sistemas realimentados aprende y consolida los conceptos que progresivamente van apareciendo, interactuando con ayuda de potentes herramientas informáticas, con las que mediante el simple uso del ratón se pueden visualizar las distintas representaciones que se asocian al problema bajo estudio. Con ello se resuelve algo que era a la vez el sueño y la pesadilla de los que empleaban los métodos frecuenciales: el paso cómodo y eficiente del dominio frecuencia al del tiempo, y viceversa; y al tiempo que se comprueba fácilmente los comportamientos asociados a las posiciones de polos y ceros en el plano complejo. Asimismo se tienen animaciones que permiten vislumbrar el comportamiento temporal de los sistemas estudiados. Estas herramientas

interactivas se acompañan de unas fichas donde se explican los objetivos de aprendizaje, un resumen de la teoría asociada a dichos objetivos, las principales referencias bibliográficas, la descripción detallada de la herramienta interactiva y un listado de ejercicios orientados a que el alumno utilice esa herramienta interactiva en su resolución. Con ello, la obra se adapta al modelo pedagógico que propugna el Espacio Europeo de Educación Superior, que comporta considerables desafíos metodológicos incluso para el profesorado universitario. Entre estos desafíos destaca el de fomentar el aprendizaje autónomo de los estudiantes, con la asistencia activa de los profesores, para lo que el potencial del aprendizaje con medios informáticos (e-learning) adquiere enormes posibilidades.

Javier Aracil Santonja

Catedrático de Ingeniería de Sistemas y
Automática de la Universidad de Sevilla
Académico Numerario de la Real Academia
Española de Ingeniería

Prefacio

La culminación de un nuevo libro siempre provoca en sus autores un cierto sentimiento de alegría contenida al ver que el trabajo tantas veces planificado finalmente llega a su fin. En cierto sentido es como el corredor que avizora la meta después de superar los numerosos obstáculos que se le han ido poniendo en el camino. No importa lo pasado sino que el destino ya está en sus manos. Este texto no iba a ser una excepción a esta regla y después de los naturales vaivenes ha llegado a su puerto final. Estas líneas que aparecen en las primeras páginas del libro son en realidad las últimas que se han escrito.

Por este motivo nos ha parecido oportuno compartir con nuestros lectores con un cierto grado de complicidad la forma en como se gestó y por qué nos interesamos por este tema del estudio y aprendizaje del control automático mediante la utilización de *fichas interactivas*. Todos los autores provenimos del sector académico y como educadores estamos interesados en los retos que tiene planteado la educación en control. La idea de las “fichas interactivas” nos ha parecido un medio eficaz para que nuestros estudiantes aprendan y refuercen el aprendizaje de nuevos conceptos de control automático, comprendan las relaciones entre diferentes representaciones de un sistema dinámico y adquieran ciertas habilidades y destrezas que consideramos esenciales para conseguir una buena formación en esta materia.

El proyecto de “Herramientas Interactivas para la Educación en Control Automático” que se desarrolla en el Departamento de Control Automático de la Universidad de Lund, a mediados de los años noventa del siglo pasado, liderado por el Prof. K. J. Åström, ha servido de referencia a muchas de las ideas y conceptos que posteriormente iban a producirse en este campo. Las *ICTools*, como se conocían a este conjunto de herramientas, fueron implementadas en Matlab 5.3 y eran de libre distribución.

En abril de 2000, con ocasión de su investidura como Doctor Honoris Causa por la UNED, el Prof Åström visita Madrid y tenemos ocasión de mantener una conversación en profundidad sobre el papel que este tipo de herramientas interactivas puede tener para mejorar el aprendizaje de los conceptos básicos de un curso de control automático. Nos anima a trabajar en el tema y nos muestra algunas aplicaciones interactivas desarrolladas en un nuevo lenguaje denominado *Sysquake* que había sido desarrollado por Yves Piguet, un estudiante de doctorado de la Escuela Politécnica Federal de Lausanne (EPFL). El lenguaje de base era compatible con Matlab pero incorporaba un conjunto de primitivas y funcionalidades que facilitaban la escritura de aplicaciones interactivas. Era desde su punto de vista la herramienta adecuada para empezar a trabajar y desarrollar una nueva familia de módulos interactivos dedicados al estudio del control automático.

A partir de 2001 comenzamos a desarrollar nuestras primeras aplicaciones interactivas utilizando Sysquake y los resultados nos animan a continuar explorando nuevas formas de interactividad y proponiendo aplicaciones en diferentes dominios y técnicas de control. Al mismo tiempo sugerimos sucesivas mejoras en el entorno de Sysquake a Yves Pignet, que las va incorporando manteniendo en todos los casos una total compatibilidad con todo lo previamente realizado. Esta estrecha colaboración con Yves se va a mantener a lo largo del tiempo y es en nuestra opinión uno de los factores claves que nos ha permitido plasmar muchas ideas que sin su ayuda no hubiera sido posible.

En este camino se produce un hecho crucial para seguir generando nuevas herramientas interactivas: la incorporación de José Luis Guzmán a finales de 2003 para realizar su Tesis Doctoral en el tema de “Diseño interactivo de sistemas de control”. También Ramón Costa comienza a desarrollar un conjunto de fichas interactivas que utiliza en sus clases en la Universitat Politècnica de Catalunya y que suponen el primer germen sobre el que se va a asentar este texto. Como parte de su plan de formación en el desarrollo de su tesis José Luis realiza varias estancias en Lund, donde comenzamos una fructífera colaboración con K. J. Åström y T. Hägglund para el desarrollo de una serie de módulos conocidos como “Interactive Learning Modules” (ILM) adaptados al libro “Advanced PID Control” que habían publicado en esos momentos. El proyecto ILM (<http://aer.ual.es/ilm/>), todavía activo, tenía como objetivo soportar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos básicos de control automático. Hasta la fecha se han implementado los siguientes módulos:

1. Modelado.
2. Fundamentos del control PID.
3. Diseño de controladores PID.
4. El fenómeno de la saturación del término integral (*windup*) en controladores PID.
5. Compensadores para sistemas con retardo de tiempo.
6. Introducción al problema de la interacción entre lazos de control.
7. Fundamentos de diseño de controladores por prealimentación (*feedforward*).

Otras herramientas interactivas que durante estos años hemos desarrollado y que el lector interesado puede descargarse son las siguientes:

1. SISO-GPCIT (<http://aer.ual.es/siso-gpcit/>): Herramienta interactiva para el estudio del *Control Predictivo Generalizado* en sistemas SISO.
2. MIMO-GPCIT (<http://aer.ual.es/mimo-gpcit/>): Herramienta interactiva para el estudio del *Control Predictivo Generalizado* en sistemas MIMO.
3. MRIT (<http://aer.ual.es/mrit/>): Herramienta interactiva para explicar fundamentos de *Robótica Móvil*.
4. Herramienta interactiva para el estudio del *Predictor de Smith Filtrado* (<http://aer.ual.es/interactiveFSP/>).
5. ITCRI (<http://aer.ual.es/ITCRI/>): Herramienta interactiva para *Identificación Relevante al Control*.
6. ITSIE (<http://aer.ual.es/ITSIE/>): Herramienta interactiva para la *Identificación de Sistemas Dinámicos*.
7. SISO-QFTIT (<http://ctb.dia.uned.es/asig/qftit/principal.html>): Herramienta interactiva para el estudio de la *Teoría de la Realimentación Cuantitativa* (QFT) en sistemas SISO.

Una característica que suelen compartir todas estas herramientas es que contienen mucha información y se hacen difíciles de utilizar por un usuario inexperto si no tiene la ayuda directa de un profesor para guiarle en el proceso de aprendizaje, aunque todas ellas disponen de un manual de uso y publicaciones asociadas donde se explican sus características. Desde estas consideraciones y tomando como

punto de partida la experiencia ganada durante todos estos años de desarrollo de herramientas interactivas, nos decidimos a iniciar el proyecto de escribir un nuevo texto inspirado en las ideas del Espacio Europeo de Educación Superior. El objetivo que nos marcamos es que pudiese ser utilizado como vehículo a través del cual explicar conceptos básicos de un curso de introducción al control automático y facilitar al recién llegado su aprendizaje. Este objetivo genérico debía concretarse en una serie de premisas que consideramos esenciales desde el primer momento:

1. *Sencillez*. Las fichas deben ser sencillas y concentrarse sobre el concepto concreto que se desea transmitir, sin necesidad de sobrecargar en exceso su contenido. La virtud de la simplicidad es pues un objetivo prioritario.
2. *Uniformidad*. Las fichas deben compartir una estructura en sus aspectos visuales que las identifique como pertenecientes a una misma familia. La reusabilidad de componentes en diferentes fichas facilita su utilización y aprendizaje.
3. *Autocontenidas*. Cada ficha puede ser accedida como una unidad de estudio independiente que proporciona todo lo que es necesario para su aprendizaje.

Esperamos que los lectores disfruten con el conjunto de herramientas interactivas que se han desarrollado siguiendo esta filosofía.

Los autores

Página web del libro

Control automático con herramientas interactivas incluye un código de acceso al sitio web

www.pearson.es/fichas_interactivas

Esta suscripción gratuita proporciona acceso a todas las áreas de soporte al estudiante y al profesor, donde se incluyen las herramientas interactivas, un glosario de términos de control automático utilizados en el texto y documentación auxiliar.

Las herramientas interactivas se ofrecen en ejecutables multiplataforma (Windows, Mac OS y Linux) y se actualizarán de forma continua para incluir nuevas funcionalidades y corregir posibles errores. A medida que se realicen modificaciones en las mismas, se actualizarán en la página web y se notificará el cambio a los usuarios vía correo electrónico.

Agradecimientos

Manifestamos en primer lugar nuestro más sentido agradecimiento al profesor Javier Aracil, que amablemente ha realizado el prólogo del libro.

Queremos expresar también nuestra gratitud a nuestras familias, por la paciencia que han demostrado durante el desarrollo de este libro, así como a todas las personas que nos han ayudado e inspirado a la hora de abordar este trabajo: Yves Pignet, Denis Gillet, Karl Åström, Tore Hägglund, Daniel Rivera, José Sánchez, Manuel R. Arahal, Manuel G. Ortega, Marga Marcos, Pedro García, Pedro Albertos, Sebastián Dormido Canto, Joaquín Aranda, José Manuel Díaz, Paco Gordillo, Alfonso Baños, Antonio Barreiro, Julio E. Normey, Antonio Visioli, José D. Álvarez, Francisco Rodríguez, José C. Moreno, Eduardo F. Camacho, Luis Basáñez y muchas otras con las que hemos colaborado en el desarrollo de herramientas interactivas.

Finalmente queremos agradecer al Ministerio de Ciencia e Innovación, al Comité Español de Automática (grupo temático de Educación en Automática) y a los Consejos Sociales de la UNED y de la UAL por la financiación y los premios otorgados a diversas iniciativas relacionadas con el desarrollo de laboratorios virtuales y remotos para la enseñanza de la Automática.

JOSÉ LUIS GUZMÁN SÁNCHEZ¹

joseluis.guzman@ual.es

MANUEL BERENGUEL SORIA¹

beren@ual.es

RAMÓN COSTA CASTELLÓ²

ramon.costa@upc.edu

SEBASTIÁN DORMIDO BENCOMO³

sdormido@dia.uned.es

¹ Universidad de Almería, Escuela Superior de Ingeniería, Departamento de Lenguajes y Computación, Área de Ingeniería de Sistemas y Automática, Ctra. Sacramento s/n, 04120, Almería, España

² Universitat Politècnica de Catalunya, Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Industrial de Barcelona, Institut d'Organització i Control de Sistemes Industrials, Departament d'Enginyeria de Sistemes Automàtica i Informàtica Industrial, Av. Diagonal 647,11 08028, Barcelona, España

³ Universidad Nacional de Educación a Distancia, Escuela Técnica Superior de Ingeniería Informática, Departamento de Informática y Automática, C/ Juan del Rosal, 16, 28040, Madrid, España

Nomenclatura

Introducción

La *automática* o *control automático* es una rama de la ingeniería (también denominada *ingeniería de control*) cuyo objetivo es el gobierno autónomo del comportamiento de *sistemas* o *procesos*, entendidos éstos como un conjunto de partes o elementos organizados y relacionados que interactúan entre sí para lograr un objetivo. Es por tanto una disciplina que aplica la *teoría de control automático* para diseñar sistemas que tengan un comportamiento predecible. Se dice que un proceso está automatizado cuando funciona solo, sin intervención del ser humano. En la práctica se usan *sensores*¹ para medir la evolución de la salida del sistema que se quiere *controlar* y esa medida se utiliza en un lazo de realimentación para que se puedan realizar acciones sobre el proceso a través de los *actuadores*², con la finalidad de alcanzar un comportamiento deseado. La *realimentación*, que es el proceso por el que una cierta proporción de la señal de salida de un sistema se redirige de nuevo a la entrada, es el concepto clave en que se basa el control automático. Un *sistema en lazo abierto* utiliza un dispositivo de actuación para controlar el proceso directamente sin usar realimentación. Un *sistema en lazo cerrado* utiliza una medida de la señal de salida y una comparación con la salida deseada (*referencia*) para generar una señal de error que se aplica al actuador [9].

En el control automático se utiliza una representación gráfica como la mostrada en la siguiente sección denominada *diagrama de bloques*. Es el lenguaje gráfico de representación de los sistemas dinámicos más difundido en ingeniería. El objetivo de estos diagramas es enfatizar el flujo de la información y abstraerse de los detalles del sistema [2]. En un diagrama de bloques, los diferentes elementos del proceso se describen usando cajas o bloques, cada una de las cuales tiene entradas representadas por una flecha entrante y salidas simbolizadas por una flecha que sale del bloque. Las entradas denotan las variables que tienen influencia sobre el proceso y las salidas las señales de interés o que inciden sobre otros subsistemas. Como se puede ver en el diagrama de bloques de la siguiente página, las señales se pueden sumar o restar (por ejemplo, $u(t) = u_c(t) + d(t)$). La representación en diagrama de bloques permite no sólo obtener modelos a partir de las relaciones constitutivas y estructurales, sino también utilizar ciertas técnicas de análisis directamente sobre los diagramas, conocidas éstas como *álgebra de bloques* (Capítulo 6), como consecuencia de la aplicación de las propiedades de la *transformada de Laplace*. En este texto, los bloques representan a un *sistema dinámico lineal invariante en el tiempo* (Capítulo 2) y por tanto pueden contener distintas descripciones del mismo, como una ecuación o sistema de *ecuaciones diferenciales ordinarias* (Capítulo 2), una *función de transferencia* (Capítulo 3) o una descripción en *espacio de estados* (Capítulo 9).

¹Dispositivo capaz de medir magnitudes físicas o químicas y transformarlas en variables eléctricas.

²Dispositivo que proporciona la potencia motriz al proceso.

Diagrama de bloques básico y señales asociadas

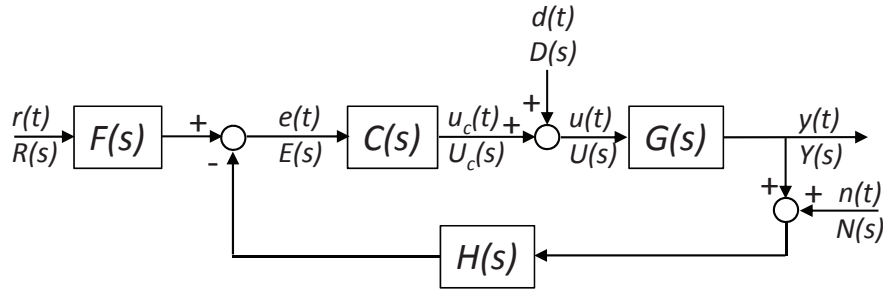


Diagrama de bloques estándar de un sistema en lazo cerrado. A lo largo del texto se supondrá el caso de realimentación unitaria ($H(s) = 1$) y no se utilizará filtro en la referencia ($F(s) = 1$), aunque se hará referencia a ambas funciones de transferencia.

Símbolo	Descripción
<i>Señales y funciones de transferencia básicas</i>	
$C(s)$	Función de transferencia del controlador
$d(t), D(s)$	Perturbación a la entrada del sistema (perturbación de carga)
$e(t), E(s)$	Señal de error
$F(s)$	Función de transferencia del filtro de la referencia
$G(s)$	Función de transferencia del sistema
$H(s)$	Función de transferencia del lazo de realimentación
$n(t), N(s)$	Señal de ruido a la salida del sistema
$r(t), R(s)$	Referencia o consigna al sistema
$u(t), U(s)$	Entrada del sistema (señal de entrada)
$u_c(t), U_c(s)$	Salida del controlador (señal de control)
$y(t), Y(s)$	Salida del sistema (señal de salida)
<i>Funciones de transferencia compuestas</i>	
$J(s)$	Diferencia de retorno $J(s) = 1 + C(s)G(s)H(s)$ Polinomio característico
$J(s) = 0$	Ecuación característica $J(s) = 1 + C(s)G(s)H(s) = 0$
$L(s)$	Función de transferencia del lazo $L(s) = C(s)G(s)H(s)$
$P(s)$	Función de transferencia de un proceso tomado como ejemplo
$Q(s)$	Función de transferencia de la cadena directa $Q(s) = C(s)G(s)$
$S(s)$	Función de sensibilidad $S(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)H(s)}$
$T(s)$	Función de transferencia del lazo cerrado $T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}$

Variables y parámetros

Símbolo	Descripción	Unidades
a	Área del orificio de salida del tanque	cm^2
A	Área del tanque	cm^2
B	Matriz dinámica de la representación en espacio de estados	
C	Matriz de control de la representación en espacio de estados	
D	Matriz del sensor de la representación en espacio de estados	
D	Matriz de término directo de la representación en espacio de estados	
e_{ee}	Error en estado estacionario	%
e_{ee_p}	Error en estado estacionario asociado a la posición	%
e_{ee_v}	Error en estado estacionario asociado a la velocidad	%
e_{ee_a}	Error en estado estacionario asociado a la aceleración	%
g	Aceleración de la gravedad a nivel del mar	cm/s^2
$h(t)$	Altura de fluido del tanque	cm
k	Ganancia estática del sistema (limitada a ± 10 en las herramientas)	
K	Ganancia proporcional del controlador (en formato de constantes de tiempo)	
	Vector de ganancias de realimentación del vector de estados	
K_c	Ganancia proporcional del controlador (en formato de polos y ceros)	
K_a	Constante de error en estado estacionario en aceleración	$1/\text{s}^2$
K_d	Ganancia derivativa del controlador PID	
K_i	Ganancia integral del controlador PID	
K_p	Constante de error en estado estacionario en posición	
K_r	Constante que multiplica a la referencia en el control por realimentación lineal del vector de estados con dos grados de libertad (2GdL)	
K_v	Constante de error en estado estacionario en velocidad	$1/\text{s}$
L	Vector de ganancias del observador	
MF	Margen de fase	$^\circ, \text{rad}$
MG	Margen de ganancia	dB
MS	Margen de seguridad de diseño en el dominio de la frecuencia	$^\circ, \text{rad}$
M_r	Magnitud pico o pico de resonancia	dB
\aleph	Tipo de un sistema	
N	Número total de rodeos del origen del plano $J(s)$	
n_d	Número de datos experimentales usados en ajuste de modelos	
N_d	Parámetro del filtro de la acción derivativa de un controlador PD	
P	Número de polos del polinomio característico $J(s) = 0$	
p	Polo de un sistema	
p_c	Polo de una red de avance o retraso de fase	
$q(t)$	Caudal de entrada de fluido al tanque	cm^3/s

Símbolo	Descripción	Unidades
s	Variable compleja de la Transformada de Laplace $s = \sigma + j\omega$	rad/s
SO	Sobreoscilación	%
T_d	Tiempo derivativo de un controlador PID	s
t_e	Tiempo de establecimiento	s
T_i	Tiempo integral de un controlador PID	s
t_p	Tiempo de pico	s
t_r	Tiempo de retardo (limitado a un máximo de 30 s en las herramientas)	s
t_s	Tiempo de subida	s
$u_d(t)$	Acción derivativa	
$u_i(t)$	Acción integral	
u_p	Término de prealimentación en un controlador proporcional	
$u_p(t)$	Acción proporcional	
$x(t)$	Vector de estados	
x_e	Valor en estado estacionario (equilibrio) del vector de estados	
$x_i(t)$	Elemento i del vector de estados	
y_e	Salida en estado estacionario (equilibrio) de la descripción interna	
z	Cero de un sistema Dinámica adicional asociada a un integrador en el control por realimentación lineal del vector de estados	
z_c	Cero de una red de avance o retraso de fase	
Z	Número de ceros del polinomio característico $J(s) = 0$	
<i>Letras griegas</i>		
α	Factor de atenuación de redes de adelanto de fase	-
α_i	Coefficientes del polinomio característico del lazo cerrado (especificaciones)	
β	Constante de tiempo asociada a un cero	s
$\delta(t)$	Función impulso unitario	
δ	Número infinitesimal (estabilidad de Lyapunov)	
ϵ	Número infinitesimal (estabilidad de Lyapunov)	
γ	Ángulos de las asíntotas del lugar de las raíces	°, rad
Γ	Contorno en el plano complejo	
κ	Constante de transferencia de la función de transferencia en formato polo-cero	
ν	Frecuencia normalizada ω / ω_n	-
ϕ	Ángulo de fase ($\angle G(j\omega)$)	°, rad
ϕ_m	Ángulo de fase mínimo o máximo en redes de avance y retraso de fase	°, rad
$\phi_{\omega\downarrow}$	Asíntota de fase en baja frecuencia	°, rad
$\phi_{\omega\uparrow}$	Asíntota de fase en alta frecuencia	°, rad
φ	Ángulo que forman las raíces (polos o ceros) con el eje de abscisas	°, rad
λ	Autovalores o valores propios	

Símbolo	Descripción	Unidades
ω	Frecuencia y parte imaginaria de los polos complejos	rad/s
ω_c	Frecuencia de corte	rad/s
ω_{cf}	Frecuencia de corte de fase	rad/s
ω_{cg}	Frecuencia de corte de ganancia	rad/s
ω_d	Frecuencia natural amortiguada	rad/s
ω_e	Frecuencia esquina	rad/s
ω_m	Frecuencia de máxima (mínima) contribución de fase en redes de avance (retraso) de fase	rad/s
ω_n	Frecuencia natural no amortiguada	rad/s
ω_r	Frecuencia de resonancia	rad/s
Ω	Matriz de controlabilidad	
ρ	Magnitud de $G(j\omega)$ ($ G(j\omega) $)	dB
$\rho_{\omega\downarrow}$	Asíntota de magnitud en baja frecuencia	dB
$\rho_{\omega\uparrow}$	Asíntota de magnitud en alta frecuencia	dB
σ	Parte real de los polos complejos Varianza de la señal de ruido	rad/s
θ	Vector de parámetros de un modelo	
θ_i	Ángulo que forma con el eje real el vector que une el polo i con un polo complejo del lugar de las raíces	°, rad
θ_i	Ángulo que forma con el eje real el vector que une el cero i con un cero complejo del lugar de las raíces	°, rad
Θ	Matriz de observabilidad	
τ	Constante de tiempo del sistema	s
τ_{lc}	Especificación de la constante de tiempo del sistema en lazo cerrado	s
τ_T	Constante de tiempo del sistema en lazo cerrado	s
v	Autovectores o vectores propios	
ϱ	Centroide del lugar de las raíces	
ζ	Factor de amortiguamiento relativo	

Funciones

$\arctan(\cdot)$	Arcotangente	$\arg(\cdot)$	Argumento
$\operatorname{argmin}(\cdot)$	Argumento mínimo	$\cos(\cdot)$	Coseno
$\operatorname{den}(\cdot)$	Denominador	$\det(\cdot)$	Determinante
$\operatorname{Im}(\cdot)$	Parte imaginaria	$\lim(\cdot)$	Límite
$\ln(\cdot)$	Logaritmo neperiano	$\log(\cdot)$	Logaritmo decimal
$\operatorname{num}(\cdot)$	Numerador	$\operatorname{Re}(\cdot)$	Parte real
$\operatorname{sen}(\cdot)$	Seno	$\tan(\cdot)$	Tangente

Otros símbolos

$ \cdot $	Módulo de un número complejo
$\ \cdot\ $	Norma euclídea
$\angle\cdot$	Fase de un número complejo
$\{\cdot\}_0$	El subíndice representa un estado inicial
$\{\cdot\}_e$	El subíndice representa un punto de equilibrio
$\{\cdot\}_{lc}$	El subíndice representa al lazo cerrado
$\{\cdot\}$	Representa una variable de desviación
$\{\hat{\cdot}\}$	Representa una variable estimada
$\{\dot{\cdot}\}$	Derivada respecto al tiempo ($d\{\cdot\}/dt$)
Δ	Incremento

Símbolos interactivos

Símbolo	Descripción
○	Punto característico de la respuesta
○	Cero del sistema
×	Polo del sistema
○	Derivador
×	Integrador
△	Polos del lazo cerrado
◇	Centroide del lugar de las raíces
□	Puntos de bifurcación del lugar de las raíces
□	Polos que representan las especificaciones en lazo cerrado
□	Punto de máxima/mínima magnitud y fase en redes de avance y retraso de fase
◇	Determina la frecuencia en diagramas frecuenciales
◇	Margen de seguridad (<i>MS</i>) en el diseño de redes de avance y retraso de fase
○ . . .	Círculo interactivo para introducir instante y amplitud del escalón en la referencia
○	Círculo interactivo para modificar instante y amplitud de escalón en la perturbación de carga
○	Círculo interactivo para cambiar instante y varianza del ruido a la salida
	Botones de activación (<i>activation button</i>)
<input type="checkbox"/>	Cuadro de selección (<i>checkbox</i>)
<input type="radio"/>	Botón circular de selección excluyente (<i>radiobutton</i>)
	Barra de desplazamiento (<i>slider</i>)
<input type="text" value="k"/>	Cuadro de texto (<i>textbox</i>)
△	Cambio del fondo de escala en los ejes de abscisas y ordenadas en las gráficas
▽	Cambio del fondo de escala en los ejes de ordenadas en las gráficas

1

Introducción

Introducción

El objetivo de cualquier curso de ingeniería es que los estudiantes adquieran los conocimientos y habilidades que les hacen ser válidos para la industria. El mercado de trabajo busca ingenieros con una formación sólida en la teoría en que se fundamentan los conceptos de ingeniería, pero que al mismo tiempo tengan la capacidad de aplicar estos conceptos con ingenio y destreza. La segunda de estas habilidades debe aprenderse mediante la aplicación repetida de los conceptos en una amplia variedad de situaciones. Al hacerlo así, el estudiante adquiere una intuición del problema bajo estudio. Durante muchos años, el método básico de enseñanza de conceptos en ingeniería ha sido la interacción en clase y los ejercicios realizados por el estudiante. Estos métodos se consideran adecuados para transmitir las matemáticas que hay detrás de la escena, pero a menudo dejan al alumno huérfano de la intuición que es necesaria para aplicar los conceptos. El obstáculo principal en la adquisición de la intuición acerca de un concepto es la incapacidad del estudiante de visualizar las ideas que se desean aprender. Muchos conceptos tienen representaciones visuales complejas, que no pueden explorarse suficientemente a través de la experiencia normal en una clase. Por estas razones surge la necesidad de construir un conjunto de aplicaciones que proporcionen a los estudiantes la oportunidad para, visual e interactivamente, explorar los conceptos sin tener necesidad de usar “lápiz y papel”. En los últimos años se ha producido una demanda creciente dentro de la comunidad educativa para el desarrollo de tales módulos, que facilitan al alumno un control más completo de su propio proceso de aprendizaje. Con este tipo de herramientas no se está constreñido a los ejemplos que se dan en el texto de estudio. Además, al hacerlo de esta forma mejora su comprensión e intuición sobre el tema.

Es nuestra firme convicción que la comunidad del control automático debería “invertir en nuevas soluciones en educación, en un mayor alcance de la difusión de conceptos de control y en el desarrollo de herramientas para conseguir audiencias no tradicionales” [28]. Un elemento importante de la docencia en automática es que se centra en el uso continuo de experimentos y desarrollo de nuevos laboratorios y aplicaciones basadas en computador. Este tipo de desarrollos tecnológicos debería integrarse como parte de los contenidos docentes. Siguiendo esa filosofía, este texto va dirigido tanto a docentes del ámbito de la automática como a estudiantes de ingeniería. Se han diseñado un conjunto de *fichas interactivas* que facilitan el aprendizaje de los conceptos relevantes de un curso básico de control automático. Cada una de estas fichas da al usuario un control completo sobre el proceso de aprendizaje de un determinado concepto o técnica de control, al proporcionarle todos los elementos necesarios para su estudio de una forma totalmente interactiva. El texto y las herramientas interactivas son útiles tanto para el profesorado como para los estudiantes. Para los primeros porque les permiten presentar los conceptos de una forma visual e intuitiva y sirven así de apoyo a la teoría subyacente. Para los segundos porque

les facilitan la comprensión y el aprendizaje autónomo de conceptos básicos del control automático y la construcción de numerosos ejemplos y escenarios que pongan a prueba sus destrezas y habilidades. Pueden ser también un elemento útil para evaluar dicho aprendizaje. En cierto modo, se sigue la idea de R. Bellman [5] de buscar un buen compromiso entre teoría y práctica en el aprendizaje¹.

1.1 El proceso de Bolonia: Alcance y objetivos

Lo que hoy día se ha dado en llamar el “proceso de Bolonia” tiene sus orígenes en una declaración conjunta firmada por los ministros europeos de educación reunidos el 19 de junio de 1999 en la muy antigua y prestigiosa Universidad de Bolonia. El compromiso que adquirieron fue constituir en un plazo suficientemente amplio (11 años) un Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) que fuese al mismo tiempo respetuoso con las peculiaridades de cada país. De entre los distintos objetivos que se expresaban en esa declaración, se estableció el sistema de créditos ECTS², que expresa la cantidad de trabajo que cada curso supone en relación con el volumen global de trabajo de un curso completo. El volumen de trabajo incluye clases presenciales, trabajos prácticos y trabajo personal. Bolonia trata de buscar una participación activa de los alumnos en su propio proceso de aprendizaje, cambiando la cultura de estudiantes “receptores de información” a la de estudiantes “inquisidores del saber y el conocimiento”. Un escenario ideal en el que profesores y alumnos compartan la apasionante aventura del descubrimiento. Desde este punto de vista *enseñanza* puede significar dos cosas completamente diferentes. En primer lugar puede simplemente significar presentar información, de forma que si se imparte una clase sobre un determinado tema, se puede decir que se está enseñando, independientemente de que alguien haya aprendido. El segundo significado de enseñanza es ayudar a alguien a aprender. De acuerdo con este significado, que personalmente aceptamos los autores de este texto, si se imparte una clase sobre algún tema y los estudiantes no han aprendido, no se les ha enseñado. El enfoque tradicional de “enseñar un curso” implícitamente utiliza el primer significado. Se prepara un programa, explicitando los temas que se planifican y van a ser cubiertos, se exponen los temas en clase y por hacer esta tarea los profesores se ganan el sueldo. No importa cuántos estudiantes aprenden; si se ha explicado el temario, se ha hecho el trabajo. El enfoque alternativo, en el que se fundamentan muchas de las ideas del proceso de Bolonia, se suele denominar a veces *educación basada en resultados*. En lugar de definir un curso simplemente escribiendo un programa, se intenta precisar con tanto detalle como sea posible los conocimientos, habilidades, actitudes y competencias que deben adquirir los estudiantes cuando finalice el curso. En el proceso de *enseñanza-aprendizaje*, los profesores deben presentar y explicar el conocimiento especificado, proveer ejercicios prácticos, proporcionar realimentación a tiempo a lo largo del curso y ofrecer ayudas y modelos para las actitudes que se consideran importantes que los estudiantes adopten. Los alumnos deben utilizar todos los medios a su alcance para cubrir los objetivos de aprendizaje y adquirir las competencias relacionadas con la materia objeto de estudio.

Quizás la forma más directa para analizar si el proceso de aprendizaje ha tenido éxito sea observar cómo los estudiantes hacen algo que demuestre su conocimiento o comprensión (dar unos “puntos de referencia” contra los cuales puedan verificar su comprensión). Cuanto más explícitos sean esos objetivos, especialmente aquéllos que requieren de altos niveles de pensamiento crítico y creativo, más probable será que los estudiantes los alcancen.

Los *estilos de aprendizaje* son las diferentes formas que los alumnos característicamente adoptan para procesar nueva información. Los estudiantes funcionan con una panoplia de estrategias en las situaciones de aprendizaje. Unos prefieren tratar con información concreta –hechos, observaciones, datos

¹“Theory without application is like the smile of the Cheshire cat; application without theory is blind man’s buff” (traducción libre: La teoría sin práctica es como la sonrisa del gato de Cheshire; la práctica sin teoría es como jugar a la gallina ciega).

² *European Credit Transfer System* (Sistema Europeo de Transferencia de Créditos).

experimentales– y otros se encuentran más cómodos con conceptos abstractos y modelos matemáticos. Algunos retienen más la información visual (figuras, diagramas, gráficas) que la información estrictamente verbal (palabra hablada o escrita) y otros progresan mejor de forma inversa. La mayoría de los estudiantes de ciencias e ingeniería aprenden de una forma activa y obtienen su mayor grado de asimilación cuando hacen algo –resuelven problemas o mantienen intercambios de ideas con otros– prefiriendo los cursos basados en ejercicios, casos prácticos y laboratorios (que son excepciones notables en la actualidad) a los que siguen un formato de clase magistral. Se encuentran incómodos si no pueden ver conexiones entre lo que están aprendiendo y el “mundo real”. Se puede decir que son “aprendices visuales”.

1.2 Qué entendemos por visualización

En el prólogo del libro “*Geometry and the Imagination*” [22], Hilbert y Cohn-Vossen escribían lo siguiente: “En el estudio de las matemáticas encontramos dos tendencias perfectamente delimitadas. De una parte está la tendencia hacia la *abstracción*, que busca cristalizar las relaciones lógicas inherentes en el laberinto del material que está siendo estudiado y correlacionarlo de una forma ordenada y sistemática. Por otra parte se tiene la tendencia hacia la *intuición*, que promueve una comprensión más inmediata de los objetos que uno estudia, una relación más directa con ellos que refuerza el significado concreto de sus relaciones”. Este pasaje captura de manera efectiva el espíritu y el objetivo de este texto. Parafraseando a Hilbert y Cohn-Vossen, la finalidad de los autores de este libro es explorar cómo con la ayuda de la imaginación visual se pueden iluminar los múltiples hechos y problemas que aparecen en el estudio de la automática y en muchos casos también, cómo es posible representar la estructura geométrica subyacente en la mayoría de los conceptos que se introducen en un curso básico de control automático.

Se toma aquí el término *visualización* para describir el proceso de producir o usar representaciones geométricas o gráficas de los conceptos, principios o problemas propios del control, sean éstos representados a mano o generados mediante un computador. Las ciencias, la ingeniería y en un sentido algo más limitado, las matemáticas, están gozando de un renacimiento del interés por la visualización. En cierta medida, este resurgir está siendo conducido por el desarrollo tecnológico. Los gráficos por computador están expandiendo el alcance y la potencialidad de la visualización en todos los campos. La visualización transforma lo simbólico en lo geométrico, permitiendo observar simulaciones y cálculos de una forma mucho más clara y sin requerir conocimientos muy especializados de informática. La visualización ofrece un método de hacer visible lo invisible.

Una de las razones de por qué la enseñanza de la automática tiene cierta complicación técnica se debe a que los conceptos que los expertos en control consideran intuitivos, no lo son tanto para los estudiantes. La razón es bastante simple. La intuición es una resonancia global en el cerebro, que es función de la estructura cognitiva de cada individuo, que a su vez es dependiente de la experiencia previa de cada uno. No hay razón en absoluto para suponer que el recién llegado a un campo tendrá las mismas intuiciones que el experto, incluso cuando se consideran situaciones visuales aparentemente sencillas. El control automático tiene elementos que son espaciales, elementos que son aritméticos o algebraicos, elementos que son verbales o programáticos, elementos que son lógicos o didácticos y elementos que son intuitivos o incluso contra intuitivos.

La visualización no es una invención reciente. Los diagramas son, por supuesto tan antiguos como las propias disciplinas científico-técnicas. La geometría, por ejemplo, siempre ha descansado en gran medida en diagramas y durante un tiempo también lo hicieron otras ramas de las matemáticas, si bien fue desplazada por el progreso de lo formal, lo simbólico, lo verbal y los elementos analíticos. Hay signos que evidencian que la situación ha comenzado a cambiar hacia una visión más equilibrada, que toma en consideración de forma más completa las dimensiones visual e intuitiva. Los límites del deductivismo están por fin amaneciendo gracias en gran medida al papel de los computadores en reconfigurar las

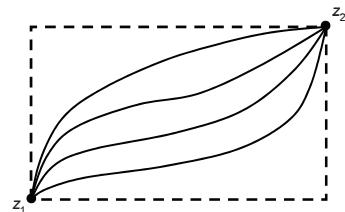
nociones y conceptos. El término visualización resulta poco familiar a algunos en el contexto de las disciplinas científico-técnicas y sus connotaciones pueden no resultar obvias. Nuestro uso del término difiere algo del utilizado en el lenguaje cotidiano y en psicología, donde el significado de visualización está más próximo a su significado fundamental de *formar una imagen mental*. Visión no es visualización; ver no es necesariamente comprender. La clase de visualización en la que estamos interesados en control automático no es un fin en sí mismo, sino un medio hacia un fin que es su aprendizaje. La visualización en control es el proceso de formar imágenes y diagramas (mentalmente, con lápiz y papel o con la ayuda de la tecnología) y usar tales imágenes de forma efectiva para el descubrimiento y la comprensión del concepto que se desea transmitir y aprender. Proporciona profundidad y significado a la comprensión, sirve como una guía fiable para la resolución de los problemas e inspira descubrimientos creativos, pero sin aislarse de otras formas de representación numérica o simbólica.

La visualización tiene también sus desventajas distintivas y la intuición visual ha servido para bien y para mal. El problema es que las imágenes pueden a menudo sugerir teoremas o conjeturas que son falsos, siendo necesario pues considerar y ponderar las fortalezas y debilidades de la imaginación visual y relacionarlas con las nociones de intuición y rigor, que nunca deben estar contrapuestas sino que deben ser complementarias. Desde un punto de vista formal y teórico, en la teoría del control la “demostración de un teorema” es la última etapa del proceso de abstracción y sintetiza el conocimiento en un dominio específico. Sin embargo, antes de que exista una demostración debe haber una idea de lo que el teorema intenta probar o de qué teoremas podrían ser ciertos. Esta fase exploratoria del pensamiento abstracto de los objetos sobre los que opera el control se puede beneficiar de una correcta visualización. No es un accidente que cuando pensamos que comprendemos algo digamos “¡oh ya lo veo!”. La siguiente anécdota atribuida a Norbert Wiener, padre de la cibernética, ilustra mejor que nada lo que se está diciendo. Se encontraba Wiener impartiendo una clase en el MIT (*Massachusetts Institute of Technology*) en el punto central de una complicada demostración matemática, con la pizarra llena de fórmulas, cuando de repente se paró y miró fijamente, durante un largo rato, a la última expresión matemática que había escrito. Todos sus alumnos, manteniendo un silencio sepulcral, pensaban que su profesor estaba en un callejón sin salida. Wiener sin embargo, sin hablar nada, se dirigió a un rincón de la pizarra que todavía estaba libre de sus fórmulas y dibujó unas pocas figuras que sus anchas espaldas ocultaban a sus alumnos. De repente le cambió el rostro y con una sensación de alivio, borró aquellas enigmáticas figuras, retornó al punto de la demostración donde se había parado y continuó de forma impecable y sin problema alguno hasta el final.

Un buen ejemplo del valor de la visualización es el famoso teorema de Cauchy en análisis complejo, que resulta esencial en la demostración del criterio de estabilidad de Nyquist. Este teorema dice que la integral de una función analítica alrededor de una curva cerrada que no encierra singularidades en su interior es cero. Cuando Cauchy expuso una primera versión de este teorema pensó en un número complejo $z = x + jy$ analíticamente en términos de sus partes real e imaginaria. Por analogía con el caso real, definió la integral de contorno $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ entre dos puntos z_1 y z_2 a lo largo de una curva cuyas partes real e imaginaria son ambas o monótonamente crecientes o decrecientes.

Como una generalización formal del caso real, es natural esta restricción del tipo de curva. Pero si abrimos los ojos y miramos una imagen, vemos que tales gráficas (para x e y crecientes) son un conjunto restringido de curvas que están contenidas en un rectángulo con vértices opuestos en z_1 y z_2 . Cauchy tuvo que visualizar la situación para una curva más general en el plano complejo para formular su teorema en la forma en que se conoce hoy de una curva cerrada.

Si los grandes matemáticos necesitan pensar “visualmente”, ¿por qué mantener tal proceso de pensamiento alejado de los estudiantes?



1.3 El papel de la visualización en la enseñanza del control automático

La visualización, entendida como la manera de prestar atención explícita a representaciones gráficas que permitan explicar contenidos abstractos, se encuentra muy desarrollada en el campo de la informática, donde es posible encontrar objetos en tres dimensiones con excelente calidad visual.

Los fundamentos, ideas, conceptos y procedimientos del control automático presentan una gran riqueza de contenidos visuales que admiten una representación geométrica intuitiva y cuyo uso resulta de gran utilidad en la presentación y manejo de tales conceptos y procedimientos, así como en la manipulación de los mismos de forma gráfica e interactiva para la resolución de problemas. Ejemplos claros son las respuestas temporales, los diagramas de respuesta frecuencial (diagramas de Bode, Nyquist y Nichols), el plano de polos y ceros (plano s), el lugar geométrico de las raíces, el plano de fase, ... Los expertos disponen de imágenes visuales que actúan a modo de mecanismos intuitivos para entender los fundamentos de su disciplina y que al mismo tiempo les son de gran valor y eficacia en el desarrollo de su trabajo creativo. A partir de estas imágenes, son capaces de relacionar y proyectar de manera muy versátil una enorme cantidad de hechos que les permiten seleccionar, de manera natural y sin aparente esfuerzo, cual es la línea de ataque más eficaz para resolver los complejos problemas a los que se enfrentan. Esta forma de actuar con atención explícita a las posibles representaciones concretas en cuanto revelan las relaciones abstractas que al especialista en ingeniería de control interesan, constituye lo que llamamos *visualización en control*. El hecho de que la visualización es un aspecto especialmente importante en la actividad del experto en control es algo completamente natural si se tiene en cuenta la característica de matemática aplicada que tiene la teoría de control. La visualización aparece así como algo profundamente consustancial en la transmisión y comunicación de nuestro conocimiento. Una de las tareas importantes que tenemos los docentes es transmitir a nuestros estudiantes no sólo la estructura lógica y formal de nuestra propia disciplina, sino también, y con mucho más énfasis, las facetas más intuitivas y motivadoras del tema que estamos abordando, facilitando su aprendizaje. Son precisamente estos aspectos mucho más difíciles de explicitar y de ser asimilados porque muy a menudo están en el sustrato menos consciente de nuestra actividad como profesores.

Dada la naturaleza de la visualización, existirán muchos elementos altamente subjetivos. Las formas de visualizar y hacer las ideas del control automático más próximas e intuitivas, con el fin de implementarlas en ciertas situaciones y aplicarlas a problemas específicos, dependen en gran medida de la estructura mental de cada persona. El grado de soporte visual ciertamente varía considerablemente de un análisis a otro, y lo que para una persona puede resultar útil para otra puede ser una complicación. Sin embargo, estas diferencias no deben ser un impedimento para ofrecer aquellos instrumentos que han resultado útiles en el trabajo sobre visualización y sin el cual esta tarea hubiese sido mucho más difícil, oscura y tediosa.

El lenguaje técnico utilizado por los especialistas de control automático es una mezcla de lenguaje natural y lenguaje formalizado en términos matemáticos. Una extraña jerga consistente en elementos del lenguaje natural, palabras más o menos esotéricas y símbolos matemáticos y lógicos. En este contexto se hacen referencias explícitas, o no tan explícitas, a convenios científicos que se han ido estableciendo a lo largo del tiempo y que se entremezclan con connotaciones visuales e intuitivas.

1.4 Qué entendemos por interactividad

Hay dos aspectos esenciales en el estudio de los sistemas dinámicos que los computadores actuales permiten y a los que no se les ha prestado una gran atención. Uno de ellos es la visualización a la cual se ha hecho referencia en las secciones previas y el otro es la *interactividad* del usuario con el sistema dinámico, en sus diferentes formas de representación, a través de esta propia visualización. La interactividad es un concepto basado en la bien conocida relación causa-efecto. Se trata de dotar al sistema dinámico de

mecanismos potentes para que el usuario pueda contestar a cualquier pregunta imaginable de los tipos ¿qué pasaría si ...? o ¿se podría hacer que? simplemente actuando sobre los elementos visuales que constituyen la expresión gráfica que lo representa. Con más frecuencia de lo que en un principio se puede pensar, las ideas en ingeniería surgen de situaciones concretas y visuales. La percepción de la realidad es esencialmente visual y no es de extrañar que este soporte esté tan enraizado en la forma de trabajo cotidiana.

Cuando observamos un elemento o un determinado gráfico, generalmente no sólo pensamos en lo que tal elemento representa, sino además qué tipo de actividades o acciones se pueden llevar a cabo haciendo uso del mismo. Es decir, tratamos de buscar alguna interacción con los elementos, donde no solamente se requiere información visual, sino una relación causa-efecto. Esta característica es identificada como interactividad.

A menudo se hace uso de tratamientos simbólicos, diagramas visuales y otras formas de procesos imaginativos mediante los cuales se pretende adquirir una intuición de lo que en su aspecto más formal tiene un contenido mucho más abstracto. Es aquí precisamente donde tiene sentido disponer de entornos potentes y amigables que, utilizando el estado actual de la tecnología informática, permitan la creación de simulaciones dinámicas interactivas con alto contenido visual. La idea de cambiar las propiedades e inmediatamente ser capaz de ver los efectos de los cambios es muy potente, tanto para el análisis como para el diseño. La dinámica de los cambios proporciona información adicional que no está disponible en un gráfico estático.

Bricklin y Frankston llevaron a cabo a finales de los años 70 del siglo pasado un esfuerzo pionero en el uso de la interacción cuando desarrollaron VisiCalc³, que se basaba en la metáfora de una hoja electrónica. VisiCalc contenía una rejilla de filas y columnas de datos accesibles para cálculos financieros. Su implementación en un Apple II fue una de las razones para que los computadores personales se empezaran a utilizar en las empresas. VisiCalc transformó la hoja electrónica de una aplicación de cálculo a una herramienta para el modelado y la simulación. La hoja Excel (que deriva de estas ideas) es hoy día un programa informático estándar en todas las oficinas y empresas.

Las hojas electrónicas eran fáciles de implementar porque sólo operaban sobre números; sin embargo, en control automático se tienen unos objetos gráficos mucho más ricos. La posibilidad de tenerlos todos ellos interconectados de forma que puedan ser manipulados directamente y actualizados de forma interactiva y concurrente tiene un gran potencial para mejorar el aprendizaje. El programa VisiDyn fue una implementación pionera en esta dirección [17]. Otro intento lo realizó Blomdell [6], quien desarrolló un programa para un computador Macintosh de Apple. Su sistema tenía algunas características novedosas como el diagrama gráfico de representación de la estructura de polos-ceros de una función de transferencia. También disponía de una forma original de interaccionar interactivamente sobre los diagramas de Bode. Estos primeros programas resultaron muy útiles, pero su implementación requería un gran esfuerzo, lo que limitaba su utilización como herramientas educativas.

El objetivo por tanto de la interactividad tal y como se trata en este texto es mejorar el aprendizaje, explotando las ventajas de inmediatamente ver los efectos de los cambios que nunca se pueden mostrar mediante imágenes de naturaleza estática, por ejemplo, en una pizarra. Los profesores pueden hacer uso de presentaciones interactivas donde no sólo se muestre el significado de un determinado concepto, sino también cómo ese concepto puede estar relacionado con otros o cómo se puede ver influenciado por determinados factores externos. Para el personal docente, la interactividad aporta un camino para poder evaluar las principales ideas sobre una determinada temática y qué nivel de dificultad pueden presentar tales ideas al alumnado. Por otro lado, los estudiantes pueden hacer uso de sitios web interactivos o herramientas interactivas basadas en computador donde sea posible estudiar conceptos teóricos abstraídos mediante objetos interactivos.

Desde un punto de vista informático, la interactividad puede ser definida como una *cuarta dimensión*.

³ <http://bricklin.com/visicalc.htm>

De esta manera, el refrán *una imagen vale más que mil palabras* podría ser modificado a *una aplicación interactiva vale más que mil imágenes* [20].

Las *herramientas interactivas* se pueden utilizar para investigar precisamente lo que es necesario hacer para que los estudiantes conozcan los conceptos teóricos. De esta manera, la virtud de la sencillez llega a ser un hecho en la investigación del aprendizaje sobre el diseño y la utilización de este tipo de herramientas [11]. Las razones principales por las cuales las herramientas interactivas son útiles para la enseñanza son las siguientes [14]:

- Facilitan el estudio de los alumnos, permitiendo la elección de vías alternativas para el aprendizaje y un mejor control del ritmo al que se introduce el nuevo material.
- Se pueden abordar varios estilos y modalidades de aprendizaje proporcionando una rica variedad de enfoques de enseñanza.
- Motivan la interacción, experimentación y el aprendizaje cooperativo de los estudiantes.
- Pueden ser utilizadas en trabajos y proyectos colaborativos.
- Facilitan argumentos o temáticas de aprendizaje en caso de que se pueda tejer una vía para la exploración en torno a una dinámica de conceptos particular.
- Promueven el punto de vista constructivista del aprendizaje.

La interactividad tiene también sus inconvenientes: los estudiantes pueden tratar de aprender y resolver problemas simplemente manipulando las aplicaciones interactivas, pero sin comprender lo que están haciendo. Las herramientas interactivas deben poner desafíos a los estudiantes haciéndoles que relacionen la teoría con la práctica, pues los objetos interactivos constituyen abstracciones de los conceptos teóricos. Tampoco los profesores deben desarrollar módulos de este tipo sin administrar correctamente los distintos niveles de abstracción (desde la idea que se quiere mostrar usando la interactividad y teniendo en cuenta la perspectiva del estudiante hasta la creación del producto final). Se puede decir que la interactividad puede ser muy útil en el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero debe ser usada con control.

1.5 El papel de la interactividad en la enseñanza del control automático

Los conceptos de visualización e interactividad están tomando cada día más relevancia en la enseñanza del control automático, ámbito en el que las ideas, conceptos y métodos subyacentes son muy ricos en contenidos visuales, que pueden ser representados intuitiva y geoméricamente. Los cálculos y representaciones incluyen respuestas en los dominios temporal y frecuencial, polos y ceros en el plano complejo, diagramas de Bode/Nyquist/Nichols, plano de fase, etc. Frecuentemente, tales magnitudes están fuertemente relacionadas y representan distintas visiones de una misma realidad. La comprensión de estas relaciones es una de las claves para lograr un buen aprendizaje de los conceptos básicos y permite al alumno estar en disposición de realizar diseños de sistemas de control automático con cierto sentido [12].

Tradicionalmente, el diseño de los sistemas se realiza siguiendo un proceso iterativo. Las especificaciones del problema no suelen utilizarse directamente para calcular el valor de los parámetros del sistema, ya que no hay una fórmula explícita que los relacione directamente. Esta es la razón de dividir cada iteración en dos fases. La primera, conocida como *síntesis*, consiste en calcular los parámetros desconocidos del sistema basándose para ello en un conjunto de variables de diseño, que están relacionadas con las especificaciones. Durante la segunda fase, llamada *análisis*, se evalúa el comportamiento del sistema y se compara con las especificaciones. Si no concuerdan, se modifican las variables de

diseño y se vuelve a efectuar una nueva iteración. Es posible sin embargo fusionar ambas fases en una sola, de forma que cuando se modifique un parámetro que afecte al diseño los resultados de análisis se actualicen y observen inmediatamente, o viceversa, que sea posible modificar visualmente elementos representativos del análisis y se obtengan los parámetros de diseño necesarios para alcanzar tales objetivos. De esta forma el proceso de diseño se hace realmente dinámico y el alumno percibe el gradiente del cambio del criterio de comportamiento con respecto a los elementos que manipula. Esta capacidad interactiva permite identificar mucho más fácilmente los compromisos que se pueden lograr.

Los recursos de cálculo y los entornos de programación que se disponen en la actualidad han permitido que surja una nueva generación de programas para el aprendizaje interactivo del control automático. Estas herramientas se basan en objetos que admiten una manipulación gráfica directa. Durante estas manipulaciones, los objetos se actualizan inmediatamente, de manera que las relaciones entre los objetos se mantienen en todo momento. Ictools y CCSdemo, desarrollados en el Departamento de Control Automático de la Universidad de Lund [24, 3] y Sysquake en el Instituto de Automática de la Escuela Politécnica Federal de Lausanne [33] son magníficos ejemplos, entre otros [27, 25, 18], de esta nueva filosofía educativa del control automático.

Para los que inician su formación en el campo del control automático, muchos de los conceptos no son muy intuitivos cuando se abordan por primera vez, ya que sus propiedades se expresan en dos dominios diferentes: El dominio temporal y el dominio frecuencial. La conducta transitoria (p. e. tiempo de establecimiento y sobreoscilación) y el riesgo de saturación se analizan típicamente en el dominio del tiempo; mientras que conceptos como estabilidad, rechazo al ruido y robustez se expresan más fácilmente en el dominio de la frecuencia. Los mecanismos básicos que los relacionan y otros fenómenos, como por ejemplo los efectos del muestreo y la inclusión de no linealidades por citar unos pocos, se pueden ilustrar de una manera muy efectiva mediante la interactividad, como es el caso de las aplicaciones incluidas con este texto.

1.6 Objetivos del libro: Componentes y estructuras de las herramientas interactivas

Objetivos y estructura de libro

Muchos planes de estudios de ingeniería sólo disponen de un curso introductorio de control automático, que suele desarrollarse en un semestre. Estos cursos de iniciación contienen un gran número de nuevos conceptos a asimilar por los estudiantes, a los que resulta en general muy complicado obtener un conocimiento profundo de la materia. Esto plantea también un reto para los profesores.

Un objetivo de este texto es promover el estudio continuado y potenciar el trabajo individual del estudiante a través de un conjunto de materiales interactivos, que son útiles tanto para el profesor como para los alumnos. Más que en los conceptos a introducir, el libro se ha centrado en cómo presentar cada uno de ellos. Una vez que se han identificado las ideas que son relevantes, se ha estudiado la manera de visualizarlas y formularlas siguiendo un aprendizaje basado en ejemplos.

El papel de esta nueva experiencia de aprendizaje interactivo en planes de estudios con asignaturas de control automático es doble [12]:

- Proporcionar un nuevo método para generar material de clase que permita introducir los conceptos de ingeniería de control de sistemas a través de aplicaciones interactivas.
- Proporcionar una nueva oportunidad para innovar en trabajos de laboratorio donde los estudiantes puedan analizar, diseñar y modificar sistemas de ingeniería de control a través de herramientas interactivas.

Tras el análisis de un curso completo, se han diseñado un conjunto de *herramientas interactivas*, que están compuestas por:

- Una aplicación gráfica que visualiza cada concepto e incluye numerosos objetos interactivos con el fin de potenciar la interacción con la aplicación.
- La aplicación incorpora un conjunto de ejemplos predefinidos que ilustran algún fenómeno concreto o particularidad del concepto introducido.
- Cada aplicación está acompañada de un resumen teórico que presenta el concepto formal y analíticamente. No es su objetivo sustituir al libro de texto. Por ello, los contenidos teóricos se reducen a lo mínimo necesario para entender la aplicación concreta. Contiene referencias a libros específicos (indicando páginas y capítulos) para que los usuarios amplíen sus conocimientos.
- Las aplicaciones han sido diseñadas para que sean autocontenidas, por lo que el resumen incluye un pequeño manual de la aplicación que describe todas sus funcionalidades. El texto puede resultar al lector algo repetitivo, pero se ha pretendido que la comprensión de cada herramienta interactiva no requiera haber trabajado previamente con otras.
- La documentación contiene diferentes ejercicios que deben ser resueltos utilizando la aplicación. El objetivo de estos ejemplos es guiar inicialmente los pasos del estudiante para reducir el tiempo requerido para aprender cada uno de los conceptos y enfatizar los puntos importantes. Los objetivos siguen un enfoque de aprender descubriendo y pretenden combinar el conocimiento cualitativo obtenido mediante la interactividad con un conocimiento cuantitativo obtenido mediante los diferentes ejemplos. Una vez realizados los ejercicios, el usuario estará en disposición de crear sus propios escenarios y autoevaluar los conocimientos adquiridos.
- En el menú de información (Info), cada aplicación incluye la dirección web del libro, donde se actualizarán las herramientas y el material asociado a las mismas (www.pearson.es/fichas_interactivas).

Como complemento a la información previa, se incluyen brevemente a continuación una serie de datos relacionados con la forma en la que se han desarrollado las herramientas:

- Se ha utilizado SysQuake [33] como herramienta de desarrollo debido a su lenguaje de programación, muy cercano al estándar de facto, Matlab. La interactividad está completamente integrada en el lenguaje. Esto proporciona un marco de desarrollo de alto nivel que es muy conveniente para programadores no profesionales.
- Las aplicaciones contienen un gran número de componentes comunes, como el editor de señal de entrada, o el editor de polos y ceros, que se han incluido en una biblioteca utilizada por todas las aplicaciones. Esto simplifica el desarrollo y mantenimiento del conjunto de herramientas.
- Las aplicaciones son ligeras y se distribuyen mediante ejecutables que no requieren preinstalación para Windows, Mac OS y Linux.

Los contenidos se han diseñado de acuerdo con los conceptos necesarios para un curso de introducción a las técnicas de control clásico, centrándose sobre todo en aquéllos que presentan una visualización gráfica y que pueden ser objeto de interacción. Las aplicaciones cubren los siguientes campos:


- **De los modelos físicos no lineales a los modelos lineales.** Está compuesto por una aplicación (un tanque con líquido y descarga a la atmósfera) que describe cómo se relacionan los modelos físicos, generalmente no lineales, con los modelos lineales utilizados en las técnicas básicas de control. Además, esta aplicación se utiliza para describir el concepto de comportamiento lineal en torno a un punto de equilibrio.

- **Respuesta temporal.** Este grupo contiene siete herramientas interactivas destinadas a ilustrar la respuesta temporal de los sistemas lineales de tiempo continuo. Se ha incorporado también una aplicación que permite ajustar modelos lineales a partir de datos experimentales.
- **Respuesta en frecuencia.** Incluye ocho herramientas interactivas cuyo objetivo es ilustrar el concepto de respuesta frecuencial. Se introducen, también, las principales representaciones de la misma y una aplicación que permite ajustar interactivamente modelos a partir de diagramas de Bode obtenidos experimentalmente.
- **Relación de los parámetros de los modelos con los modelos físicos.** Utiliza el mismo ejemplo del tanque con líquido y descarga atmosférica comentado anteriormente para ilustrar la relación entre los modelos de la física y los principales elementos de los modelos utilizados en el diseño de controladores tales como polos, ceros y respuesta temporal.
- **Sistemas de lazo cerrado y estabilidad.** Se introducen las principales técnicas de análisis de la estabilidad de sistemas lineales en lazo cerrado: Lugar geométrico de las raíces, criterio de Nyquist y márgenes de fase y ganancia. Se incluye también una herramienta interactiva que ilustra las limitaciones que impone un tiempo de retardo en un lazo de realimentación.
- **Diseño de sistemas de control.** Este capítulo agrupa el análisis de errores en estado estacionario en sistemas con realimentación unitaria y las principales técnicas de diseño de controladores utilizadas en cursos introductorios, tanto en el dominio frecuencial como temporal, tratadas en diez herramientas.
- **Control de sistemas físicos.** Se estudia el diseño de controladores y la simulación del sistema en lazo cerrado para el ejemplo del tanque con descarga atmosférica.
- **Introducción al control en el espacio de estados.** Finalmente, se incluye una herramienta que no sigue la tónica de las anteriores, pues se ilustran múltiples nociones en una única aplicación. El objetivo de los autores en este caso ha sido facilitar al usuario la comprensión y el aprendizaje incremental de las ideas derivadas del uso de una representación del sistema en el espacio de estados, como una primera toma de contacto con los conceptos subyacentes al uso de la representación interna, que tendrían que ser objeto de un texto completo. De hecho, la aplicación se centra en sistemas de segundo orden, para facilitar la visualización de dichos conceptos.

Cabe de nuevo destacar que el texto no está restringido y orientado a una lectura secuencial por capítulos, como suele ser habitual en un libro de texto convencional. El usuario puede localizar el concepto que desea analizar en el índice y dirigirse a la ficha autocontenida donde se trata dicho concepto.

Distribución de elementos y objetos interactivos en las herramientas

En esta sección se van a explicar someramente los tipos de objetos interactivos, elementos gráficos y de texto que contienen las herramientas interactivas, así como su distribución espacial.

Los objetos interactivos se caracterizan porque cuando se coloca el puntero del ratón sobre ellos, cambia su forma de representación a una mano  que indica que dicho elemento es interactivo.

Además de los elementos interactivos, se utilizarán otros que no lo son, como representaciones simbólicas de fórmulas o funciones de transferencia, leyendas en las gráficas, etc., que ayuden a la comprensión de los conceptos que se pretenden analizar con las herramientas. En cualquier caso, los valores asociados a estos elementos pueden modificarse a medida que lo hagan otros ligados a elementos interactivos.

Distribución de ventanas gráficas en las herramientas. Las treinta y cuatro herramientas interactivas que se utilizan en este texto han sido diseñadas siguiendo unos patrones determinados para la distribución de los objetos en la pantalla (patrones que a su vez guardan muchas similitudes entre sí):

Patrón 1. Fichas relativas a sistemas físicos. La organización en este patrón por cuadrantes es:

Parámetros interactivos y ecuaciones	Respuesta temporal del sistema
Mímico del proceso	Señal de entrada al sistema

La Tabla 1.1 incluye como ejemplo de este patrón la herramienta [2.1. tanque_linealización](#).

Patrón 2. Fichas sobre análisis de la respuesta temporal, diseño en el dominio temporal, lugar de las raíces y espacio de estados. La organización de las herramientas interactivas asociadas a este patrón siguen la misma estructura (con pequeñas diferencias en el tamaño de los objetos), mostrándose como ejemplo en la Tabla 1.1 las correspondientes a las herramientas [3.2. t_segundo_orden](#) y [7.10. PI_cancelación](#):

Parámetros interactivos, características y ecuaciones	Respuesta temporal del sistema
Representación polo-cero	Señal de entrada al sistema

Patrón 3. Fichas de análisis de la respuesta frecuencial. La organización de todas las herramientas interactivas asociadas a este patrón (se incluye en la Tabla 1.1 la correspondiente a la herramienta interactiva [4.3. f_segundo_orden](#)) siguen la misma estructura:

Parámetros interactivos, características y ecuaciones	Diagrama de magnitud de Bode
Representación polo-cero	Diagrama de fase de Bode

Este grupo de fichas tiene una distribución uniforme en la que la principal herramienta de trabajo (el diagrama de Bode) ocupa toda la parte derecha de la herramienta, por lo que su distribución es óptima para que el usuario pueda analizar los conceptos asociados.

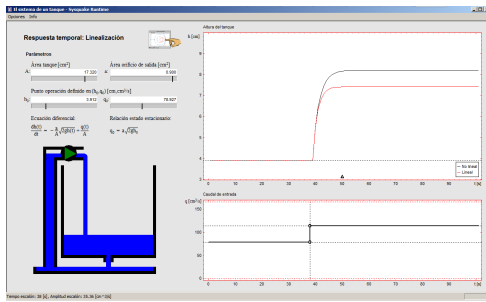
Patrón 4. Fichas de análisis de la respuesta frecuencial (incluyendo respuesta temporal en lazo abierto), análisis de estabilidad y régimen permanente y diseño en el dominio de la frecuencia. La organización de todas las herramientas interactivas asociadas a este patrón siguen la misma estructura (la Tabla 1.1 presenta como ejemplo de este grupo las herramientas [4.1. f_concepto](#) y [7.5. f_diseño_avance](#)):

Parámetros interactivos, características y ecuaciones	Diagramas de frecuencia seleccionables
Representación polo-cero	Respuesta temporal (ocultable)

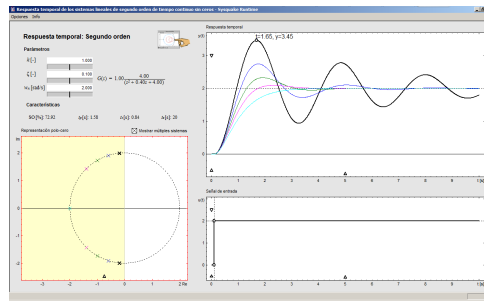
En este grupo de fichas se incluyen todas aquéllas en las que los elementos fundamentales son las representaciones en el dominio de la frecuencia, pero puede tener interés para el usuario analizar también la respuesta de sistema en lazo abierto (4.a) o en lazo cerrado (4.b), ocupando estas representaciones un área distinta en la pantalla (más pequeña en el caso de las de lazo abierto). Por defecto, al arrancar la herramienta, en todas las representaciones aparecerá la curva de respuesta temporal en el cuadrante inferior derecho, pero existirá una entrada en el menú Opciones (que se explica posteriormente) que posibilita ocultarlas para aumentar el tamaño de las representaciones frecuenciales (Bode, Nyquist, Nichols o las cuatro a la vez).

En el patrón 4.b., la opción del menú Opciones de mostrar la respuesta temporal habilita (a demanda del usuario) la evolución de la salida del sistema o bien de la entrada.

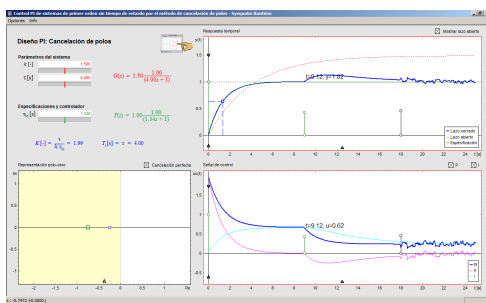
12 · Capítulo 1. Introducción



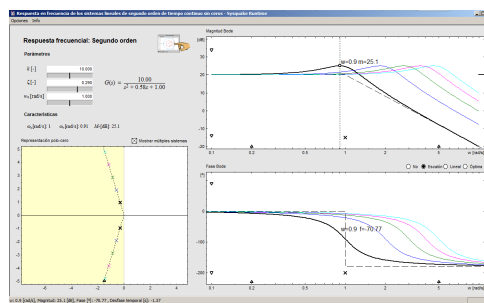
Patrón 1. Fichas relativas a sistemas físicos



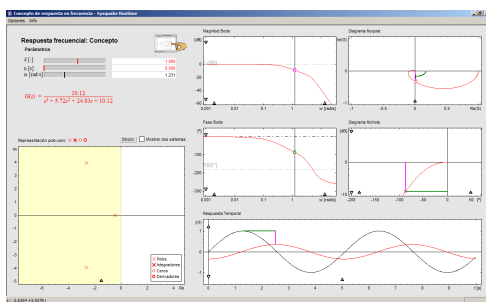
Patrón 2.a. Análisis en lazo abierto



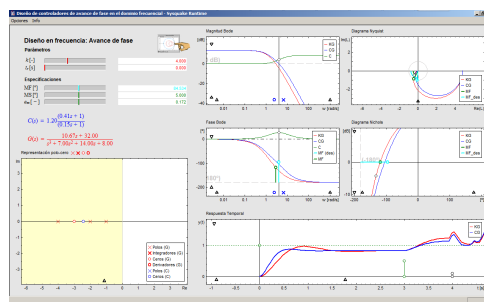
Patrón 2.b. Análisis en lazo cerrado



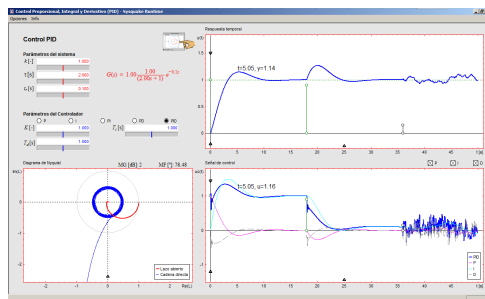
Patrón 3. Fichas de análisis de la respuesta frecuencial



Patrón 4.a. Análisis en lazo abierto



Patrón 4.b. Respuestas en lazo cerrado



Patrón 5. Fichas sobre conceptos asociados a los controladores PID

Tabla 1.1 Ejemplos típicos de distribución de objetos en las herramientas interactivas

Patrón 5. Fichas sobre conceptos asociados a los controladores PID y a la presencia de retardos. La organización de todas las herramientas interactivas asociadas a este grupo (la Tabla 1.1 presenta como ejemplo la herramienta 7.3. [concepto_PID](#)) siguen la misma estructura, siendo la principal diferencia la sustitución de la representación polo-cero por el diagrama de Nyquist.

Parámetros interactivos, características y ecuaciones	Respuesta temporal del sistema
Diagrama de Nyquist	Señal de entrada al sistema

Códigos de colores. El orden del código de colores que está incluido en la biblioteca sobre la que se implementa la herramienta interactiva es: **Rojo**, **azul**, **verde**, **magenta** y **celeste**.

En las fichas de análisis de la respuesta temporal y frecuencial, por omisión, el color que se utiliza para la representación del texto y las gráficas asociado a un determinado sistema es el negro. Cuando se lleva a cabo la representación de dos sistemas simultáneamente, los colores representativos son el **rojo** y el **azul**. Cuando se visualizan múltiples sistemas se sigue el orden incluido en la biblioteca indicado previamente y se utiliza el color negro para indicar el sistema activo, es decir, aquél que representa los valores actuales de los parámetros.

En el caso de las fichas de diseño, se utiliza:

- El color **rojo** para representar la función de transferencia del sistema en lazo abierto, dibujándose también en color rojo su respuesta temporal en trazo discontinuo y su respuesta frecuencial en trazo continuo.
- El color **azul** para representar la función de transferencia del controlador, dibujándose en trazo grueso la respuesta temporal del lazo cerrado que determina dicho controlador y en trazo fino la respuesta en frecuencia de la cadena directa en los diagramas frecuenciales.
- El color **verde** para representar la respuesta en frecuencia del controlador, la función de transferencia en lazo cerrado que define las especificaciones y su curva de respuesta temporal asociada en trazo continuo. La referencia se dibuja en trazo discontinuo.
- El color **magenta** se emplea para representar otras curvas, por ejemplo, el lugar de las raíces.

También se utilizan esos colores para indicar alguna métricas de comportamiento y estabilidad, como desfases, márgenes de estabilidad relativos, etc. (los detalles se proporcionarán en cada ficha).

Menú Opciones. En la barra superior de las herramientas aparece un menú desplegable con distintas opciones. En todos los casos incluye la denominada **Reset**, que permite llevar a la herramienta a sus condiciones iniciales (las que tenía al iniciarla). Se ha intentado uniformizar en la medida de lo posible la información que se representa en este menú, siendo las opciones más comunes las que se presentan en la Tabla 1.2, que se explicarán en detalle en cada ficha.

Menú Info. En la barra superior de todas las herramientas existe un menú desplegable que incluye información sobre las mismas en dos submenús:

- **Acerca de ...** proporciona información sobre título y autores del libro.
- **Ayuda ...** proporciona la dirección de la página web del libro (www.pearson.es/fichas_interactivas) donde se irán actualizando las herramientas interactivas, el glosario, la bibliografía y el material auxiliar de apoyo.






Opciones		Herramientas que lo incorporan
Efecto ganancia		3.1. t_primer_orden
Efecto constante tiempo		4.2. f_primer_orden
Efecto factor amortiguamiento	Parte imaginaria constante	3.2. t_segundo_orden
Efecto frecuencia no amortiguada	Parte real constante	4.3. f_segundo_orden
$P1(s)=k/s^n$	$P_1(s) = \frac{k}{s^n}$	3.5. t_genérico
$P2(s)=k/(Ts+1)$	$P_2(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)}$	4.1. f_concepto
$P3(s)=k(bs+1)/s^n$	$P_3(s) = \frac{k(\beta s + 1)}{s^n}$	4.6. f_genérico
$P4(s)=k(bs+1)/(Ts+1)$	$P_4(s) = \frac{k(\beta s + 1)}{(\tau s + 1)}$	4.7. f_fase_no_mínima
$P5(s)=k/(s(Ts+1))$	$P_5(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)}$	6.1. lugar_raíces
$P6(s)=k(bs+1)/(s(Ts+1))$	$P_6(s) = \frac{k(\beta s + 1)}{s(\tau s + 1)}$	6.2. criterio_Nyquist
$P7(s)=k(bs+1)/((T1s+1)(T2s+1))$	$P_7(s) = \frac{k(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	6.3. márgenes
$P8(s)=k/(s(T1s+1)(T2s+1))$	$P_8(s) = \frac{k}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$	7.1. estado_estacionario
$P9(s)=k/((T1s+1)(T2s+1)(T3s+1))$	$P_9(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$	7.3. concepto_PID
$P10(s)=k \omega_n^2/(s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2))$	$P_{10}(s) = \frac{k\omega_n^2}{s(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	7.4. f_diseño_retraso
$P11(s)=k \omega_n^2/((Ts+1)(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2))$	$P_{11}(s) = \frac{k\omega_n^2}{(\tau s + 1)(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	7.5. f_diseño_avance
$P12(s)=k \omega_n^2 (bs+1)/(s(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2))$	$P_{12}(s) = \frac{k\omega_n^2(\beta s + 1)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$	7.6. f_diseño_avance_retraso
$Pir(s), i=1..12$	$P_{ir}(s), i = 1..12, P_{ir} = P_i e^{-tr s}$	7.7. lr_diseño_retraso
Nota: Las herramientas en azul claro sólo incorporan como ejemplos algunas de las $P_i(s)$		7.8. lr_diseño_avance
p.e. la herramienta 9.1. espacio_estados incluye las plantas hasta segundo orden		9.1. espacio_estados
Introducir Planta (NUM,DEN)		3.5. t_genérico
Introducir Planta (ZPK)		3.6. t_dominancia
Permiten definir ejemplos de plantas en los formatos de Matlab		4.1. f_concepto
(NUM,DEN): Numerador y denominador en formatos polinomiales tipo		4.6. f_genérico
$G(s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + \dots + a_1 s + a_0} \rightarrow [bm, \dots, b1, b0], [an, \dots, a1, a0]$		4.7. f_fase_no_mínima
ZPK: Formatos cero, polo, ganancia, de la forma		6.1 lugar_raíces
$G(s) = \kappa \frac{(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} \rightarrow [z1; z2], [p1; p2; p3], k.$		6.2. criterio_Nyquist
Los polos o ceros complejos se introducen en el formato [x+yj;x-yj]		6.3. márgenes
Diagrama de Bode		7.1. estado_estacionario
Diagrama de Nyquist		4.1. f_concepto
Diagrama de Nichols		7.4. f_fase_no_mínima
Vista completa		7.2. concepto_avance_retraso
Representaciones gráficas de la respuesta frecuencial		7.4. f_diseño_retraso
		7.5. f_diseño_avance
		7.6. f_diseño_avance_retraso
Nota: La ficha 7.2. concepto_avance_retraso además incluye una opción para conmutar el diagrama de Nichols a una gráfica de respuesta temporal (Respuesta escalón)		7.7. lr_diseño_retraso
		7.8. lr_diseño_avance

Tabla 1.2 Menú Opciones

Opciones		Herramientas que lo incorporan
Experimento i , $i = 1, \dots, 4$		3.7. t_ajuste_modelos
Selecciona datos experimentales		4.8. f_ajuste_modelos
Analizar dominancia	Ejemplo dominancia 1	3.6. t_dominancia
Relación de dominancia	Ejemplo dominancia 2	
Red de retraso	Varias redes de avance	7.2. concepto_avance_retraso
Red de avance	Redes de retraso vs avance	7.6. f_diseño_avance_retraso
Varias redes de retraso		
Triángulo	Escalón especificación	7.7. lr_diseño_retraso
LR original		7.8. lr_diseño_avance
Precisión	Cancelación	7.7. lr_diseño_retraso
Equidistribución		7.8. lr_diseño_avance
Respuesta temporal	Introducir planta (A,B,C)	9.1. espacio_estados
Plano de fase		

Tabla 1.2 Menú Opciones (continuación)

Elementos interactivos asociados a la selección de valores y opciones

- **Cuadros de texto** (*textboxes*) : Permiten modificar el valor de un determinado parámetro introduciéndolo directamente a través de teclado. Al pinchar con el ratón en el cuadro, se resalta el texto (con fondo amarillo). Al introducir el nuevo texto hay que pulsar *enter* y se refrescará el nuevo valor en toda la herramienta. Se usa el punto (no la coma) como separador decimal.
- **Barras de desplazamiento** (*sliders*) : Se utilizan para cambiar el valor de un determinado parámetro. Si se desplazan hacia la derecha se incrementa el valor del parámetro y si lo hacen hacia la izquierda disminuye su valor. Suelen tener un intervalo finito. Por ejemplo, la ganancia estática de las funciones de transferencia está limitada superior e inferiormente al valor ± 10 .
- **Botones circulares de selección excluyente** (*radiobuttons*) : Se utilizan para activar con el ratón una determinada opción (alternativa o excluyente a la que se esté utilizando).
- **Cuadros de selección** (*pushbuttons*) : Se usan para activar con el ratón una determinada opción.
- **Botones de activación** : Sirven para realizar una acción determinada.

Elementos interactivos asociados a las representaciones gráficas

Comunes a todas las representaciones

- **Cambio de escala en gráficas** Δ , ∇ : Los triángulos se utilizan para cambiar el fondo de escala de las gráficas. En los triángulos que aparecen asociados al eje de abscisas (Δ), pulsando a derecha o izquierda de los mismos se produce un aumento o reducción del fondo de escala de ese eje. En el caso del eje de ordenadas, pulsando sobre el símbolo ∇ se incrementa el valor superior del intervalo de valores. Pulsando bajo el símbolo, se produce una reducción del valor superior del rango. Del mismo modo, si se pulsa sobre el símbolo (Δ), se produce una disminución del valor mínimo de la escala del eje y , mientras que si se pulsa bajo el símbolo, el valor inferior de la escala aumenta (en valor absoluto).

- **Líneas interactivas:** En los gráficos de sistemas físicos, las líneas que delimitan los objetos que los componen suelen tener un grosor mayor (→) que suele indicar que se trata de objetos interactivos (además de por el cambio de representación del cursor) y que por tanto se pueden modificar las dimensiones del objeto gráfico directamente mediante una operación de arrastre del ratón.

Asociados a la representación en el plano s y al lugar geométrico de las raíces

- **Polos:** Los polos de un sistema dinámico se describen mediante un aspa: ×.
- **Ceros:** Los ceros de un sistema dinámico se representan mediante un círculo: ○.
- **Integradores:** Se simbolizan mediante un aspa en trazo grueso: ×.
- **Derivadores:** Se dibujan mediante un círculo en trazo grueso: ○.
- **Polos del lazo cerrado:** Se representan por el símbolo △.
- **Polos del lazo cerrado deseados** (derivados de las especificaciones): Se representan por un cuadrado de color verde (□).
- **Centroide** del lugar de las raíces: La intersección de las asíntotas lineales tiene como representación simbólica el símbolo ◇.
- **Puntos de salida o entrada del eje real del lugar de las raíces**, donde el lugar deja o llega al eje real, se representan por el símbolo ◻.

Asociados a la representación temporal

- **Punto característico de la respuesta:** Pueden existir puntos característicos de la respuesta a los que se pueda asociar un comportamiento interactivo, como el caso de la constante de tiempo en sistemas de primer orden, sobreoscilación en sistemas de segundo orden, etc. Dichos puntos se suelen representar por un círculo (○) asociado a un punto determinado de la respuesta temporal y permiten modificar la forma de dicha respuesta.
- **Entrada exógena** (⇨): En la representación temporal de sistemas (gráficas de la salida y la entrada) pueden aparecer líneas verticales y horizontales discontinuas con círculos que permiten modificar la amplitud del escalón usado como entrada en lazo abierto o referencia en lazo cerrado (○⋯⋯) y la perturbación de carga en forma de escalón (○). Estas señales se miden sobre los ejes de las gráficas en las que se representan, además de mostrarse sus valores asociados (instante de activación y amplitud) en la esquina inferior izquierda de la herramienta. La varianza de la señal de ruido también se representa con el mismo símbolo (○). Cuando se arrastra en dirección vertical, el valor de dicha varianza se muestra en la esquina inferior izquierda de la herramienta, no siendo en este caso válidos los ejes de las gráficas porque proporcionarían un valor del ruido con poco sentido físico. La fórmula implementada en la herramienta para el generador de ruidos en forma de ecuación en diferencias viene dada por [19]:

$$x(t_i) = 0.7x(t_{i-1}) + \sqrt{0.5\sigma^2} \text{ randn}$$

donde el subíndice i representa instantes discretos del tiempo, σ es la varianza del ruido y randn es un generador de números aleatorios normalmente distribuidos.

Cuando se separan del eje de tiempos los círculos que determinan la amplitud de la señal, los círculos que permanecen en dicho eje se utilizan para cambiar el instante en el cual se introduce la perturbación o el ruido.

Asociados a la representación frecuencial

- **Punto característico de la respuesta:** Pueden existir puntos característicos de la respuesta a los que se pueda dotar de un comportamiento interactivo.
 - En el caso de la ganancia de baja frecuencia, el elemento interactivo que aparece es un guión (-) asociado al eje de magnitud logarítmica.
 - La frecuencia ligada a la posición de un polo en los diagramas de Bode (frecuencia esquina de las asíntotas representativas) se suele representar mediante un aspa (×) colocada sobre el eje de frecuencia, mientras que la asociada con un cero se dibuja con un círculo (○).
 - También pueden representarse puntos característicos de la respuesta, como por ejemplo un pico de resonancia o un margen de estabilidad relativo. Para dotarlos de interactividad, se usa un círculo negro (◐) ligado a dicho punto. Estos puntos característicos son los que facilitan la modificación de la forma de la respuesta frecuencial en las gráficas correspondientes.
 - Los puntos de diseño de máxima o mínima magnitud y fase de redes de adelanto y retraso de fase se simbolizan mediante un cuadrado verde (◻). La frecuencia de diseño y el margen de seguridad se dibujan usando un diamante verde y blanco respectivamente (◊, ◊).

2

De los modelos físicos no lineales a los modelos lineales

Introducción

Un *sistema dinámico* es aquél que evoluciona con el tiempo y en el que los efectos de una determinada acción que se ejerza sobre él no ocurren de forma instantánea. Son por tanto sistemas cuya respuesta evoluciona en el tiempo con memoria de la respuesta pasada.

Los sistemas disponen de *entradas*, entendidas como datos, energía o materia que reciben del exterior y *salidas*, que proporcionan información, energía o materia procedente del sistema. Además, están sometidos a *perturbaciones*, entendidas como una clase de entradas que afectan a las salidas del sistema pero no son manipulables, es decir, no se puede determinar su valor en cualquier momento. Son en general señales no deseadas que corrompen la entrada o la salida de una planta o proceso.

Para comprender y poder realizar predicciones sobre el comportamiento de un sistema dinámico, se utilizan representaciones matemáticas denominadas *modelos*. Un sistema dinámico puede ser modelado de múltiples maneras. En general, en una primera clasificación se distingue entre *modelos basados en primeros principios* (balances de masa, energía y momento) y *modelos basados en datos experimentales*. En ambos casos se pueden obtener modelos *no lineales* o modelos *lineales*, que se tratarán a continuación. La complejidad y precisión de los modelos dependerá de cuál sea su finalidad (simulación, diseño de controladores, ...) y del propio sistema dinámico a modelar.

En este capítulo se van a introducir los conceptos asociados a la obtención de modelos lineales de un sistema dinámico procedentes del modelado basado en primeros principios. Siguiendo la filosofía del aprendizaje basado en ejemplos, se ha escogido un sistema *monovariante*¹ muy didáctico (tanque lleno de líquido con descarga a la atmósfera) para introducir distintos conceptos, como el modelado basado en ecuaciones diferenciales no lineales, estado o punto de equilibrio, linealización usando un desarrollo en serie de Taylor, modelo lineal y simulación del comportamiento dinámico.

Los sistemas dinámicos que fundamentalmente se utilizarán en este libro (y sus modelos) son lineales, invariantes en el tiempo y causales:

- Un *sistema lineal* es aquél que obedece las propiedades de escalado (homogeneidad²) y de superposición (aditiva), mientras que un *sistema no lineal* es cualquier sistema que no cumple al menos una de estas propiedades. Los sistemas lineales cumplen el *principio de superposición*:

¹Con una sola variable de entrada y una sola variable de salida. La denominación inglesa extendida para esta clase de sistemas es SISO (*Single-Input-Single-Output*).

²Es la propiedad de un sistema por la cual una entrada escalada resulta en una salida igualmente escalada.

- La respuesta de un sistema a una señal de entrada $u(t)$ formada por la suma de dos o más señales ($u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_n(t)$) es igual a la suma de las respuestas del sistema a cada una de las señales ($y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \dots + y_n(t)$).
- La respuesta de un sistema a una señal $Ku(t)$ es igual a K veces la respuesta a $u(t)$.
- Un sistema es *invariante en el tiempo* cuando la respuesta $y(t)$ depende sólo de la forma de la entrada $u(t)$ y no del tiempo en que se aplica. Matemáticamente, si $L(u(t)) = y(t)$, entonces $L(u(t - t_0)) = y(t - t_0)$, donde $L(\cdot)$ es un operador matemático que representa al sistema físico en cuestión. En los sistemas invariantes en el tiempo, los coeficientes de la ecuación diferencial que los modela son constantes.
- Un *sistema causal* es aquél que es no-anticipativo, es decir las salidas dependen de entradas presentes y pasadas, pero no de entradas futuras. En este libro se utilizará indistintamente la denominación de *sistema causal* o *sistema propio*. Los sistemas *estrictamente causales* o *estrictamente propios* sólo dependen de las entradas pasadas.

Los *estados* de un sistema dinámico se definen como una colección de variables que resumen el pasado dinámico del mismo y permiten predecir su comportamiento futuro si se conocen las entradas futuras. En sistemas físicos, el estado está compuesto por variables que representan almacenamiento de masa, energía y momento. Como se analizará en el Capítulo 9, las *variables de estado* forman parte de un vector $x \in \mathbb{R}^n$ llamado *vector de estado* [2]. Un sistema dinámico con una única entrada $u(t)$ y una única salida $y(t)$ puede ser representado por una ecuación diferencial ordinaria de la forma:

$$\frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)), \quad y(t) = h(x(t), u(t)) \quad (2.1)$$

donde $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ y $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones sin discontinuidades, siendo n la dimensión del vector de estado (*orden del sistema*). A una representación de este tipo se conoce como *modelo en espacio de estados*.

Retomando la definición de sistema causal o propio, si la función h no depende de la entrada, es decir, si la transformación de salida se puede escribir de la forma $y(t) = h(x(t), t)$, entonces se dice que el sistema es *estrictamente propio* o *puramente dinámico* [7], porque la salida no depende directamente de la entrada, sino sólo a través del estado.

Cuando las funciones f y h no dependen explícitamente del tiempo se tratará de un sistema invariante en el tiempo. La función f proporciona la velocidad de cambio del vector de estado como una función del estado $x(t)$ y de la señal de control $u(t)$ y la función h proporciona los valores medidos de la salida como función del estado $x(t)$ y la entrada $u(t)$ [2]. Dichas funciones determinan la *respuesta transitoria*, que es la componente de la respuesta del sistema que desaparece con el tiempo [9].

Para un sistema como el descrito por las ecuaciones (2.1), se dice que (x_e, u_e) es un *estado (punto) de equilibrio* si $f(x_e, u_e) = 0$. Cuando todos los constituyentes del transitorio de la repuesta han decaído la salida del sistema alcanza un *estado estacionario*. Un estado de equilibrio es una solución de (2.1) en estado estacionario caracterizada por una posición u oscilación constantes. En este último caso el estado del sistema se denomina de *régimen permanente*.

Si las funciones f y h son lineales en x y u , el sistema será lineal e invariante en el tiempo y su representación vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} = \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

La primera ecuación es la denominada *ecuación de estado* y la segunda *ecuación de salida*. En dicha representación A, B, C y D son matrices de coeficientes constantes. La matriz A se denomina *matriz dinámica*, B es la *matriz de control*, C es la *matriz del sensor* y D es el *término directo*, que habitualmente es igual a cero porque de no serlo proporcionaría sistemas no estrictamente causales en los que un cambio en la entrada se vería reflejado directamente en la salida [2].

El paso de un modelo general no lineal descrito por la ecuación (2.1) a uno lineal como el descrito por la ecuación (2.2) se puede realizar a través de un proceso de *linealización*, que permite aproximar una ecuación diferencial no lineal por una ecuación diferencial lineal que modela la dinámica del sistema en torno al equilibrio. Se obtiene eliminando los términos de segundo orden y orden superior del desarrollo en serie de Taylor (en el punto de equilibrio) del término de la derecha de la ecuación (2.1), que viene dado por³:

$$\begin{aligned}
 f(x(t), u(t)) &\approx f(x_e, u_e) + \left(\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \Big|_{(x_e, u_e)} (x - x_e) + \frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \Big|_{(x_e, u_e)} (u - u_e) \right) + \\
 &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial x^2} \Big|_{(x_e, u_e)} (x - x_e)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial x \partial u} \Big|_{(x_e, u_e)} (x - x_e)(u - u_e) + \right. \\
 \text{se eliminan} \quad &\left. + \frac{\partial^2 f(x, u)}{\partial u^2} \Big|_{(x_e, u_e)} (u - u_e)^2 \right) + \text{términos de orden superior} \quad (2.3)
 \end{aligned}$$

Una representación alternativa a la que proporciona el espacio de estados es un *modelo entrada-salida* basado en una ecuación diferencial lineal de orden n .

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) = u(t) \quad (2.4)$$

donde n es el orden del sistema, t es la variable independiente (tiempo), $y(t)$ es la variable dependiente (salida) y $u(t)$ es la entrada. La notación $d^k y(t) / dt^k$ se utiliza para indicar la derivada k -ésima de y respecto al tiempo [2].

Las representaciones (2.2) y (2.4) son equivalentes. Existen infinitos sistemas de n ecuaciones diferenciales de primer orden (representación en espacio de estados) equivalentes a una ecuación diferencial lineal de orden n .

Además, en el caso en que el sistema sea de primer orden, las dos representaciones son iguales si se considera que el estado coincide con la salida del sistema.

³Se obvia la dependencia con el tiempo para facilitar la comprensión.

2.1 El sistema de un tanque

Herramienta interactiva: [2.1. tanque_linearización](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Obtención de modelos de sistemas a partir de balances de masa.
- Linealización de modelos no lineales mediante desarrollo en serie de Taylor. Definición del estado o punto de equilibrio y de modelos de desviación en un entorno de dicho punto de equilibrio.
- Efecto de los parámetros del sistema físico y elección del estado de equilibrio en la respuesta dinámica a un escalón.

Teoría La mayoría de los sistemas presentan un comportamiento descrito por leyes físicas que son, en general, no lineales. Aunque existen teorías más generales, la más popular y más implantada industrialmente es la correspondiente al control lineal. Como consecuencia de ello, las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema deben ser linealizadas antes de aplicar las técnicas de control lineal. Esta *aproximación lineal* se realiza habitualmente mediante la aproximación del campo vectorial no lineal por su desarrollo en serie de Taylor alrededor de un estado de equilibrio. Esta aproximación depende de los parámetros del sistema y el estado de equilibrio específico, siendo únicamente correcta en un entorno de dicho punto de equilibrio. El control de nivel de un sistema de tanques [23] o de un solo tanque [21] es un problema de modelado y control que goza de gran popularidad. Este sistema está compuesto por un tanque de líquido con orificio de salida o sección de descarga, al cual entra un caudal variable de fluido mediante la acción de una bomba (actuador⁴).

Este sistema viene descrito por la siguiente ecuación diferencial no lineal [23], que modela la conservación de la masa:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q(t) - a\sqrt{2gh(t)} \quad (2.5)$$

donde $h(t)$ representa la altura del agua del tanque, A el área o sección del tanque, a el área del orificio de salida, g la aceleración de la gravedad a nivel del mar y $q(t)$ el caudal de entrada.

Para un estado estacionario ($dh(t)/dt = 0$) caracterizado por $h_0 = h(t)|_{t \rightarrow \infty}$ y $q_0 = q(t)|_{t \rightarrow \infty}$, a partir del modelo dado por la ecuación (2.5) se deduce la condición de equilibrio⁵:

$$q_0 = a\sqrt{2gh_0} \quad (2.6)$$

Dado que el modelo (2.5) es no lineal, se procede a linealizar dicho modelo en un entorno del punto de operación dado por (h_0, q_0) . Las variables del sistema $h(t)$ y $q(t)$ se representan entonces como la suma del valor de estado estacionario que define el punto de operación (h_0, q_0) con el valor de la *variable de desviación* en torno a ese estado de equilibrio $(\bar{h}(t), \bar{q}(t))$:

$$h(t) = h_0 + \bar{h}(t) \quad (2.7)$$

$$q(t) = q_0 + \bar{q}(t) \quad (2.8)$$

⁴Los actuadores son los dispositivos que proporcionan la potencia motriz al proceso y por tanto encargados de convertir la señal de control en la variable manipulada.

⁵Se usa la notación (h_0, q_0) en lugar de (h_e, q_e) porque ese equilibrio además representará el estado inicial a partir del cual se estudie la respuesta a cambios en la entrada

Las variables de desviación representan la dinámica lineal del sistema cuando se producen variaciones en la dinámica del sistema respecto al estado (h_0, q_0) . Desarrollando en serie de Taylor la parte no lineal del modelo y escogiendo únicamente los términos del desarrollo hasta el de primer orden, se obtiene:

$$\sqrt{h(t)}|_{h_0} \approx \sqrt{h_0} + \frac{1}{2\sqrt{h_0}} \underbrace{(h(t) - h_0)}_{\bar{h}(t)} \quad (2.9)$$

por lo que la ecuación (2.5) se puede simplificar a:

$$A \frac{d\bar{h}(t)}{dt} = q_0 + \bar{q}(t) - \underbrace{a\sqrt{2gh_0}}_{q_0} - a\sqrt{\frac{g}{2h_0}} \bar{h}(t) \rightarrow \frac{d\bar{h}(t)}{dt} = \frac{\bar{q}(t)}{A} - \frac{a}{A} \sqrt{\frac{g}{2h_0}} \bar{h}(t) \quad (2.10)$$

La integración de la ecuación diferencial (2.10) cuando se considera una pequeña variación de caudal constante respecto al punto de equilibrio ($\bar{q}(t) = \Delta q$), proporciona la evolución temporal de la altura del tanque desde el punto h_0 hasta un nuevo valor h_1 cercano al anterior:

$$\bar{h}(t) = \frac{\Delta q}{a} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \left(1 - e^{-\left(\frac{a}{A} \sqrt{\frac{g}{2h_0}}\right)t} \right) \quad (2.11)$$

donde la nueva altura $h_1 = h_0 + \Delta h = h_0 + \bar{h}(t \rightarrow \infty) = h_0 + \frac{\Delta q}{a} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$.

Habitualmente, la ecuación (2.10) se puede escribir de forma normalizada haciendo un cambio de variable:

$$\tau = \frac{A}{a} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \text{y} \quad k = \frac{\tau}{A}$$

de modo que el sistema se puede representar de forma aproximada con un modelo dinámico lineal de primer orden de la forma:

$$\tau \frac{d\bar{h}(t)}{dt} + \bar{h}(t) = k\bar{q}(t) \quad (2.12)$$

Las ecuaciones anteriores permiten simular el comportamiento del sistema no lineal y del sistema linealizado en un punto de equilibrio, como se analiza en la ficha. Simular consiste en estudiar la evolución temporal de las variables del sistema resolviendo las ecuaciones que determinan su comportamiento [7]. Generalmente, como entrada de prueba para la simulación se utiliza la denominada *entrada de escalón*, que viene dada por:

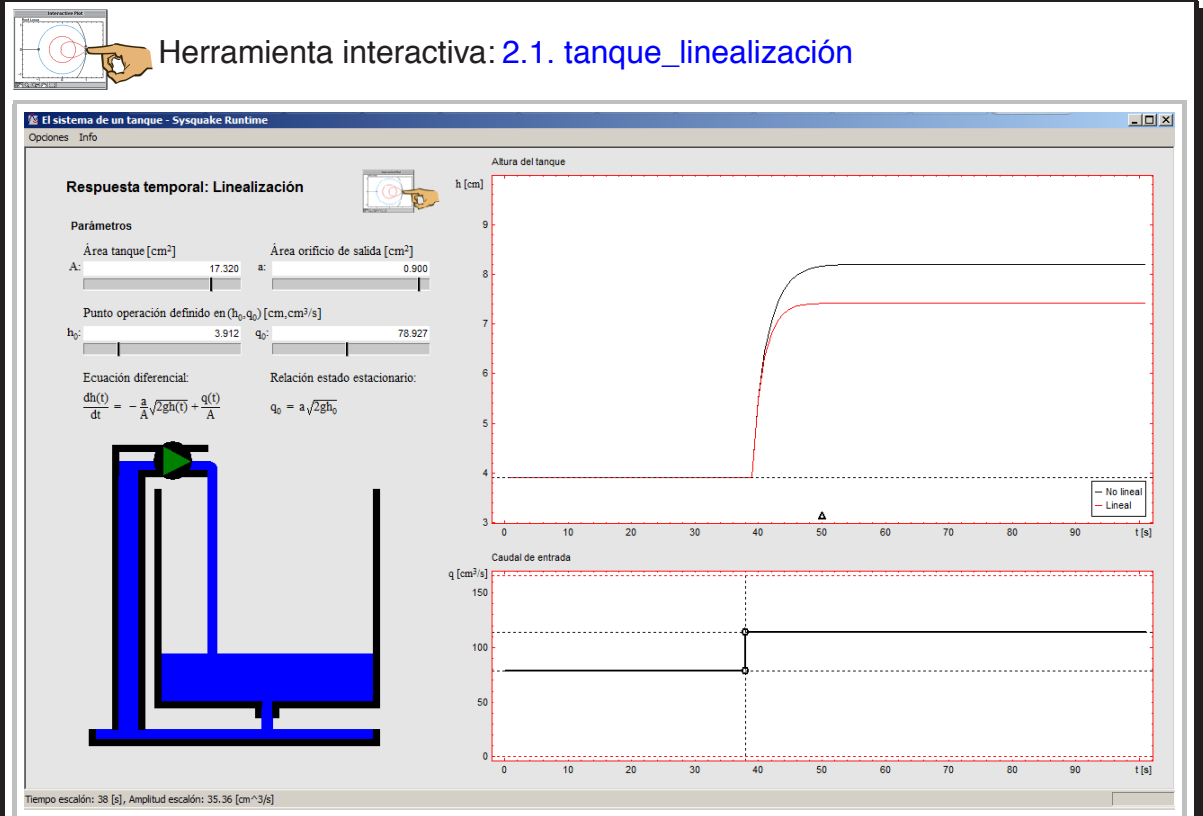
$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_e, & t \geq 0 \end{cases}$$

Se trata por tanto de una entrada que cambia en un cierto instante entre dos valores constantes, provocando una *respuesta transitoria* del sistema hasta que alcanza el nuevo *estado estacionario*. Por respuesta en régimen estacionario se entiende la forma en que se comporta la salida del sistema cuando el tiempo t tiende a infinito. La respuesta transitoria consiste en la evolución temporal de la salida del sistema desde que se produce un cambio en la entrada del mismo hasta que se alcanza un estado cercano o igual al de régimen estacionario.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Ejercicio 4.2, páginas 126-127, 2008.
- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. McGraw-Hill, ISBN:978-84-481-6640-3. Ejemplo 1.13, página 12, 2009.
- [15] Golnaraghi, F. y B. C. Kuo. Automatic control systems. Novena edición. Marcel Dekker Inc., ISBN: 978-0470-04896-2. Páginas 5-7, 109, 185-187, 215-216, 242, 2010.
- [23] Johansson, K. H. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. IEEE Transactions on Control Systems Technology, páginas 456-465, 2000.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 2, sección 7, páginas 42-45 y 101-105, 2010.

Aplicación



Respuesta temporal: linealización

En esta herramienta interactiva es posible comparar, a través de una simulación, las respuestas temporales (respuesta transitoria y en estado estacionario) que se obtienen usando los modelos no lineal y lineal del tanque. Como entrada de prueba para la simulación se utilizará una señal en escalón. La herramienta permite también realizar un análisis en distintos puntos de equilibrio y usando diferentes geometrías del tanque, proporcionando una información cuantitativa y cualitativa del intervalo de validez de estos modelos. Los parámetros del sistema se pueden cambiar mediante la interacción con la representación visual geométrica del tanque.

En la parte superior izquierda de la herramienta se encuentra la sección de **Parámetros** en la que es posible modificar los valores de los parámetros y variables físicas fundamentales que definen la respuesta del sistema, a través de cuadros de texto y barras de desplazamiento: el Área del tanque (A), el Área del orificio de salida (a) y las variables que definen el Punto de operación (h_0, q_0).

Hay que hacer notar que para conseguir un efecto realista, se ha utilizado como unidad de longitud el centímetro (cm) y como unidad de tiempo el segundo (s). Si se accede a las barras de desplazamiento de h_0 o q_0 , el valor de la variable ligada se modifica de acuerdo con la ecuación (2.6) y se produce un escalado automático de los intervalos válidos para dichas variables. El valor máximo de altura del tanque es 17.32 cm. También existe una ligadura entre los rangos de A y a para que las evoluciones temporales que aparecen en la imagen superior derecha tengan sentido físico.

Aplicación...

Se incluye también en esta zona una representación simbólica de la Ecuación diferencial no lineal que se usa como modelo del sistema, así como la relación que determina el Estado estacionario.

En las gráficas del área derecha de la herramienta (Altura del tanque) se compara la respuesta temporal del modelo lineal (línea de color rojo) y la del modelo no lineal (línea de color negro), como consecuencia de un cambio en el caudal de entrada de fluido en forma de escalón. Una leyenda situada en la esquina inferior derecha de la gráfica establece el código de colores utilizado. Cuando se sitúa el puntero del ratón sobre algún punto de las respuestas temporales, se hace visible una etiqueta que indica el tiempo asociado a ese punto (t) y el valor de la salida (y). La línea discontinua horizontal de color negro permite modificar la altura de equilibrio (h_0) que se usa como base en la simulación, a través de un desplazamiento vertical de la misma utilizando el ratón. Lógicamente, el valor del caudal q_0 cambiará de acuerdo a la relación (2.6) en las otras áreas de la herramienta. El cambio de escala horizontal en la gráfica de la Altura del tanque se realiza pulsando con el ratón a la derecha o la izquierda del triángulo (Δ) situado en el eje del tiempo. La escala vertical se ajusta automáticamente.

La gráfica inferior derecha representa el Caudal de entrada. Nótese que el valor base del cambio viene definido por q_0 , pudiéndose modificar en esta gráfica o bien en las barras de desplazamiento de la zona superior izquierda (**Parámetros**) e incluso en el esquema del proceso, como se explicará posteriormente. Sobre la gráfica del escalón hay dos círculos negros (\circ) que determinan el punto de cruce de dos líneas horizontales y una vertical en trazo discontinuo de color negro. Accediendo al círculo inferior o a cualquier punto de la línea vertical se puede modificar el instante en que se produce el cambio en forma de escalón en el caudal de la bomba. Del mismo modo, accediendo a la línea discontinua horizontal inferior se puede modificar el punto de operación (q_0), mientras que desplazando la línea discontinua horizontal superior se puede cambiar la amplitud del escalón (Δq en la ecuación (2.11)). Es importante reseñar que cuando se sitúa el ratón sobre cualquiera de estas líneas, en la esquina inferior izquierda de la herramienta se muestra información relativa al tiempo en el que se introduce el escalón (Tiempo escalón) y a la amplitud del mismo (Amplitud escalón) y también se hace visible una etiqueta sobre la señal que contiene esos valores.

La gráfica por omisión muestra todo el intervalo posible de variación del caudal de entrada (líneas horizontales discontinuas de color rojo), desde el que provoca el desbordamiento del tanque hasta el correspondiente al vaciado del mismo.

La herramienta presenta en la parte inferior izquierda un esquema del proceso a modelar. La figura es interactiva, en el sentido de que se pueden modificar sus atributos haciendo uso del ratón:

- El área del depósito A manteniendo pulsado el botón izquierdo del ratón sobre las paredes del mismo (nótese que existe una limitación de valores mínimo y máximo para que la simulación tenga sentido físico y la gráfica se pueda representar en el espacio dejado a tal efecto).
- El área del orificio de descarga a del mismo modo.
- También se puede modificar la altura de equilibrio h_0 pinchando sobre la superficie de líquido y arrastrándola en dirección vertical.
- El caudal q_0 impulsado por la bomba se puede modificar arrastrando con el ratón el nivel de líquido que hay en el conducto vertical justo antes del codo situado a la izquierda de la bomba.

En esta herramienta, el menú Opciones sólo incluye la opción de Reset, que fuerza a la herramienta a volver a la configuración por omisión.

Ejercicios

1. Lleve el estado del sistema al punto de operación definido por $h_0 = 6$ cm e indique el valor de q_0 asociado. Introduzca un escalón en lazo abierto que incremente el caudal de la bomba en aproximadamente $\Delta q = 15$ cm³/s y compruebe que el valor de la altura de líquido coincide con el que se espera de los cálculos teóricos para el modelo lineal.
2. Repita el paso anterior pero provocando un cambio de caudal de aproximadamente $\Delta q = 30$ cm³/s. Comente si el modelo lineal se comporta mejor o peor que en el caso anterior y justifique dichos comentarios.
3. Usando las ecuaciones (2.6) y (2.11), compare los resultados que se obtienen en la herramienta y con esas ecuaciones en dos condiciones de estado estacionario diferentes. ¿Se obtiene el mismo estado estacionario con el modelo lineal y el modelo no lineal? Justifique su respuesta.
4. Escoja un valor de $A = 8$ cm² y $a = 0.3$ cm². Lleve el sistema a un estado de equilibrio dado por $h_0 = 5$ cm y $q_0 = 29.74$ cm³/s. Indique el valor máximo de cambio de caudal Δq que puede aplicarse para que el depósito no rebose.
5. Seleccione $A = 23$ cm², $a = 0.2$ cm² y $h_0 = 15$ cm. Indique el tiempo que tardaría en descargarse el tanque si se lleva el caudal de entrada a 0 cm³/s.
6. Seleccione $A = 15$ cm², $a = 0.3$ cm² y $q_0 = 25$ cm³/s. Introduzca un escalón de amplitud $\Delta q = 10$ cm³/s (hasta 35 cm³/s). Indique el valor de estado estacionario que se obtiene con el sistema no lineal y su modelo lineal. Repita el procedimiento introduciendo un escalón de amplitud $\Delta q = -10$ cm³/s (hasta 15 cm³/s). ¿Se obtienen resultados similares en escalones positivos y negativos? Justifique la respuesta.
7. Demuestre que cuando se produce un cambio de caudal el nuevo estado estacionario que alcanza el sistema no depende de la anchura del depósito (A), pero sí la rapidez con la que se alcanza ese nuevo estado de equilibrio.

3

Respuesta temporal

Introducción

Como se ha indicado en el Capítulo 2, en la respuesta temporal de un sistema dinámico se suelen analizar dos partes, la respuesta transitoria y la respuesta en estado estacionario. Por respuesta en estado o régimen estacionario se entiende la forma en que se comporta la salida del sistema cuando el tiempo t tiende a infinito. La respuesta transitoria consiste en la evolución temporal de la salida del sistema desde que se produce un cambio en la entrada del mismo hasta que se alcanza un estado cercano o igual al de régimen estacionario. Para llevar a cabo el análisis de la respuesta temporal de un sistema dinámico lineal invariante en el tiempo descrito por una ecuación diferencial lineal, se utilizan habitualmente dos descripciones:

- *Descripción interna*: como se ha analizado en la introducción del Capítulo 2, la representación interna de un sistema dinámico se basa en el concepto de *estado*. El estado de un sistema dinámico es la menor colección de variables cuyo valor, en un cierto instante, resume el pasado dinámico del sistema y es suficiente para predecir su evolución futura. Las variables que representan el estado no tienen que corresponder necesariamente a magnitudes físicas medibles. Por tanto, la descripción interna establece una relación indirecta entre las señales de entrada y salida del sistema [32]. Esta descripción se utilizará en el Capítulo 9.
- *Descripción externa*: suministra una relación explícita directa entre las señales de entrada y de salida, generalmente en forma de *función de transferencia*. La función de transferencia representa el cociente entre la transformada de Laplace de la salida del sistema y la transformada de Laplace de la entrada con condiciones iniciales nulas¹. También se define como la transformada de Laplace de la respuesta impulsional de un sistema [9]. Ésta será la representación usada en los Capítulos 3 a 8 de este texto.

La transformada de Laplace es una herramienta matemática muy útil para introducir las funciones de transferencia. Tradicionalmente se ha utilizado para obtener la respuesta de sistemas lineales a diferentes entradas. En el ámbito de la automática, su uso está muy extendido a través del tratamiento del comportamiento dinámico de sistemas usando la teoría de variable compleja y tiene numerosas propiedades de gran interés [2].

¹Ésta es una condición lógica en sistemas lineales causales y en sistemas linealizados donde las variables representan desviaciones respecto al equilibrio. Se supone que el lector tiene un conocimiento previo sobre la transformada de Laplace y sus propiedades, que suelen incluirse en los textos clásicos de control automático. En el apéndice B de la referencia [7] se puede encontrar un excelente resumen de las técnicas más comunes para el análisis en el dominio de la variable compleja: transformada de Laplace, desarrollo en serie de Fourier y transformada de Fourier.

Linealidad	$\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = aF(s) + bG(s)$
Derivación en t	$\mathcal{L}\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
Integración en t	$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{\left[\int_0^t f(\xi)d\xi\right]_{0^+}}{s}$
Desplazamiento en t	$\mathcal{L}(f(t - t_r)u_e(t - t_r)) = e^{-st_r}F(s)$, u_e es la función escalón unitario
Derivación en s	$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{dF(s)}{ds}\right] = -tf(t)$
Teorema del valor inicial	$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Teorema del valor final	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$

Tabla 3.1 Principales propiedades de la transformada de Laplace

Si se considera una función $f(t)$, $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ integrable y que no crece más rápido que $e^{s_0 t}$ para $s_0 \in \mathbb{R}$ finito y un tiempo t suficientemente grande, la transformada de Laplace de $f(t)$ proporciona una función de variable compleja definida por [2]:

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt, \quad \text{Re}(s) > s_0 \tag{3.1}$$

con $s = \sigma + j\omega$. Esta transformación tiene una serie de propiedades muy útiles para sistemas lineales, algunas de las cuales se utilizarán a lo largo de este texto. La Tabla 3.1 resume las principales propiedades y la Tabla 3.2 contiene algunas transformadas más comunes.

Como ejemplos ilustrativos del uso de estas propiedades, la *derivación en t* es la propiedad que se utiliza para obtener la función de transferencia a partir de una ecuación diferencial lineal considerando condiciones iniciales nulas; el *teorema del valor final* permite realizar un análisis del estado estacionario cuando se trabaja con funciones de transferencia; la propiedad de *desplazamiento en t* facilita el estudio de sistemas con tiempo de retardo, etc.

Existe también la *transformada inversa de Laplace*, que es una transformación integral de la función $F(s)$ del dominio s al dominio del tiempo $f(t)$ [10], que permite obtener la evolución temporal de los sistemas partiendo de su función de transferencia. Habitualmente, lo que se hace es aplicar una descomposición en fracciones simples y calcular $f(t)$ a través de su correspondiente $F(s)$ utilizando las tablas de transformadas más comunes.

En este texto se utilizará fundamentalmente la función de transferencia como herramienta matemática para el modelado, análisis y diseño de sistemas. En el Capítulo 9 se introducirán los conceptos más relevantes asociados a la descripción interna.

Un sistema dinámico genérico se puede representar a través de la ecuación diferencial de orden n :

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ &= b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du(t)}{dt} + b_0 u(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

	Dominio del tiempo	Dominio s
<i>Función impulso</i>	$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} \infty, t = 0 \\ 0, t \neq 0 \end{cases}$	$F(s) = \delta(s) = 1$
<i>Función escalón unitario</i>	$f(t) = u_e(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ 1, t \geq 0 \end{cases}$	$F(s) = U_e(s) = \frac{1}{s}$
<i>Función rampa unitaria</i>	$f(t) = u_r(t) = \begin{cases} 0, t < 0 \\ t, t \geq 0 \end{cases}$	$F(s) = U_r(s) = \frac{1}{s^2}$
<i>Potencia</i>	$f(t) = t^n \quad (t \geq 0)$	$F(s) = \frac{n!}{s^{(n+1)}}$
<i>Exponencial</i>	$f(t) = e^{-at} \quad (t \geq 0)$	$F(s) = \frac{1}{s + a}$
<i>Coseno</i>	$f(t) = \cos(\omega t) \quad (t \geq 0)$	$F(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
<i>Seno</i>	$f(t) = \text{sen}(\omega t) \quad (t \geq 0)$	$F(s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
<i>Coseno amortiguado</i>	$f(t) = e^{-at} \cos(\omega t) \quad (t \geq 0)$	$F(s) = \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$

Tabla 3.2 Tabla de transformadas de Laplace

donde $y(t)$ es la salida del sistema, y $u(t)$ la entrada. Aplicando la propiedad de derivación en t de la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}; \quad (m \leq n) \quad (3.3)$$

cuyo orden n (grado del polinomio el denominador) coincide con el de la ecuación diferencial de la que procede. La condición $m \leq n$ es necesaria para garantizar la causalidad del sistema y que el modelo tenga sentido físico (en caso contrario la salida del modelo en el instante actual dependería del futuro). Las raíces del numerador de la función de transferencia son los ceros y las del denominador (polinomio característico) se denominan polos. Si se factorizan los polinomios del numerador y del denominador, se puede obtener una expresión de la forma:

$$G(s) = \kappa \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_\ell) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_i) \cdots (s - p_n)} \quad (3.4)$$

Los polos p_i y los ceros z_ℓ de una función de transferencia se representan en un plano complejo denominado *plano s* , que en el eje de abscisas contiene la parte real de los polos o ceros (σ) y en el eje de ordenadas la parte imaginaria ($j\omega$).

Debido a la complejidad analítica, es común analizar el comportamiento temporal de sistemas de primer y segundo orden, extendiendo los resultados a sistemas de orden superior. Siguiendo esa filosofía, en este capítulo se introducen fichas interactivas que tratan la respuesta temporal de sistemas de primer y segundo orden y los conceptos asociados. Se estudia el efecto de añadir un cero a la función de transferencia de dichos sistemas. Se generalizan también los conceptos al caso de sistemas genéricos.

3.1 Respuesta temporal de los sistemas lineales de primer orden de tiempo continuo sin ceros

Herramienta interactiva: [3.1. t_primer_orden](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Modelado de sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo mediante una ecuación diferencial lineal de primer orden.
- Obtención de la función de transferencia de un sistema de primer orden a partir de una ecuación diferencial lineal.
- Respuesta temporal a escalón de un sistema lineal de primer orden.
- Concepto de ganancia estática y su efecto sobre la respuesta temporal del sistema cuando la entrada es una señal de escalón.
- Concepto de constante de tiempo y su efecto sobre la respuesta temporal del sistema.
- Análisis de la estabilidad de sistemas lineales de primer orden.

Teoría En esta ficha se analiza la respuesta temporal de los sistemas lineales de tiempo continuo invariantes en el tiempo de primer orden sin ceros. Estos sistemas constituyen las dinámicas más simples que suelen estudiarse, pues provienen de ecuaciones diferenciales de primer orden de la forma:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = ku(t) \quad (3.5)$$

En la expresión (3.5) $y(t)$ y $u(t)$ son la salida y la entrada del sistema respectivamente. La función de transferencia representativa se puede escribir de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \quad (3.6)$$

en la que el polinomio del denominador se denomina *polinomio característico* $J(s)$, cuya única raíz (solución de la ecuación característica $J(s) = 0$) se denomina *polo* de la función de transferencia, situado en $s = -1/\tau$. Los dos parámetros que caracterizan la función de transferencia de un sistema de primer orden son:

- k : *Ganancia estática* o ganancia canónica del sistema.
- τ : *Constante de tiempo*.

La respuesta temporal va ligada a una cierta señal de excitación, que tradicionalmente suele ser el escalón ($U(s) = U_e/s$, con $U_e = 1$ en el caso de escalón unitario). Por tanto, utilizando la transformada inversa de Laplace (\mathcal{L}^{-1}), se puede obtener la respuesta temporal de un sistema de primer orden cuando la señal de entrada es un escalón. Se parte de la expresión de la salida en el dominio de Laplace:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \frac{U_e}{s}$$

Si se descompone en fracciones simples:

$$Y(s) = \frac{kU_e}{s} - \frac{\tau kU_e}{\tau s + 1}$$

se puede acceder a la transformada inversa de Laplace de cada uno de los términos en la Tabla 3.2, proporcionando la respuesta temporal cuando la señal de entrada tiene forma de escalón:

$$y(t) = kU_e \left(\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} - \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\tau}{\tau s + 1} \right\} \right) = kU_e (1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}), \quad t \geq 0 \quad (3.7)$$

Esta respuesta temporal puede obtenerse también resolviendo la ecuación diferencial con:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_e, & t \geq 0. \end{cases}$$

El comportamiento de la salida del sistema depende del signo de τ :

- Si $\tau > 0$, la señal es *acotada* ($\forall u(t)$) y por tanto se dice que el sistema es estable.
- Si $\tau < 0$, la señal es *no acotada* para algunos valores de $u(t)$ y por ello se dice que el sistema es inestable.

Como generalización de este resultado, se establece que una condición necesaria y suficiente para que un sistema sea estable es que todos los polos de su función de transferencia tengan partes reales negativas. En este caso se habla también de *estabilidad asintótica*, pues la salida tiende a un valor de estado estacionario asintóticamente.

Nótese que si $\tau = 0$ el sistema no es dinámico y la relación entre la salida y la entrada viene determinada por la ganancia estática del sistema, k , que corresponde al cociente entre el valor que toma la salida en estado estacionario² ($t \rightarrow \infty$) y el valor de la entrada también en régimen estacionario, al estar asumiendo condiciones iniciales nulas³. Si se aplica el teorema del valor final de la transformada de Laplace a la ecuación (3.7), se tiene que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = kU_e = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k}{\tau s + 1} \frac{U_e}{s} = kU_e$$

Como se observa, la ganancia estática se puede obtener haciendo $s = 0$ en la función de transferencia, $G(0) = k$.

La denominación de constante de tiempo, τ , proviene del hecho que este parámetro es un indicador de la rapidez de la respuesta transitoria del sistema. Cuanto mayor es τ más lenta será la respuesta del sistema, y tardará más tiempo en llegar a su valor final. Así, según la ecuación (3.7):

- Para $t = \tau$, la salida del sistema corresponde a $kU_e(1 - e^{-1})$, que es aproximadamente el 63 % del valor final, $y(\tau) \approx 0.63kU_e$.
- Para $t = 3\tau$, la salida del sistema corresponde al 95 % del valor final, $y(3\tau) \approx 0.95kU_e$.

²Valor que la salida de un sistema alcanza después de que todos los elementos del transitorio de la respuesta han decaído, [9].

³En el caso de sistemas linealizados, es el cociente entre al cambio que experimenta la salida y la amplitud del escalón de entrada, considerando sus valores en régimen estacionario.

- Para $t = 4\tau$, la salida del sistema corresponde al 98 % del valor final ($y(4\tau) \approx 0.98kU_e$), que se considera el *tiempo de establecimiento* para sistemas de primer orden (la respuesta permanece dentro del 2 % del valor final). Según la ecuación (3.7), el estado estacionario se alcanza matemáticamente en tiempo infinito, por lo que en la práctica se considera que se alcanza el estacionario cuando se alcanza el 98 % del valor final, es decir, transcurrido un tiempo igual a cuatro constantes de tiempo.

Otra característica importante de la respuesta temporal es que la pendiente de la respuesta del sistema en $t = t_0$ es k/τ (siendo t_0 el instante en que se introduce la señal en forma de escalón a la entrada).

En la Sección 3.5 se estudiará un caso particular de sistema de primer orden denominado *integrador*, por tener su polo en el origen del plano s ($s = 0$) y venir descrito por:

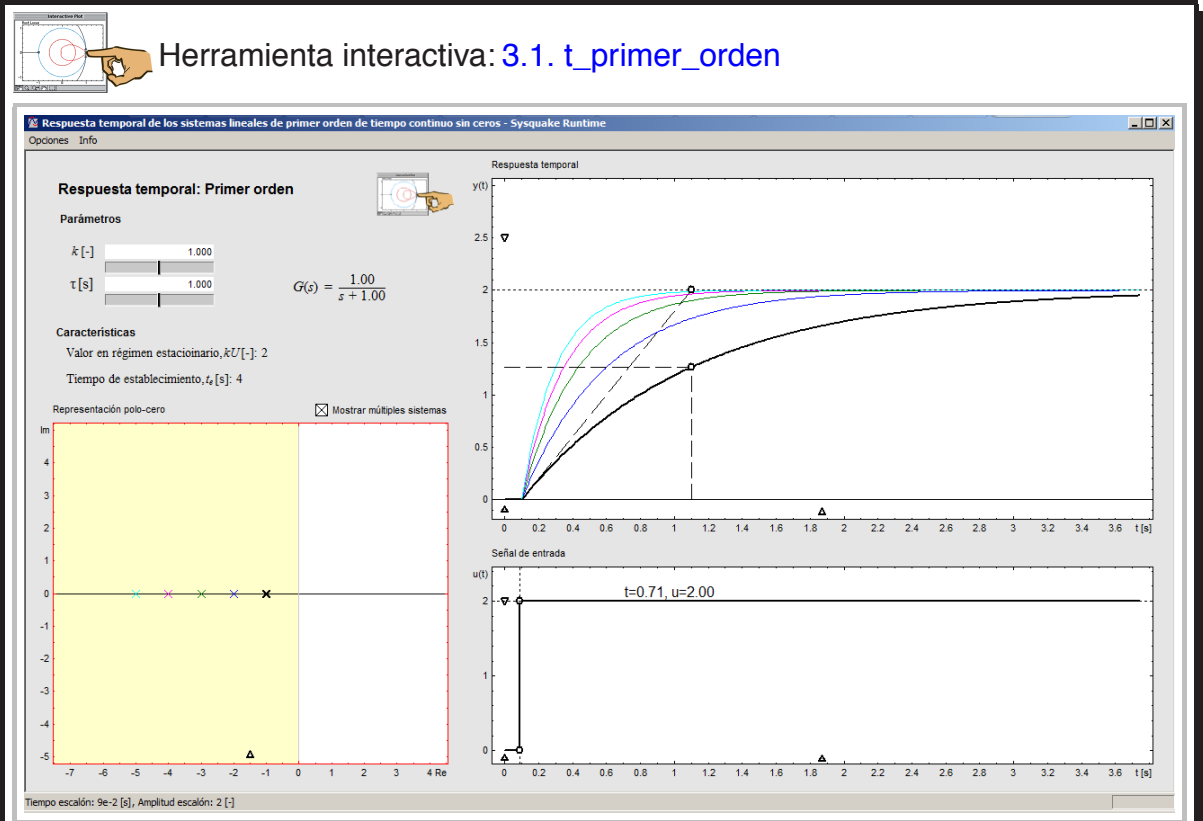
$$\frac{dy(t)}{dt} = ku(t) \rightarrow G(s) = \frac{k}{s} \quad (3.8)$$

Este sistema sería equivalente a uno de primer orden con una constante de tiempo muy grande ($\tau \rightarrow \infty$).

Bibliografía

- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 4, sección 4, apartado 3, páginas 103-104, 2009.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 3, sección 3, páginas 126-128, 2010.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 5, sección 2, páginas 161-164, 2010.
- [29] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Cuarta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 84-205-3678-4. Capítulo 5, sección 2, páginas 221-224, 2003.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 5, apartado 1, páginas 10-11, 1993.

Aplicación



Respuesta temporal: Primer orden

El objetivo principal de esta ficha es analizar la respuesta temporal de un sistema lineal de primer orden frente a una entrada en forma de escalón, en función de la localización del polo y su ganancia estática. Se analiza por tanto la relación entre el plano s , la función de transferencia y la respuesta temporal. La aplicación está dividida en cuatro áreas principales y es totalmente interactiva, en el sentido de que la modificación del valor de un parámetro en cualquiera de dichas áreas se refleja automáticamente en las otras representaciones.

En el área superior izquierda de la herramienta se muestran los **Parámetros** numéricos (ganancia estática k y constante de tiempo τ) y la función de transferencia que definen al sistema bajo estudio, junto a índices que describen la respuesta temporal del sistema seleccionado (**Características**), que en este caso son el valor de la salida en régimen estacionario y el tiempo de establecimiento del 2% (4τ).

El valor de la ganancia estática k se puede modificar pulsando con el ratón sobre el cuadro de texto que muestra su valor. El fondo del texto cambia a color amarillo y a través del teclado se puede introducir un valor numérico, que se refresca en la pantalla una vez que se pulse *intro*. También se puede modificar su valor utilizando la barra de desplazamiento (*slider*) que aparece bajo el cuadro de texto correspondiente. La inclusión de ganancias estáticas negativas debe hacerse introduciendo su valor con el signo correspondiente en el cuadro de texto (y automáticamente los límites de la barra de desplazamiento tendrán en cuenta el nuevo signo de la ganancia).

Aplicación...

La constante de tiempo τ se puede modificar de una forma similar. Cuando se cambian los valores de k y τ , automáticamente se actualizan la representación simbólica de la función de transferencia y las características temporales, así como los datos del resto de representaciones gráficas.

Representación polo-cero: En la parte inferior izquierda se representa el plano s (o plano complejo), donde se dibuja la localización del polo del sistema analizado (o la posición de los polos de los sistemas estudiados si se selecciona la opción de **Mostrar múltiples sistemas** que se comentará posteriormente), utilizando una \times como símbolo de representación. Es posible modificar la posición del polo arrastrándolo con el ratón (siguiendo un movimiento hacia derecha o izquierda). Cuando se suelta el botón interior del ratón el polo queda en su nueva localización. Cuando se posiciona el ratón sobre el polo, su valor se muestra en la esquina inferior izquierda de la herramienta. El triángulo que aparece en la parte inferior de la gráfica permite cambiar la escala simultáneamente en los ejes de abscisas y ordenadas (pulsando a la izquierda del triángulo la escala aumenta y a la derecha se reduce).

En el área superior derecha de la aplicación se muestra la **Respuesta temporal** de los diferentes sistemas de primer orden representados. Cuando se sitúa el ratón sobre cualquier punto de la gráfica, se hacen visibles unas etiquetas con los valores de las variables en ese punto ((t,y) para la salida y (t,u) para la entrada). La gráfica incluye dos círculos asociados a la respuesta temporal. El círculo superior permite modificar el valor final y la pendiente inicial de la respuesta (afectando a los valores de k y τ), mientras que utilizando el círculo inferior se puede modificar el valor de τ (el círculo está asociado al tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 63% de su valor final tras la introducción del escalón a la entrada). Colocando el ratón sobre los dos círculos se muestra la información sobre la ganancia estática y constante de tiempo en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

Señal de entrada: En la zona inferior derecha se dibuja la señal escalón introducida al sistema que proporciona las respuestas mostradas en la gráfica superior. Hay dos círculos negros asociados al cambio en forma de escalón. Accediendo con el ratón sobre el círculo superior (o bien sobre la línea negra horizontal de trazo discontinuo) se puede modificar la amplitud del escalón, mientras que el círculo inferior (o el arrastre de la línea negra vertical de trazo discontinuo) permite modificar el instante de activación de la señal. En la esquina inferior izquierda de la herramienta se visualiza también el instante en que se introduce el escalón y la amplitud del mismo. Las distintas escalas de las figuras pueden ser modificadas haciendo uso de los triángulos de color negro que aparecen en los ejes de abscisas y ordenadas (Capítulo 1, Sección 1.6).

Para el caso donde se están mostrando cinco sistemas (usando los códigos de colores de la Biblioteca **rojo**, **azul**, **verde**, **magenta** y **celeste**), haciendo uso de la opción **Mostrar múltiples sistemas**, el sistema activo representado en el área **Parámetros** se selecciona pulsando sobre su polo representativo en la gráfica de Representación polo-cero o sobre cualquier punto de su respuesta temporal en la gráfica Respuesta temporal, resaltándose automáticamente en negrita. Cuando se selecciona **Mostrar múltiples sistemas**, en el menú Opciones aparecen distintas posibilidades o ejemplos para inicializar la posición de los polos y poder comparar la respuesta de diferentes sistemas en función de sus parámetros:

- **Efecto ganancia:** Inicia el atributo k de cinco modelos con distintos valores, siendo τ constante ($\tau = 1$) para todos ellos.
- **Efecto constante tiempo:** Inicializa el atributo τ de cinco modelos con valores diferentes, siendo k constante ($k = 1$) en todos ellos.

Ejercicios

- Desplace el polo del sistema a lo largo del eje real sin salir del semiplano izquierdo (sombreado en amarillo). ¿Qué cambio se observa en la respuesta temporal? ¿Qué implica mover hacia la derecha?, ¿y hacia la izquierda? ¿Qué parámetros de la función de transferencia se ven afectados?
- Desplace el polo del sistema hacia el semiplano derecho del plano s . ¿Qué tipo de respuesta se obtiene? ¿Por qué desaparecen aparentemente las características temporales de la herramienta? ¿Tiene algún efecto en este caso poner una ganancia estática negativa?
- Coloque la activación de la señal en escalón en el instante $t = 5$ s y su amplitud en un valor igual a 2. Seleccione un valor de $k = 1$ y de $\tau = 3$ s. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que la respuesta del sistema llega al 63% de su valor final tras la introducción del escalón? ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la respuesta del sistema alcanza el 98% de su valor de estado estacionario?
- Coloque la activación de la señal en escalón en el instante $t = 5$ s y su amplitud en un valor igual a 2. Seleccione un valor de $k = -1$ y de $\tau = 3$ s. ¿Cuánto tiempo pasa hasta que la respuesta del sistema llega al 63% de su valor final tras la introducción del escalón? ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la respuesta del sistema alcanza el 98% de su valor de estado estacionario? ¿Qué diferencias observa respecto al ejercicio anterior?
- ¿Cómo cambia la ubicación del polo en el plano s cuando se modifica la ganancia usando la barra de desplazamiento? Justifique la respuesta.
- Considere un sistema con un polo en $s = -3$ y cuyo valor en régimen estacionario cuando la entrada es un escalón unitario es de 0.5. Incluya esos valores en la herramienta y verifique los resultados. ¿Cuál es el valor de la constante de tiempo del sistema? ¿Cuál es el valor de su ganancia estática? ¿Cuánto tiempo transcurre hasta que la respuesta del sistema llega al 63% de su valor final tras introducir una entrada en forma de escalón unitario? ¿Cuánto tiempo transcurre desde que se introduce una señal en forma de escalón a la entrada hasta que la respuesta del sistema llega al 98% de su valor final? ¿Cuál es la pendiente inicial de la respuesta? ¿Cuál es la función de transferencia del sistema? ¿Cuál es el valor de la salida en régimen estacionario? Verifique los resultados en la herramienta.
- Para la configuración que aparece por omisión al arrancar la herramienta, analice qué ocurre con la respuesta cuando cambia el valor de τ a 0.01 s y 100 s. ¿Qué valor se obtiene de la pendiente inicial de la respuesta?
- Seleccionando la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, acceda al menú **Opciones** y seleccione **Efecto ganancia**. Indique el valor de la ganancia estática y de la constante de tiempo de los cinco sistemas que se representan.
- Seleccionando la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, acceda al menú **Opciones** y seleccione **Efecto constante de tiempo**. Indique el valor de la ganancia estática y de la constante de tiempo de los cinco sistemas que se representan.
- La respuesta temporal de dos sistemas dinámicos lineales cuando a la entrada se introduce un escalón de amplitud 2 en $t = 0$ viene dada por:

$$y(t) = 6(1 - e^{-\frac{t}{5}}), \quad \text{para } t \geq 0,$$

$$y(t) = -4(1 - e^{-\frac{t}{2}}), \quad \text{para } t \geq 0.$$

Indique el valor de la constante de tiempo y la ganancia estática de cada sistema, así como su tiempo de establecimiento.

3.2 Respuesta temporal de los sistemas lineales de segundo orden de tiempo continuo sin ceros

Herramienta interactiva: [3.2. t_segundo_orden](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Modelado de sistemas dinámicos lineales invariantes en el tiempo mediante una ecuación diferencial lineal de segundo orden.
- Obtención de la función de transferencia de un sistema de segundo orden a partir de una ecuación diferencial lineal.
- Análisis de la respuesta temporal de un sistema dinámico lineal de segundo orden cuando la entrada es una señal en forma de escalón.
- Concepto de ganancia estática y su efecto sobre la respuesta temporal del sistema cuando la entrada es una señal en forma de escalón.
- Concepto de factor de amortiguamiento relativo y su efecto sobre la respuesta temporal del sistema.
- Concepto de frecuencia natural no amortiguada y su efecto sobre la respuesta temporal del sistema.
- Concepto de sistema de segundo orden sobreamortiguado, críticamente amortiguado, subamortiguado, críticamente estable e inestable.
- Análisis de la estabilidad de sistemas lineales de segundo orden.

Teoría Los sistemas de segundo orden, tal y como su nombre indica, se pueden describir mediante una ecuación diferencial normalizada de segundo orden del tipo:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t) \quad (3.9)$$

donde $y(t)$ y $u(t)$ son la salida y la entrada del sistema respectivamente. Existen sistemas con dinámicas de segundo orden “puras” o formadas por la combinación de dos sistemas de primer orden en serie (producto de dos funciones de transferencia de primer orden⁴). La función de transferencia estándar de un sistema de segundo orden viene dada por:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.10)$$

en la que el polinomio del denominador se denomina *polinomio característico* $J(s)$, cuyas raíces (solución de la ecuación característica $J(s) = 0$) son los polos de la función de transferencia, que en este caso pueden ser reales o complejos conjugados. Los parámetros que definen la función de transferencia son:

- k es la ganancia canónica o *ganancia estática* del sistema, que representa el cociente entre la amplitud de la respuesta del sistema en régimen estacionario y la amplitud del escalón de entrada al mismo. Se puede obtener haciendo $s = 0$ en la función de transferencia, $G(0) = k$.

⁴Como se analizará en el Capítulo 6, la función de transferencia de dos sistemas en serie $G_1(s)$ y $G_2(s)$ es el producto de ambas $G_1(s)G_2(s)$, consecuencia de la aplicación de las propiedades de la transformada de Laplace.

- ζ es el coeficiente, razón o factor de amortiguamiento relativo del sistema (adimensional), que determinará la forma de la respuesta transitoria. En función de su valor se puede deducir si el sistema es inestable ($\zeta < 0$), críticamente estable o no amortiguado ($\zeta = 0$), subamortiguado ($0 < \zeta < 1$), críticamente amortiguado ($\zeta = 1$) o sobreamortiguado ($\zeta > 1$).
- ω_n es la frecuencia natural no amortiguada (rad/s), que corresponde a la frecuencia con la que oscilaría el sistema si no existiese amortiguamiento ($\zeta = 0$, respuesta de tipo senoidal).

Evidentemente, para que se obtenga una respuesta limitada cuando la señal de entrada tiene forma de escalón (señal acotada), los polos del sistema deben estar en la parte izquierda del plano s . Si alguna de sus raíces está en el semiplano derecho s , el sistema será inestable. Si la ecuación característica del sistema ($J(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$) tiene las raíces sobre el eje imaginario (eje $j\omega$), la salida en estado estacionario cuando la entrada es una señal en escalón tendrá oscilaciones mantenidas, a menos que la entrada sea una senoide cuya frecuencia sea igual a la magnitud de las raíces del eje $j\omega$. Para este caso, la salida está sin acotar. A tal sistema se le denomina *marginalmente estable*, debido a que únicamente algunas entradas limitadas (sinusoides de la frecuencia de los polos) harán que la salida no esté acotada.

La respuesta temporal cuando la entrada tiene forma de escalón de amplitud U_e ($U(s) = U_e/s$) se puede obtener a partir de:

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \frac{U_e}{s} \quad (3.11)$$

aplicando la transformada inversa de Laplace, $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$, o bien resolviendo la ecuación diferencial con:

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ U_e, & t \geq 0 \end{cases} ,$$

siendo necesario diferenciar los casos: $0 \leq \zeta < 1$, $\zeta \geq 1$ y $\zeta < 0$. En todos ellos, la respuesta temporal de los sistemas de segundo orden comienza en $t = 0$ con pendiente nula. Se puede comprobar fácilmente haciendo $dy(t)/dt|_{t=0}$.

- *Sistema subamortiguado*: Para el caso $0 \leq \zeta < 1$ se obtiene que los polos del sistema (raíces de la ecuación característica) son complejos conjugados, ($s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ y $s_1^* = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$) y la respuesta temporal a entrada en escalón es:

$$y(t) = kU_e \left[1 - e^{-\zeta\omega_n t} \left(\cos \omega_d t + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \text{sen} \omega_d t \right) \right], \quad t \geq 0 \quad (3.12)$$

donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ es la frecuencia natural amortiguada. Se puede observar cómo la componente compleja de los polos produce una respuesta temporal con presencia de senos y cosenos que dan lugar a oscilaciones que se amortiguan con la envolvente exponencial. Al producto $\sigma = \zeta\omega_n$ se le denomina *factor de amortiguamiento*, que es una constante que determina las propiedades de amortiguamiento de un sistema. Determina la velocidad de crecimiento o decaimiento de la respuesta a escalón unitario de un sistema de segundo orden subamortiguado.

- *Sistema sobreamortiguado*: Cuando el factor de amortiguamiento relativo $\zeta \geq 1$, los polos del sistema de segundo orden serán reales ($s_1 = -1/\tau_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$ y $s_2 = -1/\tau_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$). La función de transferencia en este caso viene dada por:

$$G(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (3.13)$$

donde τ_2 es la constante de tiempo asociada al polo más cercano al eje imaginario, que provoca la exponencial más lenta ($\tau_2 > \tau_1$) y la respuesta temporal se puede obtener por tanto como la combinación de dos sistemas de primer orden:

$$y(t) = kU_e \left(1 - \frac{\tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_1}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right), \quad t \geq 0 \quad (3.14)$$

- Cuando $\zeta = 1$, las dos raíces son iguales $s_1 = s_2$ ($\tau_1 = \tau_2$) y al sistema se le denomina *críticamente amortiguado*. Su función de transferencia viene dada por:

$$G(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)^2} \quad (3.15)$$

y la respuesta a escalón tiene la siguiente expresión analítica:

$$y(t) = kU_e \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{t}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \right), \quad t \geq 0 \quad (3.16)$$

- *Sistema críticamente estable*: Como se puede observar en la ecuación (3.12), cuando $\zeta = 0$ los dos polos complejos conjugados se encuentran sobre el eje imaginario (con parte real nula) y se obtiene una respuesta con una oscilación mantenida dada por:

$$y(t) = kU_e (1 - \cos(\omega_n t)), \quad t \geq 0 \quad (3.17)$$

- *Sistema inestable*: En el caso $\zeta < 0$ el sistema será inestable. Tendrá dos polos complejos conjugados con parte real en el semiplano derecho si $-1 < \zeta < 0$ (respuesta inestable oscilatoria) o bien dos polos reales en el semiplano derecho si $\zeta \leq -1$ (respuesta inestable de tipo exponencial).

Tanto en el caso subamortiguado como en el sobreamortiguado, un análisis interesante consiste en estudiar la localización de los polos de un sistema de segundo orden en función de los parámetros característicos de la función de transferencia. A partir de dichos parámetros, se pueden encontrar relaciones con determinadas características puntuales de la respuesta temporal del sistema (que, como se analizará en el Capítulo 7, además pueden ser utilizadas como especificaciones de funcionamiento en lazo cerrado en el diseño de sistemas de control). Las características de la respuesta temporal más extendidas son (ver Figura 3.1):

- *Sobreoscilación (SO(%))*: Representa el sobrepico o sobreelongación del sistema en %, que es la diferencia entre el máximo valor de pico de la respuesta y el valor de régimen estacionario, relativa a dicho valor de régimen estacionario (en %). Para el caso subamortiguado, derivando la ecuación (3.12) e igualando a cero se puede obtener el valor máximo de $y(t)$ que define la sobreoscilación, así como el tiempo en el que se alcanza dicho máximo (tiempo de pico). El valor de la sobreoscilación viene dado por:

$$SO(\%) = 100 \exp \left(\frac{-\zeta \pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \right) \quad (3.18)$$

Como es lógico, su definición tiene sentido únicamente en el caso subamortiguado.

- *Tiempo de pico (t_p (s))*: Tiempo que tarda la respuesta del sistema en alcanzar su valor de pico medido desde el instante en que se introduce el escalón. Derivando la ecuación (3.12) e igualando a cero para obtener el máximo se obtiene el valor del tiempo de pico:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (3.19)$$

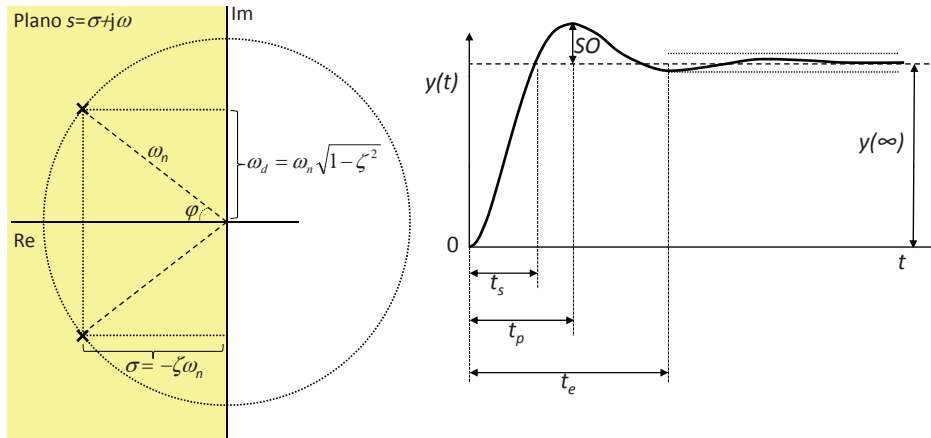


Figura 3.1 Parámetros que caracterizan la respuesta temporal y la representación en el plano complejo de un sistema de segundo orden subamortiguado

- **Tiempo de subida (t_s (s)):** En el caso subamortiguado, es el tiempo que transcurre desde que empieza a evolucionar la salida hasta que alcanza por primera vez su valor de régimen estacionario:

$$t_s = \frac{\pi - \varphi}{\omega_d} \quad (3.20)$$

con $\zeta = \cos(\varphi)$, siendo φ el ángulo que forman los polos complejos conjugados con el eje de abscisas. En sistemas sobreamortiguados se define como el tiempo que tarda la respuesta en evolucionar entre el 10 % y el 90 % de su valor de régimen estacionario.

- **Tiempo de establecimiento (t_e (s)):** Tiempo que transcurre desde que la salida del sistema comienza a evolucionar hasta que la respuesta se sitúa establemente en torno al 2 % del valor de régimen estacionario. Viene dado por:

$$t_e = \frac{4}{\zeta\omega_n} \quad (3.21)$$

En el caso sobreamortiguado ($\zeta \geq 1$), su valor viene dado por $t_e \approx 4(\tau_1 + \tau_2)$.

Se pueden analizar los efectos que produce la variación de la localización de los polos en un sistema de segundo orden subamortiguado con una expresión en función de la parte real e imaginaria de las raíces [35] (ver Figura 3.1), donde $|\sigma| = \zeta\omega_n$ y $\omega_d = \omega_n\sqrt{1 - \zeta^2}$. La constante de tiempo de la envolvente exponencial de la curva de respuesta de un sistema de segundo orden subamortiguado es $\tau = 1/|\sigma|$.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_d^2 + \sigma^2}{s^2 + 2\sigma s + (\omega_d^2 + \sigma^2)}$$

Caso I: Efectos de aumentos en σ (con ω_d constante)

- La parte imaginaria de los polos permanece constante y aumenta (en valor absoluto) la parte real.
- El tiempo de establecimiento disminuye.
- El tiempo de subida disminuye porque la distancia del polo al origen aumenta.

- La sobreoscilación disminuye, pues ζ aumenta.
- El tiempo de pico permanece constante porque ω_d se ha fijado.
- El ancho de banda⁵ aumenta porque es proporcional a ω_n .

Caso II: Efectos de aumentos en ω_d (con σ constante)

- La parte real de los polos permanece constante y se aumenta la parte imaginaria.
- El tiempo de establecimiento permanece constante.
- La sobreoscilación y el ancho de banda aumentan.
- El tiempo de pico y el tiempo de subida disminuyen.

Caso III: Efectos de aumentos en ω_n (con ζ constante)

- Los polos se mueven radialmente alejándose del origen.
- La sobreoscilación permanece constante.
- Los tiempos de subida, pico y establecimiento disminuyen.
- El ancho de banda aumenta.

Caso IV: Efectos de aumentos de ζ (con ω_n constante)

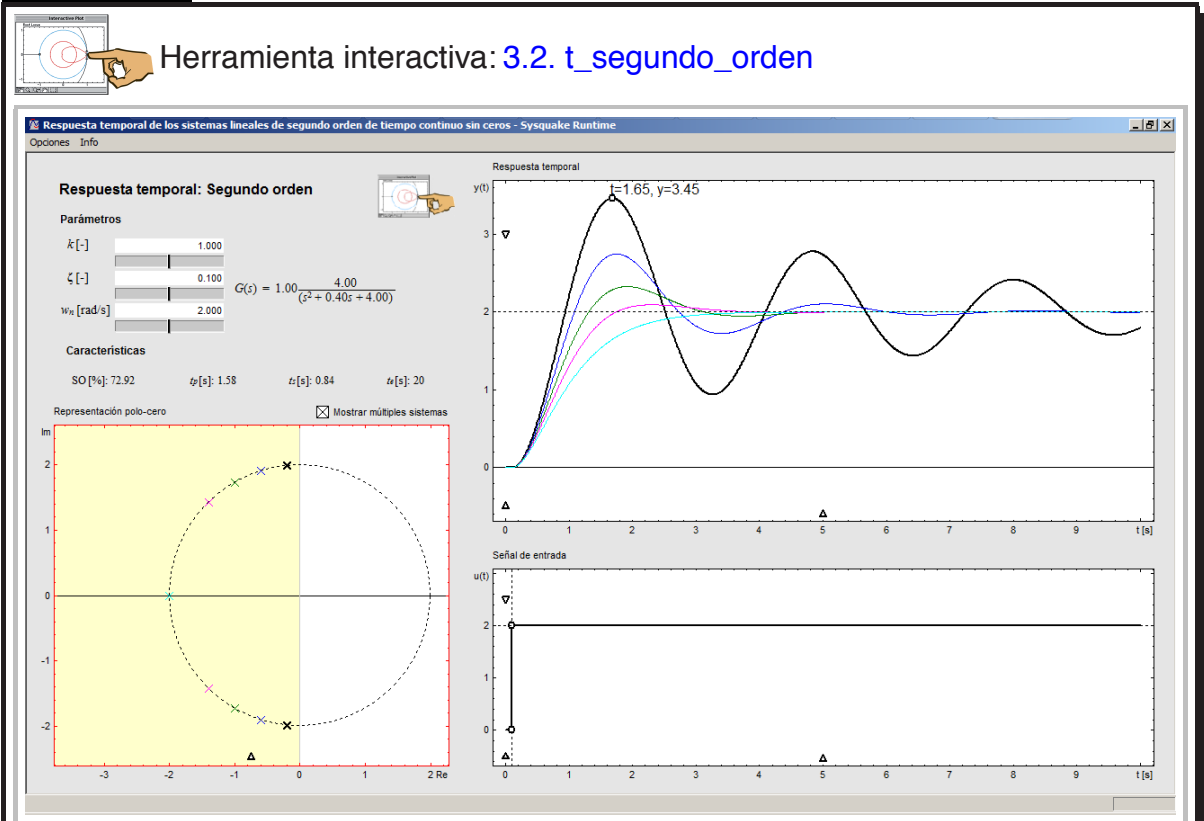
- El tiempo de subida aumenta.
- La sobreoscilación y el tiempo de establecimiento disminuyen.
- El tiempo de pico aumenta.

Bibliografía

- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 4, sección 4, apartado 4, páginas 105-111, 2009.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima Edición. Pearson Prentice Hall. ISBN: 84-205-4401-9. Capítulo 5, páginas 247-253, 315-316, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 3, sección 4, páginas 134-137, 315-316, 2010.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 5, sección 3, páginas 164-179, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 5, apartado 2, páginas 11-16, 1993.

⁵Concepto que se analizará en el capítulo 4 relacionado con la rapidez de respuesta del sistema (a mayor ancho de banda, más rápida es la respuesta).

Aplicación



Respuesta temporal: Segundo orden

El objetivo principal de esta ficha es analizar la respuesta temporal de un sistema lineal invariante en el tiempo de segundo orden a una entrada en forma de escalón, en función de sus parámetros característicos.

El área superior izquierda de la herramienta está dedicada a la definición de los **Parámetros** k , ζ y ω_n , que determinan la función de transferencia del sistema (que se muestra también de forma simbólica normalizada). Los valores de los parámetros se pueden modificar sobre el cuadro de texto correspondiente (introduciendo por teclado un valor numérico) o bien utilizando la barra de desplazamiento (*slider*) asociada.

Bajo la sección **Parámetros** se ubica la dedicada a las **Características** de la respuesta temporal. La respuesta temporal de un sistema de segundo orden subamortiguado está caracterizada por los siguientes parámetros:

- SO [%]: Sobreoscilación, sobrepico o sobreelongación del sistema en %.
- t_p [s]: Tiempo de pico del sistema.
- t_s [s]: Tiempo de subida del sistema.
- t_e [s]: Tiempo de establecimiento.

Aplicación...

En el caso en que se introduzca un valor de $\zeta \geq 1$, se produce un cambio en el área de los **Parámetros** para describir una respuesta sobreamortiguada definida por la ecuación (3.14), donde τ_1 y τ_2 representan las constantes de tiempo características de los dos polos reales del sistema. La ganancia estática k sigue teniendo el mismo significado. En este caso la representación simbólica de la función de transferencia también cambia. En la zona de **Características** ya únicamente tiene un valor el tiempo de establecimiento, que viene dado por $4(\tau_1 + \tau_2)$.

En la zona inferior izquierda de la aplicación está ubicada la Representación polo-cero, representación del plano s o plano complejo. Esta gráfica permite analizar los cambios en la dinámica del sistema debidos a la modificación de la posición de los polos del sistema (representados mediante el símbolo \times). Se pueden arrastrar con el ratón a otra localización del plano complejo. Cuando se sitúa el ratón sobre cualquiera de los polos, se muestra su posición en la esquina inferior izquierda de la herramienta. En esta gráfica se puede pasar del caso subamortiguado al sobreamortiguado y viceversa acercando o alejando los polos del eje real respectivamente (como se puede observar, se actualizan las representaciones en el área de **Parámetros** que se ha descrito previamente). Por omisión, la herramienta muestra un único sistema de segundo orden, pero es posible Mostrar múltiples sistemas simultáneamente (cinco sistemas) seleccionando la opción que se encuentra sobre la gráfica de la Representación polo-cero. La selección del sistema activo se realiza pinchando con el ratón sobre sus polos o respuesta temporal descriptiva y se representa en color negro y línea con trazo más grueso. El resto de sistemas se dibujan usando los colores definidos en la librería. El triángulo inferior permite cambiar simultáneamente las escalas horizontal y vertical, pinchando a su izquierda o derecha.

La zona derecha de la herramienta representa la Respuesta temporal del sistema en la zona superior cuando se introduce una entrada en forma de escalón, definida en la zona inferior derecha (Señal de entrada). Desde la gráfica de Respuesta temporal es posible observar la relación entre la respuesta temporal del sistema y sus parámetros característicos, pudiendo cambiar sus valores interactivamente. Por ejemplo, es posible modificar la sobreoscilación de la respuesta temporal y por tanto el factor de amortiguamiento relativo y la posición de los polos del sistema cambiando la posición del círculo negro que aparece en el punto de valor máximo de la respuesta temporal (existe una relación biunívoca entre la sobreoscilación y el factor de amortiguamiento relativo).

Por otro lado, es posible modificar la frecuencia natural no amortiguada desplazando a izquierda o derecha la línea vertical discontinua que pasa por el punto de valor máximo de la respuesta temporal y que se muestra en la figura, así como la ganancia estática del proceso desplazando en dirección vertical la línea horizontal de trazo discontinuo. En el caso que el sistema posea dos polos reales, aparecerán dos líneas discontinuas verticales representando las constantes de tiempo asociadas y que permitirán modificar su valor interactivamente en la gráfica de Respuesta temporal. En esta figura se puede pasar del caso subamortiguado al sobreamortiguado arrastrando el punto asociado a la sobreoscilación hacia abajo (se llegaría al caso críticamente amortiguado donde $\zeta = 1$ y a partir de ahí al caso sobreamortiguado arrastrando a derecha o izquierda las líneas verticales discontinuas que representan las constantes de tiempo representativas de los dos polos). Sin embargo, no se puede pasar del caso sobreamortiguado al subamortiguado (problema multivaluado), siendo necesario hacerlo en el área de **Parámetros** o en la gráfica de Representación polo-cero tal y como se ha explicado previamente. Cuando se accede a cualquiera de los elementos interactivos de la gráfica, sus valores asociados se representan también en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

Aplicación...

En la parte inferior derecha se muestra la Señal de entrada en forma de escalón introducida al sistema que produce las respuestas mostradas en la gráfica superior. Hay dos círculos negros asociados al cambio en forma de escalón. Accediendo con el ratón sobre el círculo superior se puede modificar la amplitud del escalón (también desplazando verticalmente la línea discontinua horizontal que marca el valor final del escalón), mientras que el círculo inferior permite modificar el instante de activación de la señal (o bien un desplazamiento horizontal de la línea vertical discontinua que pasa por ese punto). En la esquina inferior izquierda de la herramienta se visualiza también el instante en que se introduce el escalón y la amplitud del mismo.

Tanto en la gráfica de la Respuesta temporal como en la de la Señal de entrada, cuando se sitúa el ratón sobre las curvas de evolución temporal, se hace visible una etiqueta que indica el valor del tiempo (t) y la salida (y) en el primer caso y del tiempo (t) y la entrada (u) en el segundo. Las escalas de las figuras pueden ser modificadas haciendo uso de los triángulos de color negro que aparecen en los ejes de abscisas y ordenadas, como se explicó en la Sección 1.6 del Capítulo 1.

Con la opción **Mostrar múltiples sistemas**, el sistema activo para el cual se muestran sus parámetros en el área **Parámetros** se puede seleccionar pulsando sobre la localización de los polos correspondientes (en la gráfica **Representación polo-cero**) o sobre la respuesta temporal deseada (gráficas **Respuesta temporal**). Esta opción habilita los siguientes ejemplos incluidos en el menú **Opciones**:

- **Efecto factor amortiguamiento:** Se comparan sistemas de segundo orden con la misma ω_n , dibujándose en la gráfica de **Representación polo-cero** un círculo que representa el lugar geométrico de los puntos con ω_n constante y sobre él se ubican los polos de los cinco sistemas representativos, de modo que de un simple vistazo se puede observar cómo varía la respuesta temporal en función del factor de amortiguamiento relativo ζ . Los polos se pueden desplazar a lo largo del círculo para visualizar el efecto que dicho desplazamiento produce sobre los otros parámetros del sistema dinámico y sobre la respuesta temporal del mismo (el sistema activo siempre se muestra en trazo de color negro y línea más gruesa). Para modificar el valor de ω_n que describe el lugar geométrico se puede pinchar con el ratón sobre cualquier punto del círculo (representado en línea discontinua) y arrastrar hacia el exterior (incremento de ω_n) o hacia el interior (decremento de ω_n). Lógicamente el nuevo valor de ω_n se actualiza en el área de **Parámetros** y en la representación simbólica de la función de transferencia del sistema activo, modificándose también las respuestas temporales asociadas en la gráfica de **Respuesta temporal**. Este ejemplo permite analizar el caso IV de estudio descrito en el resumen de teoría de esta ficha.
- **Efecto frecuencia no amortiguada:** Se comparan sistemas de segundo orden con el mismo ζ y distintos valores de ω_n (correspondiente al caso III tratado al final del resumen de teoría), visualizándose en la gráfica de **Representación polo-cero** dos líneas discontinuas que parten del origen y que definen el lugar geométrico de los puntos con ζ constante (nótese que el ángulo φ que forman esas líneas con el eje de abscisas está relacionado con ζ a través de $\cos(\varphi) = \zeta$). Una vez que se selecciona uno de los cinco sistemas se pueden desplazar los polos a lo largo de esa línea para ver cómo se modifica la frecuencia natural asociada y su efecto sobre las respuestas temporales. Si se mantiene pulsado el ratón sobre la línea discontinua, se puede modificar el ángulo que dicha línea forma con el eje de abscisas y por tanto ζ , viéndose afectadas las cinco gráficas de respuestas temporales y los valores de los parámetros asociados al sistema activo y mostrados en el área de **Parámetros**.

Aplicación...

- **Parte imaginaria constante:** Se comparan sistemas de segundo orden cuyas raíces tienen la misma parte imaginaria y distinta parte real. Al seleccionar esta opción, sobre la gráfica de Representación polo-cero aparecen dos líneas horizontales discontinuas que representan el lugar geométrico de los polos que tienen la misma parte imaginaria (las raíces del polinomio característico tienen la misma parte imaginaria). El valor de dicha parte imaginaria se puede modificar desplazando verticalmente las dos líneas discontinuas y sobre dichas líneas se pueden mover los polos de los sistemas activos, actualizándose automáticamente los valores de los parámetros en el área representativa de los mismos y la respuesta temporal asociada. Este ejemplo se corresponde al caso I de estudio tratado al final del resumen teórico de esta ficha.
- **Parte real constante:** Se comparan sistemas de segundo orden cuyas raíces tienen la misma parte real y distinta parte imaginaria (caso II de estudio del resumen de teoría). La Representación polo-cero incluye el lugar geométrico de las raíces con el mismo valor de la parte real que es una línea vertical de trazo discontinuo que se puede desplazar a derecha o izquierda arrastrándola con el ratón. Los polos se pueden desplazar verticalmente para analizar el efecto que dicho desplazamiento produce sobre la respuesta temporal en la gráfica Respuesta temporal y sobre los parámetros representativos del sistema, mostrándose siempre los del sistema activo seleccionado (en trazo negro más grueso).

Ejercicios

1. Utilizando la herramienta **3.2. t_segundo_orden** estudie y describa el efecto de los parámetros típicos de un sistema de segundo orden sobre la respuesta temporal frente a entrada en escalón:
 - a) Seleccione $\zeta = 0.1$, $k = 1$ y analice de forma comparativa qué valores se obtienen en la sobreoscilación, el tiempo de subida, el tiempo de pico y el tiempo de establecimiento cuando $\omega_n = 1$, $\omega_n = 2$ y $\omega_n = 4$ rad/s. Indique también la posición de los polos del sistema en cada caso, relacionándola con los valores de ζ y ω_n .
 - b) Elija los valores $\omega_n = 1$ rad/s, $k = 1$ y analice de forma comparativa qué valores se obtienen en la sobreoscilación, el tiempo de subida, el tiempo de pico y el tiempo de establecimiento cuando $\zeta = 0.1$, $\zeta = 0.5$ y $\zeta = 0.8$. Indique también la ubicación de los polos del sistema en cada caso, relacionándola con los valores de ζ y ω_n .
2. Para un sistema de segundo orden con ganancia estática unidad, $\zeta = 0.4$ y $\omega_n = 2$ rad/s, estime utilizando la respuesta temporal que se muestra en la gráfica de Respuesta temporal los valores de la sobreoscilación, el tiempo de pico, el tiempo de subida y el tiempo de establecimiento asociado y compare los valores obtenidos con los que se muestran en la sección **Características** de la herramienta.
3. Se dispone de un sistema que frente a entrada en escalón posee ganancia estática unitaria, una sobreoscilación del 12% y un tiempo de pico de 2.5 s. Obtenga de forma analítica los parámetros característicos de este sistema y corrobore el comportamiento temporal haciendo uso de la herramienta.
4. Para un valor de $\omega_n = 2$ rad/s y $k = 1$, analice la respuesta temporal y la localización de los polos de un sistema de segundo orden para los valores de $\zeta = -2$, $\zeta = -0.3$, $\zeta = 0$, $\zeta = 0.3$, $\zeta = 0.7$, $\zeta = 1$ y $\zeta = 2$. Indique el tipo de respuesta obtenida y describa su relación con la localización de los polos del sistema.

5. Tal y como se observó en el ejercicio anterior, el valor del parámetro ζ influye en gran medida en la respuesta temporal del sistema. Existe un valor por encima del cual el sistema deja de ser oscilatorio y por debajo del cual se obtiene una respuesta oscilatoria. Haciendo uso de la herramienta intente determinar dicho valor.
6. Del mismo modo, para $\zeta = 0$ compruebe haciendo uso de la herramienta que la frecuencia de oscilación coincide con la frecuencia natural no amortiguada ω_n .
7. Las opciones de la herramienta interactiva permiten analizar que, para valores constantes de ω_n , al variar ζ en el rango $0 < \zeta < 1$, se modifica el ángulo que la localización de los polos complejos forma con la horizontal. De la misma forma, para valores constantes de ζ , al variar ω_n se observa cómo varía la distancia de los polos con respecto al origen (hipotenusa del triángulo que forman los polos complejos con respecto al origen). Por tanto, dado un valor concreto de dos polos complejos $s_1 = \sigma + j\omega$ y $s_1^* = \sigma - j\omega$, intente relacionar las partes real e imaginaria de dichos polos con los parámetros ζ y ω_n de un sistema de segundo orden. Utilice la herramienta para comprender y analizar los resultados.
8. En el caso sobreamortiguado $\zeta > 1$, dejando uno de los polos en una localización fija, analice el efecto que tiene desplazar el otro polo por el eje real en la respuesta transitoria.
9. Seleccione en el menú Opciones de la herramienta la opción Parte imaginaria constante. Con la configuración que aparece por omisión, indique los valores de la sobreoscilación, tiempo de pico, tiempo de subida y tiempo de establecimiento de los cinco sistemas. Conservando la misma parte imaginaria, ¿qué factor de amortiguamiento ($|\sigma| = |\zeta\omega_n|$) deben tener las raíces para que la sobreoscilación sea del 1%? ¿Cuál es el valor del tiempo de establecimiento en ese caso?
10. Seleccione en el menú Opciones de la herramienta la opción Parte real constante. Con la configuración que aparece por omisión, indique los valores de la sobreoscilación, tiempo de pico, tiempo de subida y tiempo de establecimiento de los cinco sistemas. Conservando la misma parte real, ¿qué frecuencia natural amortiguada (ω_d) deben tener las raíces para que la sobreoscilación sea del 1%? ¿Cuál es el valor del tiempo de establecimiento en ese caso? ¿Se modifica el tiempo de establecimiento al cambiar la parte imaginaria de las raíces? Justifique la respuesta.
11. Seleccione en el menú Opciones de la herramienta la opción Efecto factor amortiguamiento. Con la configuración que aparece por omisión, indique los valores de la sobreoscilación, tiempo de pico, tiempo de subida y tiempo de establecimiento de los cinco sistemas. Conservando la frecuencia natural no amortiguada constante, ¿qué posición deben tener los polos complejos conjugados para que la sobreoscilación sea del 1%? ¿Cuál es el valor del tiempo de establecimiento en ese caso?
12. Seleccione en el menú Opciones de la herramienta la opción Efecto frecuencia no amortiguada. Con la configuración que aparece por omisión, indique los valores de la sobreoscilación, tiempo de pico, tiempo de subida y tiempo de establecimiento de los cinco sistemas. Conservando el factor de amortiguamiento relativo constante, ¿qué posición deben tener los polos complejos conjugados para que el tiempo de establecimiento sea de 2 s? ¿Cuál es el valor de la sobreoscilación?
13. Introduzca en la herramienta un sistema con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)^2}$$

Introduzca una señal en forma de escalón unitario a la entrada. Compruebe analíticamente y haciendo uso de la herramienta que:

- a) La salida parte con pendiente nula.
- b) Cuando $t = \tau$ la salida alcanza el valor $y(\tau) = 0.5284$.

3.3 Efecto de un cero en la respuesta temporal de sistemas lineales de primer orden de tiempo continuo

Herramienta interactiva: [3.3. t_primer_orden_cero](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Efecto de un cero en la respuesta temporal a entrada en forma de escalón de un sistema lineal invariante en el tiempo de primer orden.
- Efecto de un cero en el semiplano derecho. Sistemas de fase no mínima.

Teoría Como se analizó en la ficha 3.1, la función de transferencia y la respuesta temporal de un sistema de primer orden cuando la entrada es una señal de escalón viene dada por⁶:

$$G_1(s) = \frac{Y_1(s)}{U(s)} = \frac{k}{\tau s + 1} \rightarrow Y_1(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \frac{U_e}{s}$$

$$y_1(t) = k U_e \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t}\right) \quad (3.22)$$

donde $y_1(t)$ y $u(t)$ son la salida y la entrada del sistema respectivamente, k es la ganancia estática y τ la constante de tiempo (ver Sección 3.1). Existen sistemas dinámicos lineales de primer orden que pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales que dependen de la derivada de la entrada y no sólo de su valor:

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k \left(\beta \frac{du(t)}{dt} + u(t) \right) \quad (3.23)$$

donde $y(t)$ y $u(t)$ son la salida y la entrada del sistema respectivamente. La función de transferencia representativa de este tipo de sistemas puede escribirse de la siguiente forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = k \frac{\beta s + 1}{\tau s + 1}. \quad (3.24)$$

Esta función de transferencia presenta un polinomio de primer grado en el numerador y un polinomio de primer grado en el denominador. La raíz del polinomio del denominador, ($s = -1/\tau$), recibe el nombre de *polo* del sistema mientras que la del polinomio del numerador, ($s = -1/\beta$), recibe el nombre de *cero* del sistema, que procede de la presencia en la ecuación diferencial de la derivada de la entrada. Asimilando la variable s al operador derivada⁷ ($\mathcal{L}(du(t)/dt) = sU(s)$), la respuesta temporal del sistema a un escalón de amplitud U_e ($U_e = 1$ en caso de escalón unitario) aplicado en $t = 0$ puede escribirse como la suma de la respuesta del sistema con $\beta = 0$ (la que tiene el sistema sin el cero (3.22)), más la derivada de dicha respuesta ponderada por β :

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ G(s) \frac{U_e}{s} \right\} = y_1(t) + \beta \frac{dy_1(t)}{dt} = k U_e \left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}t} + \frac{\beta}{\tau} e^{-\frac{1}{\tau}t} \right)$$

$$y(t) = k U_e \left(1 + \left(\frac{\beta}{\tau} - 1 \right) e^{-\frac{1}{\tau}t} \right) \quad (3.25)$$

⁶Se utiliza el subíndice 1 en la salida y la función de transferencia porque facilita la explicación de la teoría.

⁷Propiedad de la derivación en t de la transformada de Laplace (Tabla 3.1).

para $t \geq 0$. Como se puede observar, el cero no afecta a la estabilidad del sistema, pues β no aparece en la exponencial de (3.25) y únicamente modifica la respuesta transitoria. En particular, si $\tau > 0$ la respuesta temporal vendría escrita por:

- *Final de la respuesta temporal* (régimen estacionario). Cuando $t \rightarrow \infty$ la respuesta temporal tiende a $k U_e$, independientemente del valor de β y $\tau > 0$.
- *Inicio de la respuesta temporal*. En $t = t_0$ (siendo t_0 el instante en que se introduce la señal en forma de escalón a la entrada) la respuesta temporal, (3.25), toma el valor $k U_e(\beta/\tau)$ y no es por tanto igual a cero. El motivo es que el sistema no es estrictamente propio o causal, pues el grado del polinomio del numerador es igual al del denominador, existiendo por tanto una transmisión directa de la señal de entrada a la salida. Pueden distinguirse dos casos :
 - $\beta > 0$, la respuesta presenta una discontinuidad en $t = 0$ y el valor que toma dicha respuesta tiene el mismo signo que el valor que tomará en estado estacionario.
 - $\beta < 0$, la respuesta presenta una discontinuidad en $t = 0$ y el valor que toma dicha respuesta tiene signo contrario al valor de la respuesta en régimen estacionario. Este tipo de respuesta recibe el nombre de *respuesta de fase no mínima* o *respuesta inversa*.
- *Tiempo de establecimiento*. La respuesta del sistema llega al 98% de su valor final cuando ha transcurrido un tiempo:

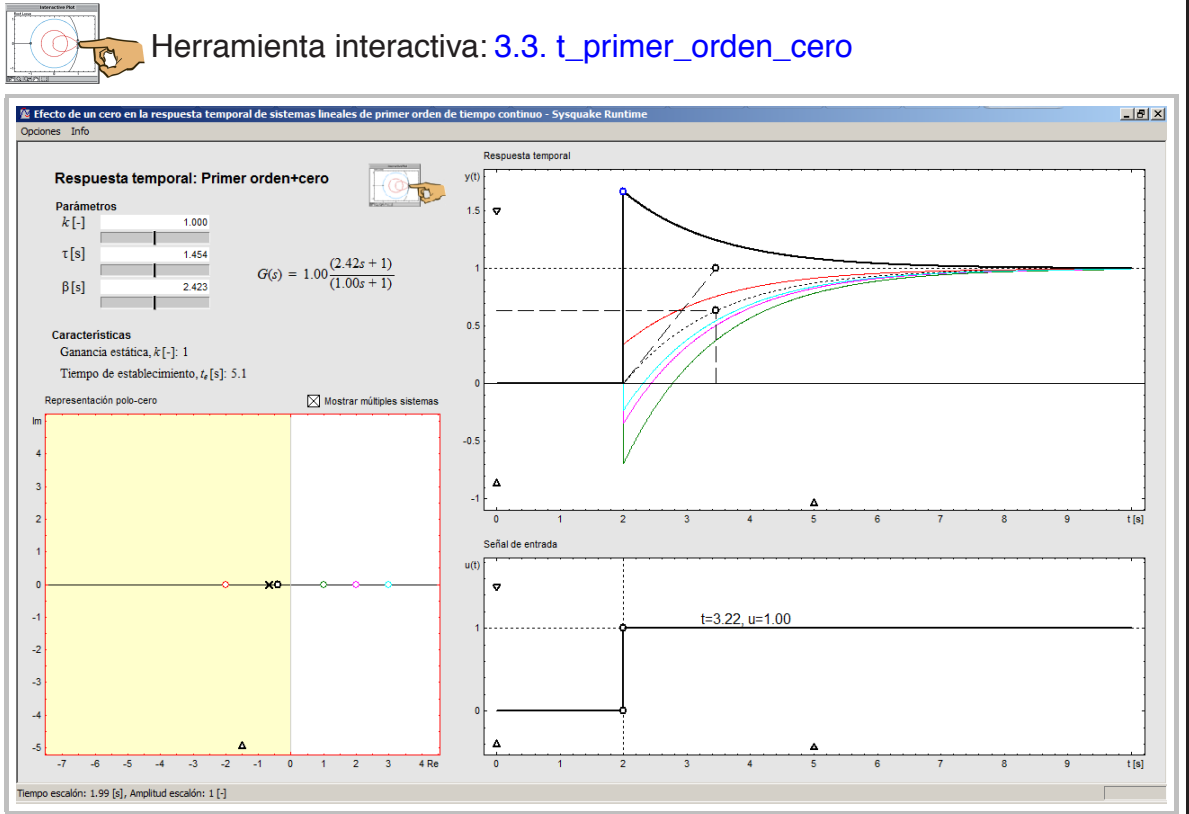
$$t_e = \tau \ln \left(\frac{50|\beta - \tau|}{\tau} \right) \quad (3.26)$$

desde que se introdujo el escalón. Este tiempo es mayor que 3.91τ (4τ corresponde al tiempo de establecimiento para el sistema sin cero), siempre que $\beta > 2\tau$. En el caso que $\beta \in [0, 2\tau]$, se produce una cancelación significativa del efecto del polo y del cero.

Bibliografía

- [29] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Cuarta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 84-205-3678-4. Capítulo 5, sección 2, páginas 221-224, 2003.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 5, apartado 3, páginas 16-19, 1993.

Aplicación



Respuesta temporal: Primer orden + cero

En la zona superior izquierda de la herramienta se muestran los **Parámetros** numéricos y la representación simbólica de la función de transferencia del sistema, junto a índices que describen la respuesta temporal (**Características**), que en este caso son la ganancia estática del sistema y el tiempo de establecimiento del 2% (dado por la ecuación (3.26)). Al igual que en el caso de los sistemas de primer orden sin ceros, los valores de los parámetros característicos se pueden modificar a través de los cuadros de texto correspondientes o bien usando las barras de desplazamiento, actualizándose la representación simbólica de la función de transferencia y las otras representaciones gráficas que se comentan a continuación. En este caso, además de la ganancia estática k y la constante de tiempo τ aparece la constante de tiempo del cero del sistema β como un parámetro interactivo cuyo valor se puede modificar.

En la parte inferior izquierda se sitúa la Representación polo-cero (plano complejo s), donde se muestra la localización del polo (\times) y del cero (\circ) del sistema analizado (o la posición del polo y los cinco ceros de los sistemas estudiados si se selecciona la opción de **Mostrar múltiples sistemas** ubicada junto al título de la gráfica). Es posible modificar la ubicación del polo y del cero mediante un movimiento de arrastre del ratón sobre el eje de abscisas. Su posición se muestra siempre en la esquina inferior izquierda de la aplicación. Las escalas horizontal y vertical se pueden cambiar pinchando a la izquierda o derecha del triángulo situado en la parte inferior.

Aplicación...

En la parte superior derecha se dibuja la Respuesta temporal de los diferentes sistemas representados. Si se sitúa el ratón sobre cualquier punto de la respuesta, se hace visible una etiqueta que indica las coordenadas de ese punto (tiempo y valor de la salida). En el caso de un único sistema (esta explicación es extensible al caso de múltiples sistemas), para trazar la respuesta del sistema se usa línea negra continua, mientras que para la del sistema sin el cero se usa línea negra punteada. Los elementos interactivos en esta gráfica son:

- La línea horizontal discontinua permite modificar la ganancia estática del sistema (común para el sistema con el cero y sin el cero).
- El círculo colocado sobre esta línea permite modificar la pendiente inicial de la respuesta del sistema sin el cero (y por tanto influir sobre k y τ).
- El círculo inferior que hay en la misma vertical permite modificar τ (como en el caso de sistemas de primer orden sin cero).
- Finalmente, para modificar β , la herramienta incorpora un círculo de color azul (○) que se puede desplazar en sentido vertical para representar comportamientos tanto de fase mínima (respuesta directa) como de fase no mínima (respuesta inversa). El desplazamiento vertical de este círculo afecta a la posición del cero en la Representación polo-cero y al valor de β en el área **Parámetros**.

Cuando se selecciona la opción **Mostrar múltiples sistemas**, como todos comparten el mismo polo, lo único que cambia respecto a lo explicado previamente es que el círculo azul (○) que permite modificar la ubicación del cero sólo se muestra para el sistema activo (que se selecciona accediendo con el ratón sobre el cero elegido en la gráfica de Representación polo-cero o bien sobre cualquier punto de la gráfica de la Respuesta temporal escogida). Cuando se selecciona o coloca el ratón sobre cualquier elemento interactivo de esta gráfica, sus valores asociados se muestran en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

En la zona inferior derecha de la aplicación se muestra la Señal de entrada en forma de escalón introducida al sistema que da lugar a las respuestas mostradas en la gráfica superior. Al igual que en dicha figura, cuando se pasa el puntero del ratón sobre la señal de escalón, se visualiza el valor del tiempo correspondiente a ese punto de la gráfica y la amplitud del escalón. En la esquina inferior izquierda de la herramienta se visualiza también el instante en que se introduce el escalón y la amplitud del mismo. Hay dos círculos de color negro (○) asociados al instante y amplitud del escalón. Accediendo con el ratón sobre el círculo superior (o sobre la línea horizontal discontinua) se puede cambiar la amplitud del escalón, mientras que el círculo inferior (o la línea vertical discontinua) permite seleccionar el instante de activación de la señal.

Todas estas gráficas son totalmente interactivas. En el plano s es posible mover la posición del polo y el cero; en la gráfica de la respuesta temporal es posible modificar la pendiente inicial, el valor inicial de la respuesta temporal y el valor final de las diferentes respuestas; en el gráfico de definición de la señal de entrada es posible modificar su amplitud e instante de activación y finalmente es posible fijar los parámetros del sistema de forma cuantitativa. Además las distintas escalas de las figuras pueden ser modificadas haciendo uso de los triángulos de color negro que aparecen en los ejes de abscisas y ordenadas.

El menú Opciones de esta herramienta únicamente incluye la opción **Reset**.

Ejercicios

1. Para un valor de $k = 1$ y $\tau = 1$ s, analice la respuesta que se obtiene con valores de $\beta = 0.25, 0.5, 1, 2$ y -2 s respectivamente. Indique en cada caso la ubicación del cero en el plano s (Representación polo-cero) y los tiempos de establecimiento obtenidos. ¿Qué ocurre si $\beta \approx \tau$? Comente la respuesta analizando la evolución temporal de la salida.
2. Repita el ejercicio anterior seleccionando la opción *Mostrar múltiples sistemas* y utilizando las posiciones de los ceros que aparecen por omisión.
3. ¿Qué ocurre si β toma un valor muy grande comparado con el de τ ? (por ejemplo, $\beta = 100$ s y $\tau = 1$ s). Comente la respuesta obtenida y cuál cabría esperar si $\beta \rightarrow \infty$.
4. ¿Qué ocurre si τ toma un valor muy grande comparado con el de β ? (por ejemplo, $\beta = 1$ s y $\tau = 100$ s). Comente la respuesta obtenida y cuál cabría esperar si $\tau \rightarrow \infty$.
5. ¿A partir de qué valor de β la respuesta del sistema de primer orden con el cero es similar a la del sistema de primer orden sin el cero? Compruébelo utilizando $k = 1$ y partiendo de las siguientes configuraciones del par (τ, β) [s]: $(1, 0.25)$, $(2, 1)$, $(2, -1)$.
6. Para $k = 1$ y valores de $\tau = 0.1, 1, 10$ s respectivamente, indique los rangos de valores de β en los que:
 - a) El tiempo de establecimiento del sistema con el cero es menor que el del sistema sin el cero.
 - b) El tiempo de establecimiento del sistema con el cero es mayor que el del sistema sin el cero.
7. Simule en la herramienta la respuesta temporal a una entrada en forma de escalón unitario de dos sistemas de primer orden con un cero cuya salida viene dada por:

$$y(t) = 2(1 - 0.9e^{-t}), \quad t \geq 0$$

$$y(t) = 2(1 + 9e^{-10t}), \quad t \geq 0$$

Indique en ambos casos el valor de los parámetros de la función de transferencia.

8. Usando la opción de *Mostrar múltiples sistemas*, encuentre combinaciones adecuadas de los parámetros k , τ , y β que proporcionen un mismo punto de partida de la respuesta temporal en $t = 0$ cuando la entrada es un escalón unitario.

3.4 Efecto de un cero en la respuesta temporal de sistemas lineales de segundo orden de tiempo continuo

Herramienta interactiva: 3.4. t_segundo_orden_cero

Conceptos analizados en la ficha

- Efecto de un cero en la respuesta temporal a una entrada en forma de escalón de un sistema lineal invariante en el tiempo de segundo orden. Efecto de un cero en el semiplano derecho.

Teoría Esta ficha tiene como objetivo analizar y comprender la influencia que ejerce la presencia de un cero sobre la respuesta temporal de un sistema de segundo orden frente a una entrada tipo escalón. La función de transferencia genérica de un sistema de segundo orden viene dada por:

$$G_2(s) = \frac{Y_2(s)}{U(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.27)$$

donde k es la ganancia canónica o *ganancia estática* del sistema, ζ es el *factor de amortiguamiento relativo* del sistema y ω_n es la *frecuencia natural no amortiguada* (ver Sección 3.2).

Si se considera en la función de transferencia anterior (3.27) la presencia de un cero con constante de tiempo β (y por tanto situado en el plano complejo en $s = -1/\beta$), se obtiene que:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k\omega_n^2(\beta s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.28)$$

Analizando esta nueva función de transferencia, $G(s)$, se puede observar que es posible separarla en dos términos basados en la función de transferencia del sistema sin el cero, $G_2(s)$:

$$G(s) = G_2(s)(1 + \beta s) = G_2(s) + \beta s G_2(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} + \beta s \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.29)$$

Considerando que la respuesta temporal cuando la entrada al sistema es una señal en escalón de amplitud U_e para el sistema $G_2(s)$ se puede obtener a partir de $Y_2(s) = G_2(s)U(s)$, la respuesta a escalón del sistema descrito por $G(s)$ se obtiene de la siguiente manera:

$$Y(s) = G(s) \frac{U_e}{s} = \left(G_2(s) + \beta s G_2(s) \right) \frac{U_e}{s} = G_2(s) \frac{U_e}{s} + \beta s G_2(s) \frac{U_e}{s} = Y_2(s) + \beta s Y_2(s) \quad (3.30)$$

siendo $Y_2(s)$ la transformada de Laplace de $y_2(t)$, que es la respuesta a escalón del sistema sin el cero representado por la ecuación (3.27). Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$y(t) = y_2(t) + \beta \frac{dy_2(t)}{dt} \quad (3.31)$$

Es decir, que en base al resultado obtenido en (3.31) se interpreta que la influencia de un cero en la respuesta temporal de un sistema de segundo orden cuando la entrada es una señal escalón, viene dada por la respuesta temporal original del sistema más la derivada de dicha respuesta ponderada por una constante β .

Si el sistema es sobreamortiguado, la representación de la función de transferencia del sistema de segundo orden con un cero pasa a ser:

$$G(s) = \frac{k(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \quad (3.32)$$

donde τ_1 y τ_2 son las constantes de tiempo asociadas a los dos polos reales (ver Sección 3.2). En este caso la respuesta se verá afectada por la posición relativa del cero respecto a los dos polos reales. Cabe recordar que cuando un cero se sitúa cerca de un polo, se cancelan en gran medida los efectos de los dos elementos en la respuesta. Si $\tau_1 \neq \beta$, $\tau_2 \neq \beta$ y $\tau_2 > \tau_1 > 0$ se obtiene la respuesta a entrada en forma de escalón:

$$y(t) = k \left(1 - \frac{\tau_2 - \beta}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + \frac{\tau_1 - \beta}{\tau_2 - \tau_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}} \right), \quad t \geq 0 \quad (3.33)$$

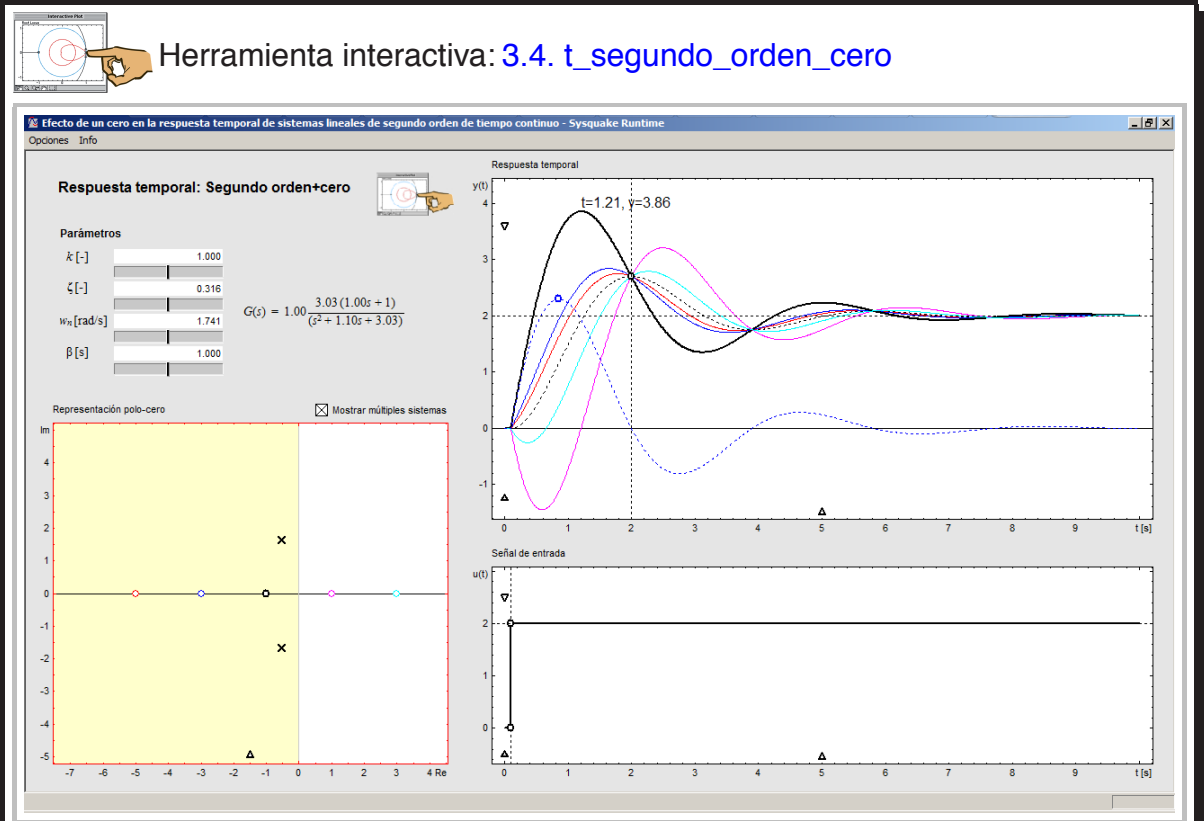
Hay que destacar que las respuestas influenciadas por la presencia de un cero se clasifican en dos tipos según sea el cero positivo o negativo. Cuando $\beta > 0$, el cero se encuentra en el semiplano izquierdo del plano s y la respuesta se conoce como de *fase mínima*, donde la respuesta temporal se verá afectada en forma de un aumento en la rapidez de respuesta y en la sobreoscilación. Por otro lado, cuando $\beta < 0$, el cero se encuentra en el semiplano derecho del plano s y la respuesta se conoce como de *fase no mínima*, donde ahora el término que acompaña a la derivada $dy_2(t)/dt$ en (3.31) se resta de la respuesta temporal $y_2(t)$ provocando una respuesta inversa a la dirección original de la respuesta del sistema durante un periodo determinado de tiempo. En [7] se distinguen los siguientes casos:

1. $\beta < 0$: El sistema presenta *respuesta inversa*, que es tanto más pronunciada cuanto más se acerca el cero $-1/\beta$ al origen del plano complejo.
2. $\beta > \tau_2 > \tau_1$: La respuesta presenta una *sobreoscilación* tanto más acusada cuanto más cercano esté el cero negativo al origen respecto a la posición de los polos.
3. $\beta \approx \tau_2 \gg \tau_1$: En ese caso, la evolución de la salida se puede aproximar por $y(t) \approx k(1 - \exp(-t/\tau_1))$, $t \geq 0$, y el sistema puede tratarse como si fuera de primer orden, aunque debido al par polo-cero despreciado, se genera un transitorio de pequeña magnitud que produce una deriva lenta de la salida hacia su situación de estado estacionario.
4. $\tau_2 > \beta > \tau_1$: La presencia del cero tiende a acelerar la respuesta respecto al caso sin cero. Si el cero está cerca del polo más alejado del origen, la respuesta cada vez se aproximará más a la de un sistema de primer orden con constante de tiempo τ_2 . En este caso no se produce una deriva lenta de la salida hacia su estado estacionario porque la dinámica despreciada se anula rápidamente.
5. $\tau_2 > \tau_1 > \beta$: Al alejar el cero del origen del plano complejo (y de los polos), la respuesta tiende a la que tendría el sistema de segundo orden con los mismos polos pero sin el cero.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Capítulo 6, ejercicio 6.14, página 200, 2008.
- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 4, sección 4, apartado 4, páginas 105-111, 2009.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima Edición. Pearson Prentice Hall. ISBN: 84-205-4401-9. Capítulo 5, páginas 254-256, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 3, sección 5, páginas 138-148, 315-316, 2010.

Aplicación



Respuesta temporal: Segundo orden + cero

Esta herramienta tiene como objetivo principal estudiar y analizar el efecto de la presencia de un cero sobre la respuesta temporal de sistemas de segundo orden lineales invariantes en el tiempo de forma interactiva. Para ello, la herramienta contiene áreas enlazadas interactivamente que permiten llevar a cabo esta tarea.

La zona izquierda de la herramienta está dedicada a la definición de los **Parámetros** que describen la función de transferencia del sistema, tanto en el caso subamortiguado (k , ζ , ω_n y β) como en el sobreamortiguado (k , τ_1 , τ_2 y β), siendo posible modificar numéricamente los valores de cada uno de ellos a través de los cuadros de texto o barras de desplazamiento disponibles con esa finalidad. Esos valores se ven también afectados por un cambio en la posición de los polos y/o el cero del sistema en la Representación polo-cero. Además, la sección **Parámetros** incluye una representación simbólica de la función de transferencia del sistema que se está analizando (siguiendo la nomenclatura utilizada en la ecuación (3.28)), cuyos coeficientes se actualizan a medida que se produce un cambio que afecte a los mismos en cualquier parte de la herramienta.

Por omisión, la herramienta carga un único sistema de segundo orden con cero, pero es posible Mostrar múltiples sistemas accediendo a la opción que se encuentra sobre el gráfico de Representación polo-cero. En ese caso, se incluyen cinco ceros correspondientes a cinco sistemas dinámicos que tienen los dos polos en común.

Aplicación...

Los ceros se representan mediante círculos de distintos colores (siendo el cero que representa al sistema activo el que está en negrita y color negro, \circ), mientras que los dos polos se representan usando el símbolo \times . Por omisión, la herramienta incluye dos polos complejos conjugados representando a un sistema subamortiguado, pero si se arrastran dichos polos hasta el eje de abscisas, automáticamente se convierten en dos polos reales y se actualiza tanto la representación simbólica de la función de transferencia como los cuadros descriptivos de los parámetros según la ecuación (3.32). El desplazamiento de polos y ceros se realiza de la forma habitual, mediante un movimiento de arrastre de los mismos con el ratón. Su posición se representa en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

La zona derecha de la herramienta está dedicada a la respuesta temporal del sistema. Existen dos gráficas, *Respuesta temporal*, donde se visualiza la respuesta temporal de los sistemas frente a entradas tipo escalón, y *Señal de entrada*, que contiene la entrada en escalón del sistema, pudiéndose modificarse de forma interactiva el instante en que se produce el escalón (accediendo al círculo inferior o arrastrando la línea vertical discontinua) o bien la amplitud del mismo (arrastrando el círculo superior o la línea horizontal discontinua). En la esquina inferior izquierda de la herramienta se visualiza también el instante en que se introduce el escalón y la amplitud del mismo, a la vez que sobre la gráfica se visualiza una etiqueta con el instante y el valor de la señal del punto que se esté señalando con el ratón.

Desde *Respuesta temporal* es posible observar una relación temporal de los parámetros característicos del sistema, pudiendo modificar sus valores interactivamente. Al colocar el puntero del ratón sobre la curva, se activa una etiqueta con información sobre el instante de tiempo seleccionado y el valor de la señal de salida. En esta gráfica se muestran tres curvas:

- Una curva en color negro con línea discontinua representando la respuesta del sistema sin el cero (función de transferencia (3.27) o la correspondiente al sistema sobreamortiguado sin el cero (3.13)).
- Una curva con línea continua y de color negro que representa la respuesta del sistema con el cero (función de transferencia (3.28) para sistemas subamortiguados y (3.32) para sobreamortiguados).
- Una tercera curva de trazo discontinuo y color azul, que corresponde a la derivada de $y(t)$ ponderada por el valor β , $\left(\beta \frac{dy_2(t)}{dt}\right)$, descrito en (3.31).

Mediante el círculo de color azul (\circ) sobre esta última curva, es posible cambiar el valor del parámetro β y por tanto de la localización del cero correspondiente. Además, como ocurría en el caso de la herramienta dedicada a la respuesta temporal de sistemas lineales de segundo orden sin cero (Sección 3.2), sobre la curva que representa al sistema original con trazo discontinuo de color negro se puede modificar el factor de amortiguamiento relativo del sistema y por tanto la sobreoscilación de la respuesta temporal desplazando la posición del círculo situado en el punto de valor máximo de la respuesta temporal.

Además, es posible variar el valor de la frecuencia natural no amortiguada desplazando la línea vertical de trazo discontinuo ligada al punto donde la respuesta del sistema sin el cero alcanza su valor máximo. También se puede cambiar la ganancia estática del proceso, arrastrando con el puntero del ratón la línea horizontal discontinua que define el valor de régimen estacionario.

Aplicación...

En el caso que el sistema posea dos polos reales, se dibujan dos líneas verticales representando las constantes de tiempo asociadas y que facilitan su modificación de forma interactiva. Cuando se selecciona o se coloca el puntero del ratón sobre cualquier elemento interactivo de la gráfica de Respuesta temporal, sus valores aparecen en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

El fondo de escala de los ejes de las figuras se puede modificar a través de los triángulos de color negro que aparecen en dichos ejes, pulsando a derecha o izquierda de los situados en el eje de abscisas o en la parte superior o inferior de los correspondientes al eje de ordenadas.

Cuando se selecciona Mostrar múltiples sistemas, el sistema activo se obtiene pulsando sobre el cero correspondiente o sobre la respuesta temporal seleccionada en las gráficas Representación polo-cero o Respuesta temporal respectivamente, dibujándose en negra.

El menú Opciones de esta herramienta únicamente incluye la opción Reset.

Ejercicios

1. Estudie y describa la diferencia que se observa en la respuesta temporal cuando el cero del sistema es positivo o negativo, es decir, cuando el cero se encuentra en el semiplano derecho o izquierdo, respectivamente. Utilice la opción Mostrar múltiples sistemas para un mejor análisis de los resultados.
2. Introduzca un ejemplo en la herramienta con cero cuya constante de tiempo representativa viene dada por $\beta = 0.1$ s. Modifique interactivamente su valor aumentándolo hasta $\beta = 4$ s y posteriormente volviendo a decrecer su valor hasta $\beta = 0.1$ s. ¿Qué influencia observa en la respuesta temporal del sistema? ¿Cómo se ve afectada la curva temporal de color azul representada en trazo discontinuo?
3. Introduzca un ejemplo en la herramienta con $\beta = -0.2$ s. Modifique interactivamente su valor haciéndolo decrecer hasta $\beta = -1$ s y posteriormente volviendo a aumentar su valor hasta $\beta = -0.2$ s. ¿Qué influencia observa en la respuesta temporal del sistema? ¿Cómo se ve afectada la curva temporal azul representada en línea discontinua?
4. Para la configuración de polos y ceros que aparece al iniciar la herramienta, analice (en relación a la parte real de los polos del sistema dada por $\sigma = -\zeta\omega_n$) a partir de qué valor de β el efecto del cero deja de ser apreciable. Realice este análisis para distintas configuraciones de polos y ceros.
5. Con la configuración de polos y ceros que aparece al arrancar la herramienta, ¿qué valor de β hace que la sobreoscilación sea el doble que la del sistema original sin el cero?, ¿se ve afectado el tiempo de pico? Justifique la respuesta. Realice este análisis para distintas configuraciones de polos y ceros.
6. Usando la configuración de polos y ceros que se carga por omisión y modificando únicamente el valor de $\beta = 1$, justifique qué condición define al punto en que se cortan por primera vez la curva de respuesta del sistema original sin el cero (línea discontinua) con la respuesta del sistema incluyendo el cero (trazo continuo grueso). Justifique la respuesta.
7. En el caso de respuesta inversa (sistemas de fase no mínima), justifique para el caso subamortiguado si es posible tener una sobreoscilación mayor que la que tiene el sistema original sin el cero. En caso afirmativo, ¿dicha sobreoscilación máxima se da para un tiempo de pico mayor o menor que el del sistema original?

8. Para una configuración con dos polos reales (correspondientes a $\tau_1 = 0.5$ s y $\tau_2 = 1$ s), encuentre el valor de β a partir del cual la respuesta es similar a la del sistema original sin el cero. Modifique la localización de los polos y realice de nuevo el análisis. Justifique los resultados obtenidos.
9. Para una configuración con dos polos reales (correspondientes a $\tau_1 = 0.5$ s y $\tau_2 = 1$ s), comente la respuesta que se obtiene cuando $\beta = 0.5$ s y cuando $\beta = 1$ s. Justifique la respuesta.
10. Compruebe con la herramienta el análisis realizado en el resumen de teoría con la ecuación (3.33). Tome valores adecuados de β , τ_1 y τ_2 que le permitan analizar la respuesta temporal que se obtiene en los cinco casos considerados en función de la posición relativa de los polos y el cero:
 - a) $\beta < 0$: $\beta = -1$.
 - b) $\beta > \tau_2 > \tau_1$: $\beta = 3$ s, $\tau_2 = 2$ s, $\tau_1 = 1$ s.
 - c) $\beta \approx \tau_2 \gg \tau_1$: $\beta = 2$ s, $\tau_2 = 1$ s, $\tau_1 = 0.1$ s.
 - d) $\tau_2 > \beta > \tau_1$: $\tau_2 = 10$ s, $\beta = 5$ s, $\tau_1 = 1$ s.
 - e) $\tau_2 > \tau_1 > \beta$: $\tau_2 = 10$ s, $\tau_1 = 5$ s, $\beta = 1$ s.

Verifique que los comentarios realizados en el resumen teórico son ciertos.

11. Usando la configuración que aparece cuando se inicia la aplicación, calcule el valor de β que produce:
 - a) Una sobreoscilación del 50 %.
 - b) Un tiempo de pico de 2 s.
 - c) Una respuesta inversa cuyo máximo en valor absoluto coincida con el máximo de la respuesta directa.
12. Considere el siguiente sistema de segundo orden (referencia [2], página 200):

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 0.5 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = a \frac{du(t)}{dt} + u(t).$$

con condiciones iniciales nulas.

- a) Muestre que la pendiente inicial de la respuesta a escalón es a . Razone qué supone que $a < 0$.
- b) Muestre que existen puntos en la respuesta a escalón que son invariantes con el valor de a . Discuta cualitativamente el efecto del parámetro a en la solución (puede ayudarse para ello de la opción *Mostrar múltiples sistemas*).
- c) Simule el sistema con la herramienta y explore el efecto que tiene a sobre el tiempo de subida y la sobreoscilación.

3.5 Respuesta temporal de sistemas lineales genéricos de tiempo continuo

Herramienta interactiva: [3.5. t_genérico](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Sistemas lineales invariantes en el tiempo de orden superior.
- Efecto que produce la inclusión de nuevos ceros, polos, integradores y derivadores sobre la respuesta temporal a escalón unitario de sistemas de segundo orden.

Teoría En las secciones previas se ha estudiado la respuesta temporal de sistemas lineales invariantes en el tiempo de primer y segundo orden, así como el efecto de introducir un cero en su función de transferencia. En esta sección se va a analizar también la presencia de:

- *Integradores*: polos en el origen $s = 0$. Como se comentó en la Sección 3.1, un caso particular de sistema de primer orden es un integrador, que viene representado por una función de transferencia $G(s) = 1/s$.
- *Derivadores*: Un derivador es un sistema que tiene una función de transferencia $G(s) = s$, es decir, un cero en el origen $s = 0$.
- *Tiempo de retardo* (o retardo de tiempo), t_r : retardo temporal puro que provoca que lo que suceda en un tiempo t en un punto del sistema ocurre en otro punto del sistema pasado un tiempo $t + t_r$. Su efecto es que se produce un desplazamiento temporal de la respuesta del sistema.

Además, cuando se obtienen modelos de sistemas físicos o cuando se implementan sistemas de control en lazo cerrado, pueden aparecer sistemas con un orden superior al tratado hasta el momento (el orden del modelo es el grado del polinomio del denominador de la función de transferencia o polinomio característico). En muchos casos, la respuesta de dichos sistemas se puede asimilar a la de sistemas más sencillos para facilitar, por ejemplo, el diseño de controladores (incurriendo en un error de modelado). En estos casos, se puede comprobar que la respuesta de sistemas de orden superior se puede construir a partir de las respuestas conocidas de sistemas de primer y segundo orden.

Un sistema de orden n se puede representar a través de la siguiente ecuación diferencial de orden n :

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y(t) &= \\ &= b_m \frac{d^m u_r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u_r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du_r(t)}{dt} + b_0 u_r(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

donde $y(t)$ es la salida del sistema, $u(t)$ la entrada y $u_r(t) = u(t - t_r)$. Aplicando la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas, se obtiene la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0} e^{-t_r s}; \quad (m \leq n) \quad (3.35)$$

donde el término exponencial representa el tiempo de retardo (proviene de la aplicación de la propiedad de desplazamiento en t de la transformada de Laplace, Tabla 3.1). La condición $m \leq n$ es necesaria para garantizar la causalidad del sistema y que el modelo tenga sentido físico (en caso contrario la salida del modelo en el instante actual dependería del futuro). Las raíces del numerador de la función de

transferencia son los *ceros* y las del denominador (polinomio característico) se denominan *polos*. Si se factorizan los polinomios del numerador y del denominador, se puede obtener:

$$G(s) = \kappa \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} e^{-t_r s} \quad (3.36)$$

Si se aplica el teorema del valor final a la expresión (3.36), se tiene que la ganancia estática de $G(s)$ es:

$$G(0) = k = \kappa \frac{\prod_{\ell=1}^m (-z_\ell)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)}$$

Como se indica en [13], es importante destacar que el teorema del valor final sólo debe ser aplicado a sistemas estables. Si por ejemplo se tiene que:

$$Y(s) = \frac{\kappa}{s(s - p)} \rightarrow y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = -\frac{\kappa}{p},$$

que es un valor finito. Sin embargo, si $p > 0$ la salida no es una señal acotada, en contra de lo que predice el teorema del valor final:

$$y(t) = -\frac{\kappa}{p} (1 - e^{pt})$$

Se van a analizar a continuación los casos más intuitivos y sencillos [31]. La respuesta de este sistema a un escalón unitario, en el caso en que se consideren sólo polos reales y distintos, sin ceros y sin tiempo de retardo, viene dada por:

$$Y(s) = \frac{k}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{s - p_i} \quad (3.37)$$

En (3.37) c_i es el residuo del polo en $s = p_i$ (si el sistema tiene polos múltiples, entonces $Y(s)$ tendrá términos de polos múltiples). En el caso estable y estrictamente causal (todos los polos en el semiplano izquierdo, $p_i < 0$, y grado del denominador mayor que el del numerador), los residuos determinan la importancia relativa de cada componente de la salida. Si un polo se ubica lejos del origen, su residuo puede ser pequeño (en función de las posiciones relativas de los polos y los ceros), indicando que su influencia sobre la salida es pequeña y dura un tiempo muy corto (teniendo en este caso un polo "poco dominante"). De ese modo, los *polos dominantes* son los que se encuentran más cercanos al eje imaginario, pudiéndose reducir el orden de modelos teniendo en cuenta este hecho (no considerando el efecto de los polos alejados del origen).

Si se trata el caso sin tiempo de retardo y sin ceros en que los polos de $Y(s)$ están formados por polos reales y pares de polos complejos conjugados (que producen términos de segundo orden en s), se obtiene una forma factorizada de la ecuación característica de orden superior formada por términos de primer y segundo orden:

$$Y(s) = \frac{k}{s} + \sum_{i=1}^q \frac{c_i}{s - p_i} + \sum_{\ell=1}^r \frac{d_\ell(s + \zeta_\ell \omega_{n\ell}) + f_\ell \omega_{n\ell} \sqrt{1 - \zeta_\ell^2}}{s^2 + 2\zeta_\ell \omega_{n\ell} s + \omega_{n\ell}^2}; \quad (q + 2r = n) \quad (3.38)$$

donde se supone que los polos son distintos. En el caso que existan polos múltiples, también aparecerán términos de polos múltiples en $Y(s)$ (no se incluyen en esta explicación). De esta ecuación se puede

inferir que la respuesta de un sistema de orden superior sin tiempo de retardo y sin ceros a una entrada en escalón unitario es la superposición de respuestas de sistemas de primer y segundo orden:

$$y(t) = k + \sum_{i=1}^q c_i e^{p_i t} + \sum_{\ell=1}^r d_{\ell} e^{-\zeta_{\ell} \omega_{n\ell} t} \cos\left(\omega_{n\ell} \sqrt{1 - \zeta_{\ell}^2} t\right) + \sum_{\ell=1}^r f_{\ell} e^{-\zeta_{\ell} \omega_{n\ell} t} \operatorname{sen}\left(\omega_{n\ell} \sqrt{1 - \zeta_{\ell}^2} t\right); \quad t \geq 0 \quad (3.39)$$

Si el sistema es estable, la curva de respuesta es la suma de curvas exponenciales y sinusoidales amortiguadas y todos sus polos tendrán parte real negativa, de modo que en régimen estacionario la salida, cuando la entrada tiene forma de escalón unitario, será $y(t \rightarrow \infty) = k$.

En sistemas que tengan ceros o tiempos de retardo se pueden obtener expresiones y conclusiones similares, pero se ha preferido restringir en esta ficha el desarrollo a los casos anteriores porque son los más intuitivos y fáciles de comprender.

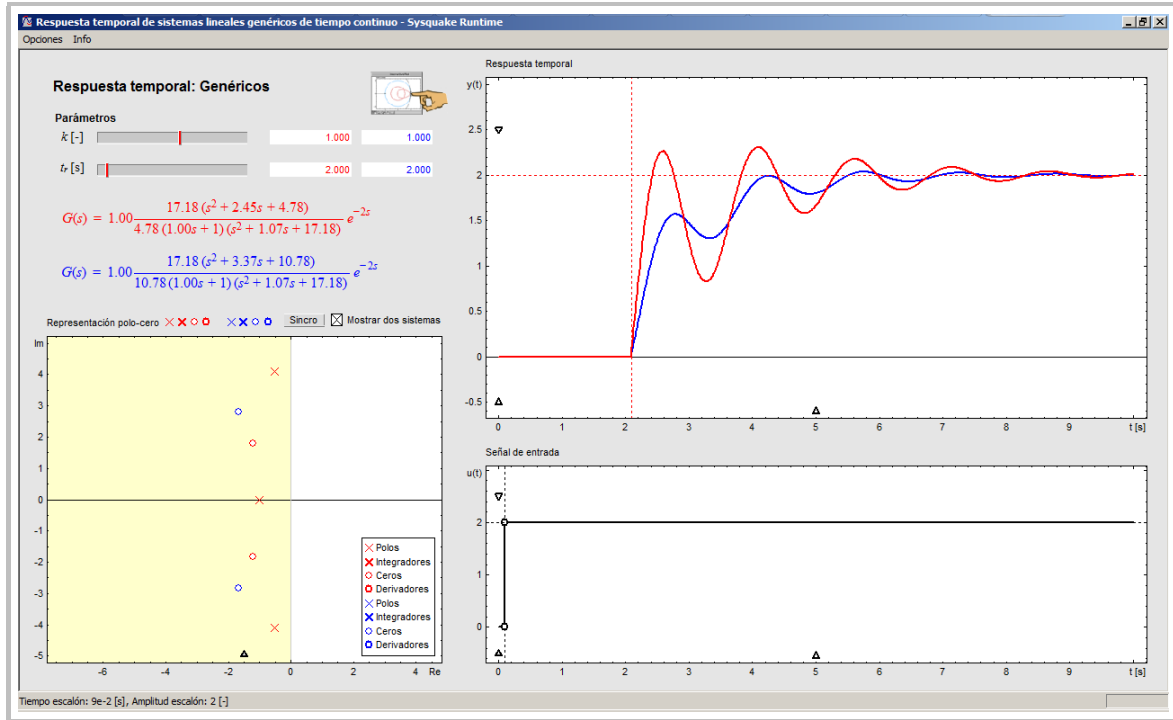
Otro concepto relacionado con los sistemas de orden superior es el de relación de *dominancia* o *dominancia relativa*, que se analizará en la siguiente sección.

Bibliografía

- [4] Barrientos, A., R. Sanz, F. Matía y E. Gambao. Control de sistemas continuos. Problemas resueltos. Mc Graw Hill, ISBN: 84-481-0605-9. Capítulo 4, sección 4, páginas 142-144, sección 11, páginas 172-176, 1996.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima Edición. Pearson Prentice Hall. ISBN: 84-205-4401-9. Capítulo 5, páginas 253-256, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 3, sección 1, páginas 113-114, ejemplo 3.28, páginas 145-146, 2010.
- [26] Kuo, B. C. Sistemas de control automático. Séptima Edición. Prentice Hall. ISBN: 968-880-723-0. Capítulo 7, sección 7, páginas 415-429, 1996.
- [29] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Cuarta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 84-205-3678-4. Capítulo 5, sección 4, páginas 239-243, 2003.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 5, sección 4, páginas 179-182, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 5, apartado 3, páginas 16-19, 1993.

Aplicación

Herramienta interactiva: 3.5. t_genérico



Respuesta temporal: Genéricos

El objetivo principal de esta ficha es analizar la respuesta temporal de sistemas lineales invariantes en el tiempo genéricos, entendidos como tales aquéllos que puedan tener un número arbitrario de polos (incluyendo en este caso polos en el origen o integradores), un número arbitrario de ceros (incluyendo ceros en el origen o derivadores puros) y tiempo de retardo. La herramienta garantiza que las funciones de transferencia sean propias o causales (en el sentido que el grado del polinomio del denominador o polinomio característico debe ser mayor o igual que el grado del polinomio del numerador). Existe una limitación en la herramienta sobre el número de polos y ceros que se pueden incluir para que sea computacionalmente manejable, como se comenta a continuación.

Como las aplicaciones anteriores, la herramienta es interactiva y está dividida en cuatro áreas principales. En este caso, aparecen novedades en la forma de manejar los elementos interactivos.

Parámetros: En el área superior izquierda se muestra una representación simbólica de la función de transferencia, sobre la que aparecen dos barras de desplazamiento que permiten modificar los valores de la ganancia estática k y del retardo del sistema t_r (limitado entre 0 y 30). Los valores de ambos parámetros se pueden fijar también a través de cuadros de texto.

Aplicación...

Las denominaciones que aparecen en este caso son k_1 y t_{r_1} , porque es posible activar la opción **Mostrar dos sistemas** sobre la gráfica del diagrama de polos y ceros. En ese caso, la barra de desplazamiento y el texto correspondiente al valor de los parámetros del sistema original se muestran en color **rojo**, mientras que los correspondientes al segundo sistema (k_2 y t_{r_2}) se representan en **azul**. Al activar ambos sistemas se hacen visibles las dos representaciones simbólicas de las funciones de transferencia y se superponen las barras de desplazamiento de ambos, siendo sensible la del sistema original. Si se desplazan las barras de desplazamiento se hacen visibles ambas respuestas. En este área no se incluyen cuadros de texto ni barras de desplazamiento ligadas a otros parámetros dinámicos, cuyos valores se introducirán o modificarán mediante el editor asociado al diagrama de polos y ceros.

Representación polo-cero: La principal novedad que introduce esta herramienta interactiva respecto a las anteriores es la posibilidad de utilizar un *editor de polos y ceros* para configurar la función de transferencia del sistema que se desee estudiar. Dentro de la gráfica hay una leyenda donde se indica que los polos se dibujan usando el símbolo \times , los integradores con el mismo símbolo pero en negrita (\times), los ceros con el símbolo \circ y los derivadores con el mismo símbolo en negrita (\circ). En el caso del sistema que aparece por omisión el color utilizado es el **rojo** y si se selecciona la opción de **Mostrar dos sistemas** se hacen visibles las mismas leyendas en color **azul**, correspondientes al segundo sistema a estudiar. La configuración del sistema se realiza arrastrando dentro del plano complejo los elementos gráficos situados en el repositorio (elementos \times , \times , \circ , \circ) junto al título de la figura **Representación polo-cero**. Si se colocan sobre el eje real corresponderán a la selección de un polo o un cero reales y si se dejan sobre cualquier lugar donde las raíces tengan parte imaginaria corresponderán a polos o ceros complejos conjugados. Si se arrastra sobre cualquier área de la gráfica un integrador o un derivador, automáticamente se ubican en el origen ($s = 0$). Los elementos que se introduzcan se pueden extraer de la gráfica arrastrándolos en dirección hacia el repositorio. En todo momento existe la limitación de un número máximo de 4 polos, no existe limitación en el número de integradores y el número máximo de ceros debe ser tal que se garantice la causalidad del sistema. Esta condición se comprueba incluso a la hora de extraer o eliminar elementos de la gráfica (no se pueden quitar polos si con dicha acción se pierde la condición de causalidad). Sobre la gráfica existe un botón de sincronización (**Sincro**) que, cuando está activa la opción de **Mostrar dos sistemas**, provoca que el segundo sistema (representado en **azul**) sea exactamente igual al primero (representado en **rojo**), para poder analizar de una forma directa el efecto de modificar los parámetros de uno de los dos sistemas en relación a la configuración inicial. Colocando el puntero del ratón sobre un polo o un cero, su posición se indica en la esquina inferior izquierda de la aplicación.

Respuesta temporal: En la zona superior derecha de la aplicación se incluyen las gráficas de respuestas temporales de los sistemas representados, pudiéndose cambiar la escala accediendo a los triángulos colocados cerca de los ejes de abscisas y ordenadas. También se pueden modificar aquí las ganancias estáticas de los sistemas (a través de la línea discontinua horizontal del color correspondiente) y el tiempo de retardo (a través de la línea discontinua vertical del color asociado al sistema escogido). Cuando se selecciona o se coloca el puntero del ratón sobre alguna de esas líneas interactivas, se visualizan en la esquina inferior izquierda de la herramienta los valores de las variables que representan (ganancia o tiempo de retardo). Si se coloca el ratón sobre cualquier punto de las gráficas de respuesta temporal, se activan sobre las mismas unas etiquetas que definen las coordenadas de ese punto - tiempo (t) y salida (y).

Aplicación...

Señal de entrada: En el área inferior derecha se dibuja la señal escalón introducida al sistema que produce las respuestas mostradas en la gráfica superior. Accediendo con el puntero del ratón sobre el círculo negro superior (o bien sobre la línea negra horizontal de trazo discontinuo) se puede variar la amplitud del escalón, mientras que el círculo inferior (o el arrastre de la línea negra vertical de trazo discontinuo) habilita el cambio del instante de activación de la señal. En la esquina inferior izquierda de la herramienta se visualiza también el instante en que se introduce el escalón y la amplitud del mismo y, como ocurre en el caso de las gráficas de la salida del sistema, el posicionamiento del ratón sobre cualquier punto de la señal de escalón activa las etiquetas con las coordenadas de ese punto - tiempo (t) y entrada (u).

En el menú Opciones existe la posibilidad de incluir cualquier función de transferencia en formatos tipo (NUM,DEN) o ZPK. Se han incluido también tres ejemplos para inicializar la función de transferencia de los dos sistemas y poder analizar o comparar la respuesta en función de sus parámetros:

- Ejemplo 1: Muestra dos sistemas, representados por las funciones de transferencia $G_1(s)$ y $G_2(s)$, para estudiar el efecto de los polos dominantes:

$$G_1(s) = \frac{1}{(1 + 0.5s)(1 + s)} \quad G_2(s) = \frac{1}{(1 + s)}$$

- Ejemplo 2: Sistema con un polo en $s = -2$, otro polo en $s = -5$ y un cero en $s = -10$. Útil para analizar el efecto de la inclusión de un cero en un sistema sobreamortiguado e introducir el concepto de cancelación polo-cero.
- Ejemplo 3: Representa un sistema con tres polos reales en $s = -1$ y dos ceros complejos conjugados con parte real en $s = -4$. Este ejemplo ayuda a visualizar y comprender la influencia de ceros complejos conjugados en la respuesta temporal, así como introducir el concepto de aproximaciones polinomiales al tiempo de retardo (aproximación de Padé) a través de la experimentación.

Además, se incluye otra opción (Analizar dominancia), que se tratará en la ficha siguiente.

Ejercicios

1. Introduzca únicamente un integrador en la gráfica Representación polo-cero. Comente la clase de respuesta que se produce en función de la entrada en escalón e indique algún parámetro característico de la misma.
2. Manteniendo el integrador, introduzca un polo real. ¿En qué ha cambiado la respuesta? ¿Cuál es el efecto de alejar el polo real del eje imaginario? Realice el ejercicio tanto en el caso de colocar el polo real en el semiplano izquierdo como en el derecho.
3. ¿Se puede introducir únicamente un derivador en la gráfica Representación polo-cero? Justifique la respuesta. Introduzca un polo y un derivador y comente el efecto que se produce al acercar el polo al derivador. Realice el ejercicio tanto en el caso de colocar el polo real en el semiplano izquierdo como en el derecho.
4. Cuando se introduce un tiempo de retardo, comente qué áreas de la herramienta se ven afectadas y justifique la respuesta.

5. Haciendo uso de la posibilidad que ofrece la herramienta de representar dos sistemas simultáneamente, seleccione uno de ellos con una función de transferencia:

$$G_1(s) = \frac{1}{(1+0.5s)(1+s)} \quad \text{y el otro como} \quad G_2(s) = \frac{1}{(1+s)}$$

¿Cuánto tiene que alejar del eje real el polo en $s = -2$ para que la respuesta obtenida con $G_1(s)$ sea casi similar a la obtenida con $G_2(s)$?

6. Introduzca un sistema con un polo en $s = -2$ y otro polo en $s = -5$. Incluya a continuación un cero en $s = -10$. Acerque paulatinamente el cero hacia el eje imaginario y comente qué ocurre cuando el cero pasa por encima de los polos. Aproveche la opción de Mostrar dos sistemas para introducir un segundo sistema de primer orden con su polo colocado en primer lugar en $s = -2$ y en segundo lugar en $s = -5$. Estas dos configuraciones le ayudarán a comentar la respuesta.
7. Seleccione el Ejemplo 2 del menú de Opciones. Analice la influencia del cero en la respuesta temporal comparándolo con el sistema original sin el cero. Para realizar la comparación utilice la opción de Mostrar dos sistemas cuando introduzca los polos y pulse el botón Sincro, sacando del plano s el cero de uno de los sistemas. Desplace el cero desde su posición inicial hasta la misma posición en el semiplano derecho. ¿Puede aproximarse el efecto del cero en el semiplano derecho a un tiempo de retardo?
8. Seleccione el Ejemplo 3 del menú de Opciones y posicione dos de los polos de forma que sean complejos conjugados. Analice el efecto que tiene modificar la posición de los ceros complejos conjugados en relación al resto de elementos dinámicos. ¿Qué ocurre si se colocan los dos ceros complejos conjugados en el semiplano derecho? ¿Se puede asimilar su efecto a un tiempo de retardo? Sitúe los ceros en una posición en la que se consiga un efecto similar a un tiempo de retardo de 2 segundos.
9. Usando la opción que le permite introducir la función de transferencia en formato (NUM,DEN), dibuje la respuesta a escalón unitario de los siguientes sistemas (referencia [4], páginas 142-144).

$$G_1(s) = \frac{-s}{s+2} \quad G_2(s) = \frac{s-2}{s+4} \quad G_3(s) = \frac{1.25}{s^2+s+2.5} \quad G_4(s) = \frac{1}{s^2+2s-1}$$

10. Dado el sistema

$$G(s) = \frac{5}{(s+c)(s^2+s+4.25)}$$

compare su respuesta cuando la entrada es un escalón unitario para $c = 5$, $c = 1$ y $c = 0.1$ (referencia [4], páginas 172-176).

11. Dado el sistema:

$$G(s) = \frac{5(s+b)}{(s+2)(s^2+s+4.25)}$$

compare su respuesta cuando la entrada es un escalón unitario para $b = 5$, $b = 1$, $b = 0.1$ y $b = -1$.

12. Considere un sistema (modificado de la referencia [13], página 145) que relaciona la altura de un avión $y(t)$ con el timón de elevación (la señal de control $u(t)$ se considera como la integral de las acciones realizadas sobre dicho timón). La función de transferencia viene dada por:

$$G(s) = \frac{5(s-6)}{(s^2+4s+13)}$$

Analice la respuesta temporal a escalón unitario. Examine sobre este sistema si son precisas las fórmulas utilizadas para calcular t_s (3.20), t_p (3.19), t_e (3.21) y SO (3.18) en sistemas de segundo orden.

3.6 Dominancia en el dominio temporal

Herramienta interactiva: 3.6. t_dominancia

Conceptos analizados en la ficha

- Polos dominantes.
- Relación de dominancia o dominancia relativa en el dominio temporal.

Teoría En la ficha correspondiente a la respuesta temporal de sistemas lineales genéricos (Sección 3.5), se ha analizado cómo la respuesta a escalón unitario de un sistema dinámico de orden $n = q + 2r$ (sin polos ni ceros múltiples y sin tiempo de retardo) viene dada por:

$$y(t) = k + \sum_{i=1}^q c_i e^{p_i t} + \sum_{\ell=1}^r d_{\ell} e^{-\zeta_{\ell} \omega_{n\ell} t} \cos\left(\omega_{n\ell} \sqrt{1 - \zeta_{\ell}^2} t\right) + \sum_{\ell=1}^r f_{\ell} e^{-\zeta_{\ell} \omega_{n\ell} t} \operatorname{sen}\left(\omega_{n\ell} \sqrt{1 - \zeta_{\ell}^2} t\right); \quad t \geq 0 \quad (3.40)$$

Si el sistema es estable ($p_i < 0$), la curva de respuesta es la suma de curvas exponenciales y sinusoidales amortiguadas y todos sus polos tendrán parte real negativa. Cuando se introduce a la entrada del sistema una señal en forma de escalón unitario, la salida en régimen estacionario será $y(t \rightarrow \infty) = k$. Cuanto más alejados están los polos del eje imaginario, mayores son sus partes reales (negativas) y sus términos exponenciales asociados llegan a cero más rápido. Por lo tanto, su influencia en la respuesta transitoria es poco representativa si existen polos cuya parte real esté más cercana al eje imaginario (estos últimos polos son los denominados *polos dominantes*).

Los polos determinan los modos de respuesta particulares que se presentarán y los ceros la influencia relativa de las funciones de los modos individuales (forma de la respuesta). Mover un cero más cerca de un polo específico reducirá la contribución relativa de la función de forma que corresponda al polo. La *dominancia relativa* o *relación de dominancia* de los polos se puede determinar mediante el cociente de sus partes reales. Si los cocientes de las partes reales son superiores a un cierto valor (que suele estar entre 2 y 10) y no hay ceros cerca, los polos más cercanos al eje imaginario $j\omega$ dominarán el comportamiento de la respuesta transitoria (componentes más lentos de la respuesta) [31].

Dada una función de transferencia $G(s)$ de un sistema estable, una vez considerados eventuales pares de polos y ceros próximos entre sí en el plano complejo (que en cierta medida *cancelarán* sus efectos), se llaman *polos dominantes* a aquéllos cuya parte real se encuentra situada más cerca del eje imaginario que la del resto de polos del sistema. La respuesta a escalón de un sistema con polos dominantes puede ser aproximada por la de un sistema con función de transferencia $G_a(s)$ que contiene exclusivamente dichos polos dominantes y con ganancia igual a la del sistema de partida. Por tanto, si un sistema tiene sólo uno o dos polos dominantes, su respuesta a escalón puede determinarse a partir de los resultados conocidos para sistemas de primer o segundo orden [7]. Naturalmente, para realizar la aproximación se debe tener en cuenta la presencia de ceros que estén a una distancia del eje imaginario comparable, o inferior, a la de los polos dominantes. Para un sistema de tercer orden con un polo real y dos polos complejos conjugados, la dominancia relativa de las raíces complejas se determina por la razón entre la raíz real y la parte real de las raíces complejas, de modo que dicho sistema se podría aproximar por uno de segundo orden con el mismo par de raíces complejas conjugadas si la razón es superior a 5 [10].

Se denomina *sistema reducido equivalente* a aquél que teniendo un menor número de polos y/o ceros que el original, muestra una respuesta temporal similar. Las reglas que se suelen seguir para reducir un sistema son [4]:

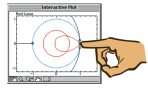
1. Nunca despreciar el efecto de un polo inestable.
2. Despreciar el efecto de los polos y/o ceros relativamente más alejados del origen.
3. Simplificar las parejas de polos-ceros relativamente próximos entre sí.
4. El sistema original y el reducido equivalente deben tener la misma ganancia estática.

Para cancelar el efecto de un cero con un polo, se suele adoptar como criterio que la distancia entre ellos sea menor que cinco o seis veces la distancia del polo dominante al origen [4]. En [26] se puede encontrar un enfoque más formal de aproximación.

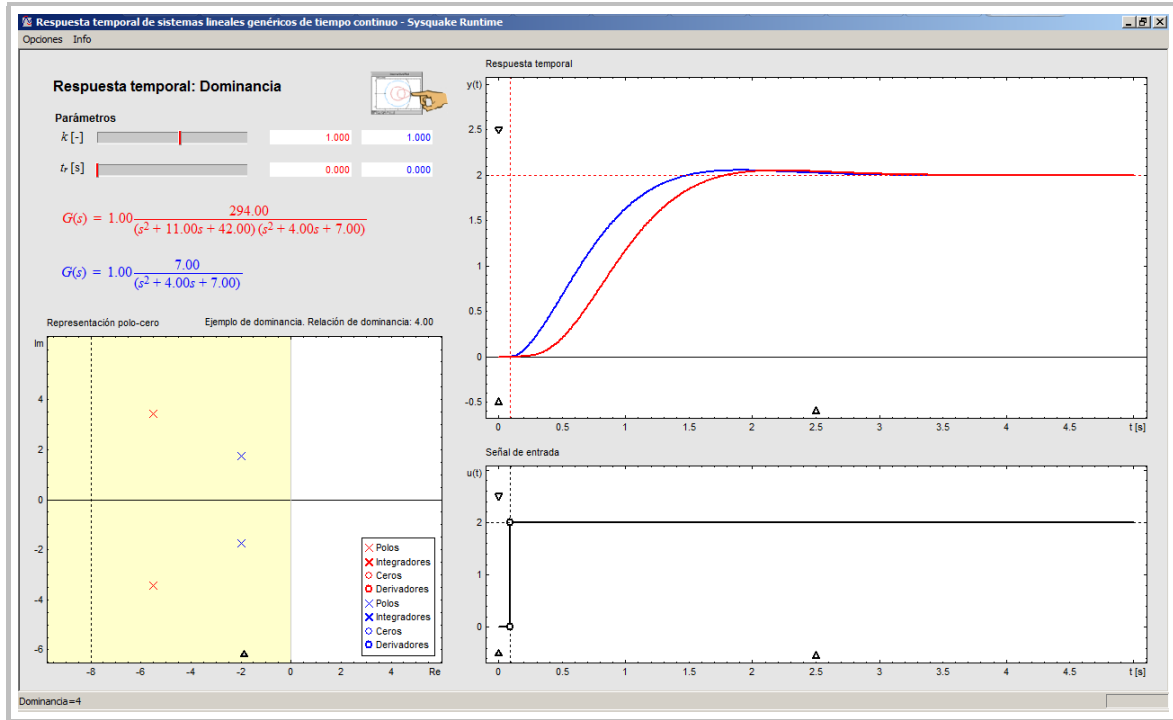
Bibliografía

- [4] Barrientos, A., R. Sanz, F. Matía y E. Gambao. Control de sistemas continuos. Problemas resueltos. Mc Graw Hill, ISBN: 84-481-0605-9. Capítulo 4, páginas 130-131 y 165-166, 1996.
- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 4, sección 4, apartado 6, páginas 111-112, 2009.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima Edición. Pearson Prentice Hall. ISBN: 84-205-4401-9. Capítulo 5, páginas 254-256, 2005.
- [10] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Modern control systems. Pearson - Prentice Hall, ISBN: 978-0-13-602458-3. Capítulo 5, sección 4, páginas 259-260, 2011.
- [26] Kuo, B. C. Sistemas de control automático. Séptima Edición. Prentice Hall. ISBN: 968-880-723-0. Capítulo 7, sección 8, páginas 422-436, 1996.
- [29] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Cuarta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 84-205-3678-4. Capítulo 5, sección 4, páginas 239-243, 2003.
- [30] Ogata, K. Modern control engineering. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-0-13-713337-6. Capítulo 5, sección 4, páginas 182, 2009.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 5, apartado 3, páginas 16-19, 1993.

Aplicación



Herramienta interactiva: 3.6. t_dominancia



Respuesta temporal: Dominancia

La aplicación es la misma que se ha descrito en la ficha anterior (Sección 3.5), por lo que no se va a volver a repetir en este caso. La única novedad es que en el menú Opciones aparece un elemento que permite Analizar dominancia. Si se activa esta opción, aparecen en el menú tres nuevos elementos:

- Relación de dominancia: Activa un cuadro de texto para modificar la relación de dominancia (cociente entre partes reales de los polos que aparecen en el ejemplo) en el rango de 2 a 10. También se dibuja en la gráfica de la Representación polo-cero una línea vertical negra de trazo discontinuo que marca la frontera para la cual se cumple esa relación de dominancia. Dicha línea es interactiva y permite modificar directamente la relación de dominancia. Si por ejemplo se escoge una relación de dominancia de 5, para que los polos más cercanos al eje imaginario se puedan considerar dominantes, el resto de los polos del sistema deberían encontrarse a la izquierda de dicha línea vertical. Si se desplazan los polos dominantes arrastrándolos con el ratón en la gráfica de la representación polo-cero, se desplaza también la línea vertical, a la vez que se modifican las respuestas temporales asociadas.
- Ejemplo de dominancia 1. Es la opción que se activa por omisión y corresponde a un sistema de cuarto orden con dos pares de polos complejos conjugados y una relación de dominancia de 5. En la zona de parámetros se muestra una representación simbólica de la función de transferencia del sistema en color rojo, así como la del sistema aproximado (en azul) que contiene únicamente los polos dominantes del sistema original y la misma ganancia y tiempo de retardo.

Aplicación...

Sobre dichas representaciones simbólicas se puede modificar también la ganancia k y retardo t_r asociados al sistema original y al aproximado. En la parte derecha de la pantalla se puede ver en la gráfica inferior el escalón de entrada y en la superior la respuesta del sistema original y del sistema aproximado. Se pueden desplazar en la representación polo-cero la ubicación de los polos dominantes (y por tanto se desplazará la línea vertical que describe la relación de dominancia) o bien los polos no dominantes, que se pueden poner a la izquierda de la línea de dominancia para ver que, a partir de ese punto, las respuestas del sistema original y del aproximado son prácticamente iguales. Nótese que para ambos sistemas, los polos dominantes son idénticos. Aparecen superpuestos en el diagrama de polos y ceros y se muestran en color azul.

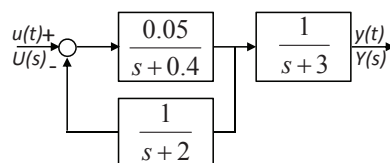
- Ejemplo de dominancia 2. En este caso, el sistema original es de segundo orden sobreamortiguado y el aproximado un sistema de primer orden cuyo polo es el polo dominante del sistema original. Desplazando ambos polos como en el caso anterior se puede analizar la relación entre la ubicación relativa de los dos polos del sistema original, la relación de dominancia y las respuestas temporales asociadas.

La parte superior del menú Opciones tiene habilitada la posibilidad de introducir funciones de transferencia genéricas para los dos sistemas (Introducir Planta 1 (roja), Introducir Planta 2 (azul)), en los dos formatos (NUM,DEN) y ZPK. Hay que hacer notar que en esta ficha, en todos los casos, los polos de la función de transferencia mostrada en color azul, los comparten ambos sistemas (serán replicados siempre de forma automática en la función de transferencia representada en color rojo), que de esa forma se introduce sin considerarlos.

El resto de características de la herramienta ya se han explicado en la ficha anterior (Sección 3.5).

Ejercicios

- Seleccione el Ejemplo de dominancia 1. Indique cuál es la relación de dominancia que presenta el sistema. Coloque los polos menos dominantes de forma que la relación de dominancia sea 2. ¿Aprecia una gran diferencia respecto al caso anterior?
- Seleccione el Ejemplo de dominancia 2. Indique cuál es la relación de dominancia que presenta el sistema. Indique las diferencias que aprecia en la respuesta temporal cuando ubica el polo menos dominante de forma que la relación de dominancia sea 2 y 10 respectivamente.
- Obtener el sistema reducido equivalente del descrito en la figura (referencia [4], páginas 165-166). Indique las diferencias que encuentra entre la respuesta temporal del sistema original y del reducido equivalente. Para implementarlo en la herramienta debe incluir el modelo reducido como sistema azul, de forma que el/los polos aparecerán automáticamente en la planta roja, en la que habrá que incluir únicamente los polos y ceros restantes.



3.7 Ajuste de modelos en el dominio temporal

Herramienta interactiva: [3.7. t_ajuste_modelos](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Concepto de ajuste por minimización de errores cuadráticos versus prueba y error.
- Obtención de modelos de primer y segundo orden con retardo a partir de datos experimentales obtenidos de la respuesta a escalón de un sistema dinámico.
- Índices de comportamiento de la respuesta temporal de un sistema dinámico.

Teoría Como los sistemas de control están provistos de *sensores y actuadores*, es posible obtener modelos dinámicos a partir de datos procedentes del proceso.

El modo más simple para determinar la dinámica de un sistema es observar la respuesta a una señal de escalón en su entrada. Se parte de un valor de la señal de entrada constante y de un valor de la salida en estado estacionario. En esas condiciones, se introduce una señal de entrada en forma de escalón, observando el comportamiento dinámico hasta que se alcanza una nueva situación de estado estacionario. Este ensayo, conocido como *método de la curva de reacción*, proporciona (a través de la forma de la respuesta) información de interés sobre la dinámica del proceso, como pueda ser el tiempo de respuesta, tipo de respuesta (subamortiguada, sobreamortiguada, ...) [1].

Como se observa en la Figura 3.2(a), cuando se realiza el ensayo de la curva de reacción sobre un sistema y tiene un tipo de respuesta de forma sigmoidal o exponencial, es fácil, mediante un análisis visual de la misma, estimar los parámetros característicos de un modelo de primer orden con tiempo de retardo dado por:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} e^{-t_r s}$$

- La ganancia estática k se obtiene como el cociente entre el cambio que experimenta la salida del sistema tras la introducción del escalón a la entrada en régimen permanente y la amplitud de dicho escalón (cambio realizado en la entrada): $k = (\Delta y / \Delta u) |_{t \rightarrow \infty}$.
- El tiempo de retardo se calcula como el tiempo que transcurre desde que se introduce el cambio en forma de escalón en la entrada hasta que la salida del sistema comienza a evolucionar.
- La constante de tiempo τ se calcula como el tiempo que transcurre desde que el sistema comienza a evolucionar (ya transcurrido el tiempo de retardo) hasta que alcanza el 63% de su valor de estado estacionario. Recuérdese que dicho valor se obtenía de hacer $t = \tau$ en la expresión de la respuesta temporal a escalón de un sistema de primer orden (ver Sección 3.1).

Del mismo modo, se pueden caracterizar respuestas oscilatorias. Si la salida del sistema presenta un comportamiento como el mostrado en la Figura 3.2(b) cuando a su entrada se introduce un escalón, se puede modelar esa respuesta como la de un sistema de segundo orden subamortiguado con tiempo de retardo:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} e^{-t_r s}$$

La ganancia estática k y el tiempo de retardo t_r se calculan de la misma forma explicada en el párrafo anterior para el caso de un sistema de primer orden.

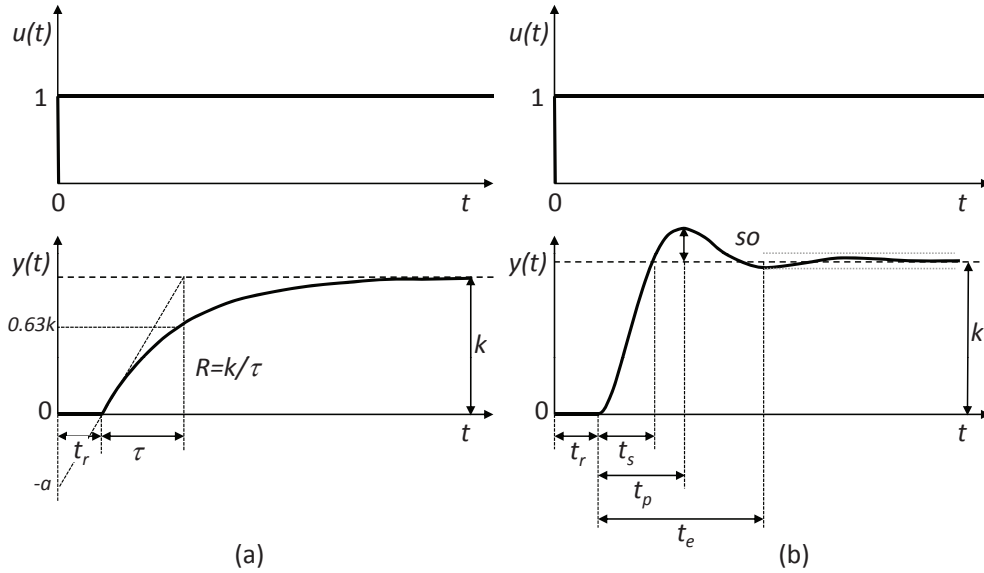


Figura 3.2 Caracterización de la respuesta a escalón unitario como: (a) un sistema de primer orden con tiempo de retardo, (b) un sistema de segundo orden

- El factor de amortiguamiento relativo ζ se obtiene midiendo en la curva la sobreoscilación (SO) y aplicando la fórmula que liga sobreoscilación con ζ (ecuación (3.18) de la Sección 3.2):

$$SO = \frac{y(t_p) - y(t \rightarrow \infty)}{y(t \rightarrow \infty)} = \exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \rightarrow \zeta = \sqrt{\frac{[\ln(SO)]^2}{[\ln(SO)]^2 + \pi^2}}$$

- Una vez obtenido ζ , se puede calcular el valor de la frecuencia natural no amortiguada ω_n a partir de una de las expresiones de los tres tiempos que caracterizan la respuesta del sistema de segundo orden que se muestran en la Figura 3.2(b): tiempo de pico (ecuación (3.19)), tiempo de subida (ecuación (3.20)) o tiempo de establecimiento del 2% (ecuación (3.21)). Por ejemplo, si se mide sobre la gráfica el tiempo de pico, se tiene que:

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}} \rightarrow \omega_n = \frac{\pi}{t_p \sqrt{1-\zeta^2}}$$

El objetivo del ajuste de modelos en el dominio temporal (generalmente descritos por una ecuación diferencial lineal o su correspondiente función de transferencia) es conseguir, mediante la modificación de sus parámetros descriptivos, que la salida del modelo $y_m(t)$ sea lo más parecida posible a la de un sistema físico real $y(t)$. Existen diferentes métodos de ajuste automático de modelos, siendo el más conocido el que busca obtener un modelo que minimice la integral del error cuadrático entre la salida del modelo y la del sistema real en un intervalo de tiempo $[t_0, t_f]$:

$$\theta^* = \operatorname{argmin}_{\theta} \int_{t_0}^{t_f} e^2(t) dt = \operatorname{argmin}_{\theta} \int_{t_0}^{t_f} (y(t) - y_m(t, \theta))^2 dt \quad (3.41)$$

donde θ es el vector de parámetros del modelo que se consideran en el proceso de identificación y $e(t)$ la diferencia entre la salida del modelo y la del sistema real en el tiempo t . θ^* es el vector de parámetros *óptimos* del modelo, es decir, el conjunto de parámetros que minimizan la integral de los errores cuadráticos y es el conjunto resultante de la identificación.

Realmente, cuando se desea ajustar la salida de un modelo a la de un sistema real, con lo que se cuenta es con un conjunto discreto de datos de entrada y salida del proceso, por lo que en la expresión anterior en lugar de usar la integral se utiliza un sumatorio de errores medidos en instantes determinados de tiempo, dando lugar al denominado *problema de identificación por mínimos cuadrados*. Matemáticamente suele expresarse como:

$$\theta^* = \min_{\theta} \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{n_d} e(t_i)^2 = \min_{\theta} \frac{1}{n_d} \sum_{i=1}^{n_d} (y(t_i) - y_m(t_i, \theta))^2 \quad (3.42)$$

donde n_d es el número de datos utilizados en la identificación del modelo, el subíndice i representa instantes discretos de tiempo, $y(t_i)$ es la salida del sistema real en el instante t_i , $y_m(t_i, \theta)$ la del modelo en el instante t_i , θ el vector de parámetros del modelo y $e(t_i)$ la diferencia entre la salida del modelo y la del sistema real en el instante t_i . Como se puede apreciar, en el ajuste por mínimos cuadrados se utilizan valores de la salida del sistema y del modelo en instantes determinados de tiempo ($t_i, i = 1, \dots, n_d$), por lo que su uso está más orientado a *sistemas de tiempo discreto* (sistemas muestreados donde los cálculos se realizan en intervalos de tiempo definidos por un periodo de muestreo). En [13] se pueden encontrar descritos varios métodos básicos de obtención de modelos a partir de datos.

La función de transferencia constituye una descripción del sistema en tiempo continuo, por lo que el uso de herramientas interactivas permite llevar a cabo, de forma manual, el ajuste aproximado de modelos a través de la modificación de sus parámetros característicos, intentando que la respuesta del modelo se asemeje lo más posible a la real (que suele proceder como se ha indicado del muestreo del sistema), sustituyendo en este caso la minimización de una función de coste donde se utilizan n_d muestras del sistema por una inspección visual de los resultados. La herramienta se ha limitado al ajuste de respuestas que se puedan modelar a través de modelos de primer y segundo orden, con o sin retardo y sin ceros.

Bibliografía

- [1] Åström, K. J. y T. Hägglund. Control PID avanzado. Pearson - Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-511-0. Capítulo 9, sección 6, páginas 325-333, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 3, sección 7, apartado 1, páginas 158-164, 2010.

Aplicación

Herramienta interactiva: [3.7. t_ajuste_modelos](#)

Respuesta temporal: Datos experimentales

Parámetros

k [-] 1.089

τ [s] 0.645

t_r [s] 0.009

$G(s) = 1.09 \frac{1.00}{(0.64s + 1)} e^{-3.66e-3s}$

Características

k [-]: 1.09 t_r [s]: 2.58 Error ajuste[%]: 6.55e-2

Representación polo-cero Primer orden Segundo orden

Im

Re

Respuesta Temporal

Señal de entrada

$k = 1.09 [-], \tau = 0.64 [s]$

Respuesta temporal: Datos experimentales

Esta herramienta se divide en cuatro zonas principales. Los datos y curvas representativas del modelo se dibujan en color rojo, mientras que la curva del sistema real se representa en color negro.

Parámetros: Como ocurre con las herramientas previas, en este área se muestra una representación simbólica de la función de transferencia y los parámetros característicos del sistema de primer orden (ganancia estática k , constante de tiempo τ y tiempo de retardo t_r) o del de segundo orden (ganancia estática k , frecuencia natural no amortiguada ω_n , factor de amortiguamiento relativo ζ y tiempo de retardo t_r), que se haya seleccionado en el área de Representación polo-cero, que se comentará a continuación. La modificación de los parámetros descriptivos puede hacerse a través de las barras de desplazamiento o escribiendo directamente su valor en el cuadro de texto asociado. En el caso de introducción de ganancias estáticas negativas o cuando se precise llevar a cabo un cambio en la escala de la barra de desplazamiento habrá que utilizar esta segunda opción. Nótese que si selecciona $\zeta \geq 1$, automáticamente la representación que aparece corresponde a la constante de tiempo asociada a los dos polos reales (τ_1 y τ_2).

También se puede activar esta opción en el gráfico de Respuesta temporal, como se analizará posteriormente. En este área se incluyen adicionalmente determinadas **Características** de la respuesta temporal de los sistemas seleccionados:

Aplicación...

- En el caso de sistemas de Primer orden, los índices de comportamiento son la ganancia estática k , el tiempo de establecimiento del 2%, ($t_e \approx 4\tau$) y el error cuadrático de ajuste en % (Error ajuste [%]), definido por $\frac{1}{n_d} \sum_{i=0}^{n_d} e(t_i)^2$, $e(t_i) = 100 ((y(t_i) - y_m(t_i)) / y(t_i))$, siendo $y_m(t_i)$ en este caso la salida del modelo seleccionado por el usuario, $y(t_i)$ la obtenida del sistema real en el instante t_i y n_d el número total de muestras disponibles del sistema real (en el apartado de ejercicios se tratarán algunos ejemplos precargados en la herramienta).
- En el caso de sistemas de Segundo orden, los índices de comportamiento son la sobreoscilación (SO [%]), el tiempo de pico (t_p [s]), el tiempo de subida (t_s [s]), el tiempo de establecimiento (t_e [s]) y el error cuadrático de ajuste en % (Error ajuste [%]).

El área inferior izquierda de la herramienta está dedicada a la representación en el plano complejo (Representación polo-cero). En esta gráfica es posible seleccionar como modelo un sistema de primer o de segundo orden, apareciendo en cada caso los polos asociados (no se contempla la presencia de ceros y lógicamente el tiempo de retraso no tiene representación en este diagrama, al no tratarse de un término racional). Se puede modificar la posición de los polos del sistema seleccionado arrastrándolos a otra localización dentro de este diagrama, indicándose su posición en la esquina inferior izquierda de la aplicación. En esta herramienta es importante el uso del cambio de escala, representado por el triángulo negro en la parte inferior del cuadro gráfico. Pulsando a la izquierda o derecha del mismo se amplía o reduce tanto la escala horizontal como la vertical.

La gráfica de Respuesta temporal permite dibujar la salida del modelo y la real. Si se selecciona un modelo de primer orden, a través de la línea discontinua horizontal se puede cambiar su ganancia estática y actuando sobre la línea discontinua vertical se puede modificar directamente el tiempo de retardo. Los dos círculos de color rojo (○) facilitan la modificación de la pendiente inicial de la respuesta (círculo superior), afectando tanto a la ganancia como a la constante de tiempo, o directamente a la constante de tiempo (círculo inferior). En el caso de los sistemas de segundo orden, en lugar de dos círculos sólo aparece uno mediante el que se puede modificar la sobreoscilación (incluso para pasar de un sistema subamortiguado a uno sobreamortiguado) y en este caso sigue dibujándose una línea vertical (a la izquierda) para modificar el tiempo de retardo y otra línea vertical a la derecha de la anterior mediante la que se puede establecer la frecuencia natural no amortiguada. Cuando se escoge el caso sobreamortiguado, el círculo que representaba la sobreoscilación se convierte en dos líneas verticales discontinuas que contienen el símbolo ×. Estas líneas representan las constantes de tiempo asociadas a cada uno de los polos reales. Al igual que para el sistema de primer orden, la ganancia se puede modificar utilizando la línea horizontal de trazo discontinuo. Cuando se coloca el cursor del ratón sobre cualquiera de los elementos interactivos que aparecen en esta gráfica, se muestran sus valores también en la esquina inferior izquierda de la herramienta. Si se coloca sobre un punto de cualquiera de las curvas de respuesta temporal, una etiqueta visualiza los valores del tiempo y del valor de la salida en ese punto.

La gráfica inferior derecha corresponde a la Señal de entrada, que en este caso no es modificable puesto que está asociada a los datos de entrada precargados en la herramienta. En la esquina inferior izquierda de la herramienta se visualiza también el instante en que se introduce el escalón y la amplitud del mismo.

El menú de Opciones contiene cuatro ejemplos que se tratarán en el apartado de ejercicios.

Ejercicios

1. Escoja del menú Opciones el Experimento 1. La respuesta del sistema real que se muestra en color negro corresponde en este caso a la velocidad angular de un motor de corriente continua cuando se introduce un escalón a la entrada en el instante $t = 0$, medida en el laboratorio. Seleccione la estructura del modelo más adecuada (primer o segundo orden con o sin retardo). Una vez seleccionada la estructura, intente ajustar el modelo que mejor represente esa respuesta actuando sobre los parámetros característicos del sistema. ¿Qué error de ajuste obtiene? ¿Cuáles son los parámetros que describen la función de transferencia aproximada del sistema?
2. Escoja del menú Opciones el Experimento 2. La respuesta del sistema real que se muestra en color negro corresponde en este caso al cambio que experimenta la temperatura de una habitación cuando se abre una ventana en el instante $t = 0$. Repita los apartados del ejercicio anterior para este ejemplo.
3. Escoja del menú Opciones el Experimento 3. La respuesta del sistema real que se muestra en color negro corresponde en este caso al cambio que experimenta la temperatura de una habitación cuando se pone en marcha la calefacción en el instante $t = 0$. Repita los apartados del ejercicio anterior para este ejemplo.
4. Escoja del menú Opciones el Experimento 4. La respuesta del sistema real que se muestra en color negro corresponde en este caso a la posición angular de un motor de corriente continua controlado en lazo cerrado con un controlador proporcional (este tipo de controladores se analizarán en el Capítulo 6 y siguientes). Repita los apartados del ejercicio anterior para este ejemplo.

4

Respuesta en frecuencia

Introducción

En este capítulo se tratarán, utilizando fichas interactivas, los conceptos asociados a la respuesta en frecuencia y sus distintas representaciones gráficas.

Además de los conceptos resumidos en este capítulo, los requisitos básicos para abordar el estudio de las fichas de respuesta frecuencial son conocimientos básicos de la transformada de Laplace y de las funciones de transferencia, que se han tratado en la introducción del Capítulo 3.

La *respuesta en frecuencia* es un método alternativo al de la respuesta temporal para describir los sistemas lineales invariantes en el tiempo mediante su respuesta a señales de entrada sinusoidales. La idea subyacente es que se puede caracterizar el comportamiento de un sistema a través de su respuesta en estado estacionario a entradas senoidales de distintas frecuencias [2]. Cualquier señal se puede descomponer como una combinación lineal de señales senoidales (por ejemplo, usando la transformada de Fourier¹) y utilizar la propiedad de linealidad para calcular la salida como combinación de la respuesta a las frecuencias individuales.

La respuesta en frecuencia se basa en la teoría de variable compleja y la transformada de Laplace, tratadas en el Capítulo 3. Como s es una variable compleja ($s = \sigma + j\omega$), las funciones de transferencia como $G(s)$ (entendida como una función de transferencia genérica) son también funciones complejas. Los números complejos pueden expresarse en forma magnitud-ángulo, por lo que los diagramas de magnitud y fase en función de s son tridimensionales. Normalmente, se suelen tener sólo en cuenta los valores imaginarios de s . Esto da la *respuesta senoidal en régimen permanente*, que caracteriza al sistema. Existen varias formas de representación de la respuesta en frecuencia, siendo la más importante el *diagrama de Bode*. Su importancia radica en que al tomar logaritmos de la magnitud y la frecuencia, el escalado que se consigue permite analizar un amplio espectro de frecuencias. Además, tiene la ventaja de que el producto de ganancias se transforma en una suma tomando logaritmos. Los diagramas de Bode requieren dos gráficas diferentes. Si se elimina la frecuencia y se dibuja la parte imaginaria de $G(j\omega)$ en el eje de ordenadas y la parte real de $G(j\omega)$ en el eje de abscisas, se obtiene el *diagrama de Nyquist*, mientras que el *diagrama de Nichols* representa la magnitud logarítmica (eje de ordenadas) frente a la fase en grados (eje de abscisas). La ventaja fundamental de los diagramas de Bode, Nyquist y Nichols es que permiten el análisis de la estabilidad del sistema en bucle cerrado examinando la respuesta frecuencial del bucle abierto, como se tratará en el Capítulo 6.

¹Transformación de una función del tiempo $f(t)$ en el dominio de la frecuencia que no se trata en este texto.

4.1 Concepto de respuesta en frecuencia

Herramienta interactiva: [4.1. f_concepto](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Concepto de respuesta en frecuencia o respuesta frecuencial.
- Escalas logarítmicas, decibelios (dB) y décadas.
- Representaciones gráficas de la respuesta en frecuencia: Diagramas de Bode, Nyquist y Nichols.
- Factores básicos de la respuesta en frecuencia.
- Relación de la respuesta en frecuencia con la representación polo-cero y los parámetros de la función de transferencia.
- Filtros paso bajo, frecuencia de corte y ancho de banda.
- Sistemas de fase mínima y de fase no mínima.
- Influencia del tiempo de retardo en la respuesta en frecuencia.

Teoría Un fenómeno clave en los sistemas lineales es la *respuesta en frecuencia*. El término respuesta en frecuencia representa la respuesta de un sistema en régimen permanente a una entrada sinusoidal. De hecho, la respuesta en frecuencia se suele obtener introduciendo señales de entrada sinusoidales de distintas frecuencias y analizando la respuesta resultante en términos de amplitud y desfase. Ésta es una de las ventajas del método, ya que para su análisis se pueden utilizar datos que se obtienen directamente de medidas sobre el sistema físico sin tener que deducir su modelo matemático.

La respuesta en frecuencia es importante para entender el comportamiento del sistema en lazo abierto, además de constituir una herramienta fundamental para el estudio de la estabilidad de los sistemas de lazo cerrado a partir de la información de lazo abierto, como se analizará en los Capítulos 6 y 7. La breve revisión de conceptos que se expone a continuación comienza en primer lugar con los sistemas de primer y segundo orden y posteriormente se extiende a los sistemas de orden superior, pues las curvas de respuesta frecuencial de los sistemas genéricos pueden obtenerse como combinación de las de sistemas de primer y segundo orden.

La respuesta de un sistema lineal invariante en el tiempo a una entrada sinusoidal es otra señal sinusoidal de la misma frecuencia que la de la entrada, pero con distinta magnitud y fase, siendo tal diferencia una función de la frecuencia de entrada. Se puede realizar un análisis de la respuesta en frecuencia de un sistema a partir de la función de transferencia $G(s)$ cuando $s = j\omega$. Esto permite analizar la relación entre $G(j\omega)$ y ω en distintas representaciones gráficas, como son los diagramas de Bode, Nyquist y Nichols que se tratarán con posterioridad.

Considérese un sistema lineal invariante en el tiempo descrito por su función de transferencia $G(s) = Y(s)/U(s)$, donde $Y(s)$ y $U(s)$ son, respectivamente, las transformadas de Laplace de la salida y la entrada. La respuesta en régimen permanente de ese sistema a una entrada sinusoidal no depende de las condiciones iniciales (y por tanto se puede suponer que las condiciones iniciales son cero). De acuerdo con la definición de respuesta en frecuencia, para una entrada senoidal $u(t) = A \sin(\omega t)$, se puede obtener la evolución de la salida a través de la transformada inversa de Laplace², donde:

$$U(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{y por tanto} \quad Y(s) = G(s) \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2}$$

²Ver Tabla 3.2.

Si se lleva a cabo el desarrollo en fracciones simples de $Y(s)$, se obtiene:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{d}{s+j\omega} + \frac{\bar{d}}{s-j\omega}}_{\text{régimen permanente}} + \underbrace{\text{otros términos}}_{\text{régimen transitorio}} \quad (4.1)$$

donde \bar{d} es el complejo conjugado de d ($d = -AG(-j\omega)/2j$ y $\bar{d} = AG(j\omega)/2j$). Los “otros términos” son consecuencia de los polos de $G(s)$. Los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación (4.1) proceden de la función senoidal de excitación. Por ejemplo, si los polos de $G(s)$ son reales y distintos (es el caso más sencillo), se puede hacer la siguiente descomposición en fracciones parciales:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) = G(s)\frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{d_0s + d_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{c_1}{s - p_1} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n} + \\ &= \frac{d}{s + j\omega} + \frac{\bar{d}}{s - j\omega} + \frac{c_1}{s - p_1} + \dots + \frac{c_n}{s - p_n} \end{aligned} \quad (4.2)$$

La transformada inversa viene dada por:

$$y(t) = c_1e^{p_1t} + \dots + c_n e^{p_nt} + de^{-j\omega t} + \bar{d}e^{j\omega t} \quad (4.3)$$

Si el sistema es estable, $p_i < 0$. Los términos exponenciales decaen a cero cuando $t \rightarrow \infty$. En ese caso:

$$y(t \rightarrow \infty) = de^{-j\omega t} + \bar{d}e^{j\omega t} \quad (4.4)$$

siendo $G(j\omega) = \rho e^{j\phi}$, donde $\rho = |G(j\omega)|$ representa la magnitud y $\phi = \angle G(j\omega) = \arctan\left(\frac{\text{Im}(G(j\omega))}{\text{Re}(G(j\omega))}\right)$ la fase de $G(j\omega)$.

Si el sistema es inestable, los términos correspondientes al régimen transitorio crecerán sin límite a medida que el tiempo avanza, careciendo en esos casos de significado el uso del término respuesta transitoria. La ecuación (4.4) se puede escribir:

$$y(t \rightarrow \infty) = A\rho \frac{e^{j(\omega t + \phi)} - e^{-j(\omega t + \phi)}}{2j} = A\rho \text{sen}(\omega t + \phi) = B \text{sen}(\omega t + \phi) \quad (4.5)$$

Como se puede observar, la salida es una señal sinusoidal de la misma frecuencia que la entrada, pero en general con distinta amplitud (que viene dada por la amplitud de entrada multiplicada por ρ) y desfase dado por ϕ . Por tanto $|G(j\omega)|$ representa el cociente entre la amplitud de la senoidal de salida y la de entrada y $\angle G(j\omega)$ representa el desfase de la señal de salida respecto a la de entrada. Por este motivo, la función $G(j\omega)$ se denomina *función de transferencia en el dominio de la frecuencia* o *función de transferencia sinusoidal* y para sistemas lineales se obtiene sustituyendo s por $j\omega$ en la función de transferencia del sistema. Esta característica de la función de transferencia sinusoidal hace que se utilicen tres representaciones gráficas:

1. **Diagrama de Bode o diagrama logarítmico:** Formado por dos gráficas:

- Una es la que representa en el eje de ordenadas el módulo de la función de transferencia sinusoidal en escala lineal en decibelios (que son las unidades de ganancia logarítmica en base 10, $20 \log(|G(j\omega)|)$) frente a la frecuencia en escala logarítmica en el eje de abscisas (representada en rad/s).

- La otra es la que representa el ángulo de fase en grados ($\angle G(j\omega)$) en escala lineal frente a la frecuencia en escala logarítmica en el eje de abscisas (en rad/s).

Las escalas logarítmicas se emplean cuando se quieren mostrar datos que varían entre sí varios órdenes de magnitud, pues permiten representar en un mismo eje datos de diferentes órdenes de magnitud, separándolos en décadas (factor de diez en frecuencia, por ejemplo, el rango de frecuencias desde 1 rad/s hasta 10 rad/s es una década). Para ello, en lugar de marcar sobre el eje la posición del dato que se quiere representar, se marca la de su logaritmo decimal. Esto se hace aprovechando la siguiente propiedad de los logaritmos:

$$\log(k 10^n) = \log(k) + n \rightarrow 20 \log(k 10^n) = 20 \log(k) + 20n$$

De este modo, el orden de magnitud (n) establece un desplazamiento, separando una década ($n = i$) de la siguiente ($n = i + 1$) y los puntos correspondientes a un mismo orden de magnitud (década) tienen el mismo espacio para ser representados que los pertenecientes a una década superior.

La principal ventaja de este diagrama es que la multiplicación de magnitudes se convierte en suma (gracias a las propiedades de los logaritmos) y además existen aproximaciones asintóticas (líneas rectas) a las curvas de respuesta en frecuencia. El inconveniente es que no es posible dibujar las curvas hasta una frecuencia cero debido al uso de una escala logarítmica en el eje de abscisas.

2. **Diagrama de Nyquist o diagrama polar:** Las proyecciones de $G(j\omega)$ en los ejes real e imaginario son sus componentes real e imaginaria. El diagrama de Nyquist representa la parte real de $G(j\omega)$ ($\text{Re}(G(j\omega))$) en el eje de abscisas frente a su parte imaginaria ($\text{Im}(G(j\omega))$) en el eje de ordenadas, parametrizadas en función de la frecuencia ω . Por tanto, constituye el lugar geométrico de los vectores ($|G(j\omega)|, \angle G(j\omega)$) en coordenadas polares cuando ω varía de cero a infinito. En las gráficas polares, los ángulos de fase son positivos si se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj a partir del eje real positivo. Su principal ventaja es que muestra en una única gráfica la respuesta en frecuencia en todo el rango de frecuencia, pero tiene como inconveniente que no permite visualizar la contribución individual de los términos de la función de transferencia. Cada punto en el diagrama polar de $G(j\omega)$ representa el punto terminal de un vector en un valor determinado ω .
3. **Diagrama de Nichols o diagrama de magnitud logarítmica frente a la fase:** Representa la magnitud $20 \log(|G(j\omega)|)$ en el eje de ordenadas frente a la fase $\angle G(j\omega)$ en el eje de abscisas en función de la frecuencia ω . En este tipo de diagramas, un cambio en la ganancia estática del sistema desplaza la curva hacia arriba (incremento de ganancia) o hacia abajo (disminución de ganancia), pero la forma de la curva permanece igual. El diagrama de Nichols suele incorporar un ábaco que incluye lugares geométricos de magnitud y fase constantes del sistema en lazo cerrado, de modo a partir de los puntos de la respuesta en frecuencia del lazo abierto se puede construir la respuesta en frecuencia del lazo cerrado.

Cuando se trabaja con representaciones gráficas de la respuesta en frecuencia se suelen distinguir los denominados *factores básicos*, que permiten construir los diagramas a partir de la agregación de las curvas de elementos individuales, pues sumar los logaritmos de las ganancias es equivalente a multiplicarlas entre sí: La ganancia k , los factores integrales $1/(j\omega)$, los factores derivativos $(j\omega)$, los factores de primer orden $(\tau j\omega + 1)^{\pm 1}$ y los de segundo orden $((j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + 1)^{\pm 1}$. Estos factores básicos, así como la respuesta en frecuencia asociada a un tiempo de retardo, se analizan en las siguientes fichas.

Hay varios conceptos importantes asociados a las representaciones en el dominio de la frecuencia:

- **Frecuencia de corte (ω_c , rad/s):** La frecuencia a partir de la cual la salida de un sistema se reduce en 3 dB (70.7%) respecto al nivel de referencia de 0 dB. Es la frecuencia en la cual la magnitud

de la respuesta en frecuencia del sistema está 3 dB por debajo de su valor de frecuencia cero. En muchos sistemas lineales, suele coincidir con la denominada *frecuencia esquina*, que es la frecuencia en la que la aproximación asintótica de la respuesta en frecuencia de un polo (o cero) cambia de pendiente.

- *Filtros paso bajo*: Los filtros ideales paso bajo son sistemas en los que el diagrama de Bode del módulo asociado a ellos es constante hasta una cierta frecuencia (la frecuencia de corte ω_c) y vale $-\infty$ para $\omega > \omega_c$, siendo su diagrama de fase nulo al menos hasta ω_c . Como su realización es imposible, los filtros reales paso bajo se definen como aquellos sistemas caracterizados por una respuesta en frecuencia $G(j\omega)$ con un módulo casi constante en baja frecuencia y decreciente para $\omega > \omega_c$. Suelen considerarse filtros paso bajo los que cumplen las siguientes condiciones:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} \leq \sqrt{2}, \quad \forall \omega \leq \omega_c \quad \frac{|G(j\omega)|}{|G(j0)|} < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \forall \omega > \omega_c$$

Nótese que en la definición de filtro paso bajo la fase no juega ningún papel, aunque suele ser significativa su contribución y además dicha definición implica que el sistema $G(s)$ no contenga acciones derivativas ni integrales, coincidiendo en ese caso $G(j0)$ con la ganancia k .

- *Ancho de banda*: El rango de frecuencias $0 \leq \omega \leq \omega_c$ en el cual la magnitud del sistema no decae -3 dB se denomina *Ancho de Banda (AB)* del sistema (también denominado *banda pasante*). El ancho de banda indica cómo de bien el sistema filtra o modifica la senoide de entrada (es un índice de la capacidad del sistema para atenuar señales de frecuencia elevada). El ancho de banda es la diferencia entre las frecuencias en las que su atenuación al pasar a través del sistema se mantiene igual o inferior a 3 dB comparada con la frecuencia principal. En sistemas estrictamente causales sin polos ni ceros en el origen, coincide con la frecuencia de corte. El ancho de banda da una indicación de las propiedades de la respuesta transitoria de un sistema de control, así como de las características al filtrado de ruido y robustez³ del sistema.
- La *banda atenuada*: Es el rango de frecuencias que el sistema atenúa más de 3 dB ($1/\sqrt{2}$).
- A menudo, el ancho de banda por sí solo no es adecuado para indicar la capacidad de un sistema para filtrar señales de ruido. Algunas veces es necesario observar la pendiente de la respuesta en frecuencia, que se denomina *razón de corte*, a frecuencias altas [26].
- *Sistemas de fase mínima y fase no mínima*: Las funciones de transferencia que no tienen polos ni ceros en el semiplano derecho se denominan de fase mínima. En caso de tener algún polo o cero en el semiplano derecho se denominan de fase no mínima. La diferencia entre ambas en el dominio de la frecuencia es que para los sistemas con la misma característica de magnitud, los sistemas de fase mínima son aquéllos en los que la distancia de la fase en valor absoluto con respecto a 0° es mínima, frente a los de fase no mínima cuya característica de fase tiene mayor desfase (mayor distancia a 0° en valor absoluto) que el sistema de fase mínima asociado. En los sistemas de fase mínima, la función de transferencia se determina de forma única a partir de la curva de magnitud (si se especifica la curva de magnitud en todo el rango de frecuencias, la curva de fase se determina de forma única, y viceversa), no siendo así en los sistemas de fase no mínima.
- *Influencia de los tiempos de retardo en la respuesta en frecuencia*: Los tiempos de retardo tienen una gran influencia en la respuesta en frecuencia de un sistema, puesto que constituyen un elemento de fase no mínima. Un retardo puro en forma de función de transferencia viene dado por $G(s) = e^{-t_r s}$. En el dominio frecuencial $G(j\omega) = e^{-t_r j\omega}$. Por tanto, los tiempos de retardo no afectan a la curva de

³Cualidad de un sistema de control que muestra poca sensibilidad a efectos que no fueron considerados en la fase de análisis y diseño del mismo, por ejemplo, perturbaciones, dinámicas no modeladas, ruido, ...

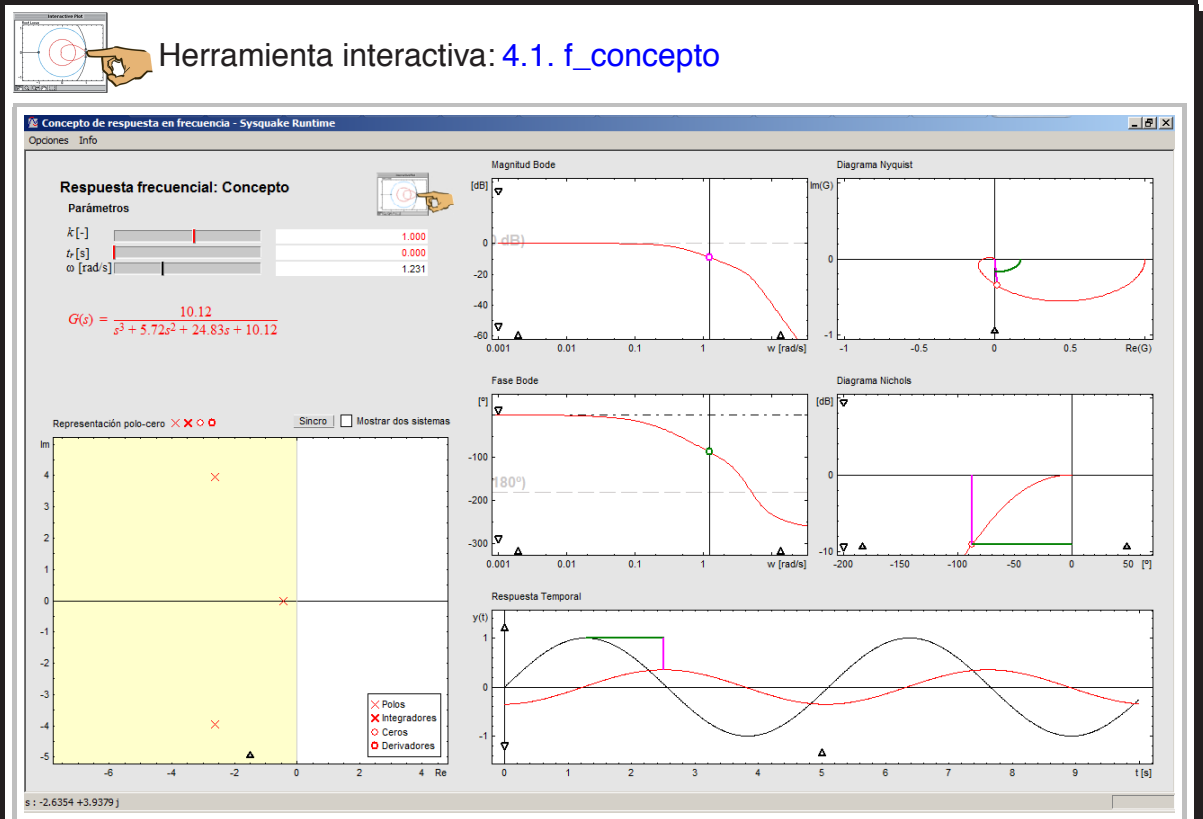
magnitud, pues tienen magnitud 1 (en el diagrama de Bode de magnitud es una recta horizontal de ordenada nula), pero introducen un desfase lineal con la frecuencia. De hecho, para $\omega = 1/t_r$, un término de retardo puro introduce un desfase de -57.3° .

El diagrama polar asociado al tiempo de retardo $G(s) = e^{-t_r s}$ está formado por una circunferencia de radio unitario recorrida un número infinito de veces en sentido horario a partir del semieje real positivo. El módulo es constante e igual a 1 para toda ω , mientras que la fase es decreciente con ω . Eso hace que cuando un sistema dinámico incluye un término de tiempo de retardo, al crecer la frecuencia el diagrama de Nyquist del sistema recorre un número cada vez mayor de vueltas en el sentido horario alrededor del origen del plano complejo.

Bibliografía

- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 6, páginas 135-169, 2009.
- [8] D'Azzo, J. J., C. H. Houpis y S. Sheldon. Linear control system analysis and design with Matlab. Marcel Dekker Inc., ISBN: 0-8247-4038-6. Capítulo 8, páginas 301-330, 2003.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN: 84-205-4401-9. Capítulo 8, páginas 432-476, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 6, sección 1, páginas 315-334, 2010.
- [26] Kuo, B. C. Sistemas de control automático. Séptima Edición. Prentice Hall. ISBN: 968-880-723-0. Capítulo 9, sección 1, páginas 539-544, 1996.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, páginas 398-490, 2010.
- [34] Rohrs, C. E., J. L. Melsa y D. G. Schultz. Sistemas de control lineal. McGraw-Hill, ISBN: 970-10-0411-6. Capítulo 5, páginas 269-320, 1994.

Aplicación



Respuesta frecuencial: Concepto

Al ejecutar la herramienta interactiva aparece la pantalla representada en la figura superior, que incluye en la zona izquierda elementos con los que se ha trabajado en las herramientas dedicadas al análisis en el dominio temporal (Capítulo 3), sustituyendo en la zona derecha las gráficas de respuesta temporal por diagramas frecuenciales, aunque en esta ficha se conserva una gráfica de respuesta temporal en la parte inferior derecha para visualizar el concepto de respuesta en frecuencia como respuesta a entradas senoidales en régimen estacionario.

En la zona superior izquierda, en el área de **Parámetros** se representa por defecto la función de transferencia de un sistema de segundo orden sin retardo y con un integrador, pudiéndose modificar los valores de la ganancia estática y el tiempo de retardo haciendo uso tanto de barras de desplazamiento como de cuadros de texto. Se incluye en esta zona una barra de desplazamiento y un cuadro de texto que determinan la frecuencia de interés que se quiere analizar en las representaciones gráficas de la respuesta en frecuencia. Bajo las barras de desplazamiento existe un área reservada para dibujar representaciones simbólicas de las funciones de transferencia seleccionadas (que puede ser una única o bien dos si se selecciona la opción de *Mostrar dos sistemas*). El valor de los otros elementos dinámicos (polos y ceros) de la función de transferencia se puede modificar en la gráfica de *Representación polo-cero*, como se comentará a continuación.

Aplicación...

En la parte inferior izquierda se ubica la Representación polo-cero, donde se puede hacer uso del editor de polos y ceros para cambiar la estructura del sistema seleccionado, añadiendo o eliminando polos, ceros, derivadores e integradores, arrastrando dentro o fuera de la gráfica los símbolos $\times \times \circ \circ$ situados junto al título de la misma. Este diagrama incluye la opción de Mostrar dos sistemas, que al seleccionarse produce la duplicación de elementos interactivos y de la representación simbólica de las funciones de transferencia en el área de **Parámetros**. Se representan en color rojo los parámetros asociados al sistema original y en azul los correspondientes al segundo sistema. Actuando sobre la ubicación de los polos y los ceros se pueden comparar las respuestas en frecuencia de los dos sistemas. El botón de sincronización (Sincro) iguala la función de transferencia del segundo sistema a la del primero, con la finalidad de poder realizar un análisis comparativo entre los dos sistemas partiendo de una misma configuración de polos y ceros. Si se pulsa con el ratón a la derecha del triángulo negro ubicado en la parte inferior de la gráfica se reducen los intervalos en los ejes de abscisas y ordenadas y si se pulsa a la izquierda se amplía el rango.

En la parte derecha de la pantalla se distribuyen distintas representaciones de la Respuesta frecuencial, que son seleccionables a través del menú desplegable de Opciones ubicado en el marco superior de la aplicación. Por omisión aparece la opción Bode, que representa en la zona superior derecha el diagrama de Bode del sistema seleccionado, incluyendo las líneas estáticas de 0 dB y -180° . Se pueden seleccionar también los diagramas de Nyquist y Nichols, o bien la opción Completo, que representa todos los diagramas simultáneamente. Las gráficas incluyen los triángulos que habilitan el cambio de escala pulsando a derecha o izquierda de los situados en el eje de abscisas y en la parte superior o inferior en los ubicados en el eje de ordenadas.

En todos los casos, en la parte inferior derecha se dibuja la Respuesta temporal, que facilita el análisis del concepto de respuesta en frecuencia basándose en la introducción de curvas senoidales a una determinada frecuencia (se fija en el área de parámetros o en las representaciones frecuenciales) y visualizando la amplificación o atenuación de la senoidal resultante en régimen permanente.

En todas las áreas de la herramienta hay objetos interactivos relacionados entre sí. La modificación de la ganancia estática del sistema (k) se puede llevar a cabo a través de los cuadros de texto y barras de desplazamiento del área de **Parámetros**, o bien trasladando verticalmente la curva de Magnitud Bode (nótese que al moverla se muestra el valor de la ganancia también en la esquina inferior izquierda de la herramienta). Un desplazamiento vertical de la curva de Fase Bode produce una modificación del tiempo de retardo (que aumenta si se mantiene presionado el botón izquierdo del ratón sobre la curva y se realiza un movimiento hacia abajo), que alternativamente puede cambiarse a través del cuadro de texto y barra de desplazamiento de la zona de **Parámetros**. También se refresca su valor en la esquina inferior izquierda de la herramienta. Finalmente, la frecuencia está ligada a una recta vertical en color negro que, al desplazarse a derecha o izquierda, aumenta o reduce interactivamente la frecuencia de estudio (actualizándose automáticamente su valor en el área de **Parámetros**).

En la curva de Magnitud Bode se dibuja un círculo de color magenta (\circ) indicando la magnitud logarítmica para la frecuencia determinada. Del mismo modo, en la curva de Fase Bode se representa un círculo verde (\circ) que marca el desfase a la frecuencia seleccionada.

Aplicación...

En la curva de Respuesta temporal se dibujan dos segmentos no interactivos, uno de color **magenta**, que determina la relación de magnitudes de la respuesta en la frecuencia seleccionada (cociente de magnitud de la senoidal de salida respecto a la senoidal de entrada, que determina la magnitud de la respuesta en el diagrama de Bode) y otro de color **verde** que determina el desfase (corresponde al desfase temporal de las curvas, pues puede ser de utilidad en la determinación experimental de funciones de transferencia). Al colocar el ratón sobre cualquiera de estos elementos (círculos o segmentos **magenta** o **verde**), se muestran sobre todas las representaciones gráficas los valores de magnitud (m) y fase (f) para la frecuencia seleccionada (el caso del desfase temporal se denomina Desfase). En todos los casos, esta información se reproduce de una forma más detallada en la esquina inferior izquierda de la herramienta, especificando: w [rad/s], Magnitud [dB], Fase [°], Desfase temporal [s].

En el Diagrama de Nyquist, además de representar la respuesta en frecuencia del sistema analizado, se incluye como elemento interactivo un círculo (○) sobre la curva de respuesta en frecuencia, que al desplazarse sobre la curva modifica la frecuencia de interés y como consecuencia la Respuesta temporal del sistema. El segmento no interactivo de color **magenta** que une el círculo sobre la respuesta con el origen del plano complejo determina la magnitud de la respuesta en la frecuencia seleccionada, mientras que el ángulo en color **verde** determina la fase. También se puede modificar la escala pulsando con el ratón a la derecha o la izquierda del triángulo ubicado sobre el eje de ordenadas.

En el Diagrama de Nichols, al igual que el diagrama de Nyquist, se puede modificar interactivamente la frecuencia para la cual se está estudiando la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia, accediendo al círculo (○) sobre la respuesta en frecuencia. El segmento de color **verde** indica en este diagrama el desfase, mientras que el **magenta** representa la magnitud en dB. También se pueden modificar las escalas pulsando con el ratón a la derecha o la izquierda de los triángulos que aparecen en la representación gráfica.

En ambos diagramas, Nyquist y Nichols, al colocar el ratón sobre los círculos ubicados sobre la respuesta frecuencial (○), en las gráficas aparece información sobre la magnitud (m) y la fase (f) ligadas a ese punto, mientras que en la esquina inferior izquierda de la herramienta se incluye una descripción más detallada, como se ha indicado previamente.

En el menú Opciones se pueden seleccionar tres ejemplos con distintas estructuras de polos, ceros y tiempo de retardo. Además, se puede introducir una función de transferencia arbitraria utilizando los formatos de Matlab ((NUM,DEN) y PZK) explicados en la Tabla 1.2 del Capítulo 1:

- El Ejemplo 1 toma como sistema base la función de transferencia $P_{11}(s)$ (ver Capítulo 1), con dos polos complejos conjugados y un polo real.
- El Ejemplo 2 utiliza como sistema base la función de transferencia $P_4(s)$, formada por un polo y un cero (en este caso de fase no mínima) y la compara con un sistema de primer orden, para analizar los diferentes comportamientos a baja, media y alta frecuencia.
- El Ejemplo 3 ($P_2(s)$) utiliza un sistema de primer orden. Este ejemplo sirve como introducción a la siguiente ficha y su objetivo es analizar las distintas representaciones de la respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden.

Ejercicios

1. ¿Por qué al modificar el valor de la frecuencia en el cuadro de texto o en la barra de desplazamiento que aparece en la sección de **Parámetros** no se modifica la representación simbólica de la función de transferencia? Justifique la respuesta.
2. Indique, haciendo uso de la herramienta, cuál será la pendiente de la curva de magnitud para $\omega \rightarrow \infty$ de los sistemas lineales descritos por las siguientes funciones de transferencia. Relacione los resultados obtenidos con la diferencia entre el grado del polinomio del numerador y el del denominador (sistemas propios o causales y sistemas estrictamente causales):

$$G_i(s) = \left\{ \frac{1}{(s+1)}; \frac{(s+1)}{(s+2)}; \frac{(s+2)}{(s+1)}; \frac{1}{s}; \frac{(s^2+s+1)}{(s+1)(s+2)(s+3)}; \frac{(s^2+s+1)(s+0.5)}{(s+1)(s+2)(s+3)} \right\}$$

3. Escoja el Ejemplo 3 ($P_2(s)$) en el menú de Opciones de la herramienta. Configure la función de transferencia del sistema de primer orden con una ganancia estática unitaria y una constante de tiempo de 1 s ($G(s) = 1/(s+1)$):
 - Obtenga analíticamente la respuesta senoidal en régimen permanente, indicando el valor de $|G(j\omega)|$ y $\angle G(j\omega)$. Para distintos valores de la frecuencia ω (desde frecuencias bajas hasta frecuencias altas, incluyendo las frecuencias $\omega = 0.01, 1, 2$ y 10 rad/s), anote en la curva de Respuesta temporal la relación de amplitudes entre la señal senoidal de entrada y la de salida, así como el desfase temporal asociado. Construya, basándose en esos datos (transformando la relación de amplitudes a magnitud en dB y el desfase temporal a desfase en grados), un diagrama de Bode y compárelo con el que aparece dibujado en la herramienta. ¿Cuál es el valor de la magnitud y la fase a bajas frecuencias?, ¿y a altas frecuencias? Calcule el valor de la frecuencia de corte y del ancho de banda del sistema e indique el valor de la amplitud de la senoidal de salida y su desfase respecto a la de entrada para esa frecuencia de corte.
 - Determine el valor y ubicación de la frecuencia de corte en las tres representaciones gráficas, justificando los resultados. ¿Qué forma se obtiene en el diagrama de Nyquist? (tenga en cuenta la escala del gráfico). Determine sobre dicho diagrama y sobre el diagrama de Nichols los puntos correspondientes a $\omega = 0$, $\omega = 1/\tau$ y $\omega = \infty$ (rad/s).
 - Cambie de signo la ganancia (ponga el mismo valor de la ganancia pero con signo negativo). Comente qué cambios observa en las gráficas de Bode y en la gráfica de respuesta sinusoidal y justifique esos resultados. Repita el procedimiento usando como gráfico de representación el diagrama de Nyquist y el de Nichols.
4. Seleccione el Ejemplo 1 ($P_{11}(s)$) en el menú de Opciones. En el gráfico de Representación polo-cero acerque los dos polos complejos conjugados más alejados del eje imaginario del segundo sistema (sistema representado en azul) a los dos ceros complejos conjugados del propio sistema (también representados en azul) más cercanos al eje imaginario. Analice lo que ocurre con las respuestas en frecuencia de los dos sistemas que se están comparando y comente los resultados.
5. Seleccione el Ejemplo 2 ($P_4(s)$) en el menú de Opciones. En el gráfico de Representación polo-cero mueva el cero del primer sistema e indique su ubicación para que en $\omega = 1$ rad/s los dos sistemas tengan la misma magnitud. Repita el procedimiento para analizar la posición del cero que hace que los dos sistemas tengan la misma fase para esa frecuencia de $\omega = 1$ rad/s.
6. Seleccione un sistema con un polo y un cero. Calcule analíticamente la salida en régimen permanente a entrada senoidal, obteniendo la expresión de la magnitud y el desfase. Indique qué relación debe existir entre las constantes de tiempo asociadas al cero y al polo del sistema para que la fase

aumente o disminuya con la frecuencia. Compruebe los cálculos analíticos usando la herramienta interactiva e indique los valores de fase y ganancia en cada caso para frecuencias bajas, para la frecuencia de corte y para frecuencias muy altas en función de la posición relativa entre el polo y el cero (realizar pruebas para distintas posiciones relativas).

7. Seleccione un sistema integrador con una función de transferencia $G(s) = k/s$ (por ejemplo haciendo uso del editor de polos y ceros). Justifique las formas de la curva de magnitud y de fase que se obtienen en el diagrama de Bode, proporcionando las fórmulas que las describen. ¿Qué cambia si la ganancia del integrador es negativa? En ambos casos, describa el comportamiento que observa en la curva de respuesta temporal senoidal en régimen permanente. Para el caso con ganancia estática positiva, ¿qué ocurre si se añade tiempo de retardo?, ¿para qué valor del tiempo de retardo la curva de fase corta la línea horizontal de -180° ? Repita el procedimiento usando como gráfico de representación el diagrama de Nyquist (diagrama polar) y el de Nichols. ¿Cuál es el diagrama polar de $G(j\omega) = 1/j\omega$?, ¿y su diagrama de Nichols? Justifique las respuestas.
8. Seleccione, haciendo uso del editor de polos y ceros, un sistema con un polo muy alejado del eje imaginario (por ejemplo, en $s = -30$) y un derivador (cero en $s = 0$). Justifique las formas de la curva de magnitud y de fase que se obtienen en el rango de frecuencias $0 \leq \omega \leq 10$ rad/s. ¿Qué cambia si la ganancia estática del sistema es negativa? En ambos casos, describa el comportamiento que observa en la curva de respuesta temporal senoidal en régimen permanente. Para el caso con ganancia estática positiva, ¿qué ocurre si se añade tiempo de retardo?, ¿para qué valor del tiempo de retardo la curva de fase corta la línea horizontal de -180° ? Repita el procedimiento usando como gráfico de representación el diagrama de Nyquist (diagrama polar) y el de Nichols. ¿Cuál es el diagrama polar de $G(j\omega) = j\omega$?, ¿y su diagrama de Nichols? Justifique las respuestas.
9. Seleccione dos sistemas con un polo aproximadamente en $s = -1$ y un cero aproximadamente en $s = -2$ (use la opción Sincro para ubicar su polo y su cero en la misma localización). Desplace uno de los ceros a la ubicación $s = 2$ del semiplano derecho. Comente las diferencias que observa entre el sistema que tiene su polo y su cero en el semiplano izquierdo (sistema de fase mínima) y el que tiene el cero en el semiplano derecho (sistema de fase no mínima).
10. Repita el ejercicio anterior utilizando una configuración con los polos en $s = -2$ y los ceros en $s = -1$ y $s = 1$ respectivamente. Comente los resultados.
11. Construya un sistema de segundo orden con una función de transferencia:

$$G(s) = \frac{3}{s^2 + s + 3}$$

Analice la forma de los diagramas de Bode, Nyquist y Nichols. Sobre dichos diagramas determine el valor en el que se obtiene la máxima amplitud de la respuesta y la frecuencia correspondiente (es muy interesante que analice también lo que ocurre en la curva de respuesta temporal a medida que modifica la frecuencia). Indique también la ubicación de los puntos de frecuencia cero e infinito.

12. Con los valores por omisión, seleccione $\omega = 1.5$ rad/s en el área de **Parámetros**. Usando el formato (NUM,DEN) del menú Opciones, introduzca la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.01s + 1}$$

Indique la posición de los polos de dicho sistema y su magnitud. Usando la barra de desplazamiento, comience lentamente a reducir la frecuencia y analice el comportamiento que observa en la gráfica de Respuesta temporal. ¿Hay algún valor de la frecuencia que haga que la salida no esté acotada? Relacione su respuesta con el concepto de *estabilidad marginal* tratado en la Sección 3.2.

4.2 Respuesta en frecuencia de los sistemas lineales de primer orden de tiempo continuo sin ceros

Herramienta interactiva: [4.2. f_primer_orden](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden.
- Representación en el diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden.
- Aproximaciones asintóticas a las curvas de magnitud y fase del diagrama de Bode de un sistema de primer orden.
- Relación entre la ganancia estática y la curva de magnitud a baja frecuencia.
- Relación entre la constante de tiempo y la frecuencia de corte.
- Características de filtrado paso bajo de un sistema de primer orden.

Teoría En esta ficha se analiza la respuesta en frecuencia de los sistemas lineales de tiempo continuo invariantes en el tiempo de primer orden sin ceros. Como representación gráfica de la respuesta en frecuencia se utiliza el diagrama de Bode, que como se ha visto en la ficha anterior, está formado por dos gráficas, una en la que representa en el eje de ordenadas la magnitud de la función de transferencia sinusoidal en decibelios ($20 \log (|G(j\omega)|)$) frente a la frecuencia en escala logarítmica en el eje de abscisas (en rad/s), y otra en la que representa el ángulo de fase en grados ($\angle G(j\omega)$) frente a la frecuencia en escala logarítmica en el eje de abscisas (en rad/s). La respuesta en frecuencia de un sistema lineal de primer orden se puede obtener a partir de su función de transferencia sustituyendo $s = j\omega$ (ver la ecuación (4.6)).

Cuando se trabaja con el diagrama de Bode, la ganancia sólo contribuye en la curva de magnitud a través de $20 \log (k)$ (dB), es decir, es una recta horizontal, mientras que el desfase que aporta es nulo (la modificación de la ganancia estática no afecta al desfase), salvo que la ganancia sea negativa, en cuyo caso aporta un desfase constante de 180° (según el criterio de ángulo escogido, también se puede considerar -180°).

Si se analizan inicialmente los factores integrales (caso particular de un sistema de primer orden), se tiene que la magnitud logarítmica de $1/j\omega$ en dB es $-20 \log (\omega)$ y su ángulo de fase es constante e igual a -90° . En un diagrama de Bode, la magnitud $-20 \log (\omega)$ es una recta de pendiente -20 dB/década que pasa por el punto (0 dB, $\omega = 1$ rad/s).

Si se analiza la respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden:

$$G(s) = \frac{k}{\tau s + 1} \rightarrow G(j\omega) = \frac{k}{\tau j\omega + 1}; \quad |G(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{\tau^2 \omega^2 + 1}}, \quad \phi = \angle G(j\omega) = \arctan(\tau\omega) \quad (4.6)$$

se puede observar cómo el término $(1 + \tau j\omega)^{-1}$ contribuye tanto a la curva de magnitud como a la de fase. En el caso de la curva de magnitud:

$$20 \log \left(\left| \frac{1}{\tau j\omega + 1} \right| \right) = -20 \log \left(\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1} \right) \quad (\text{dB}) \quad (4.7)$$

Es fácil comprobar que la asíntota de baja frecuencia ($\omega \ll 1/\tau$) es 0 dB, mientras que la de alta frecuencia ($\omega \gg 1/\tau$) es $-20 \log(\omega\tau)$ (dB), que en el diagrama de Bode es una línea recta de pendiente -20 dB/década y que corta a la línea de 0 dB en $\omega_c = 1/\tau$, donde ω_c es la frecuencia esquina (en un sistema de primer orden coincide con la frecuencia de corte ω_c).

La fase ϕ del factor $(1 + \tau j\omega)^{-1}$ es $\phi = -\arctan(\omega\tau)$. A frecuencia cero la fase es 0° , en frecuencias altas ($\omega \rightarrow \infty$) el ángulo de fase es -90° , mientras que en la frecuencia de corte es -45° .

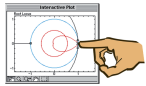
En el caso de la curva de fase, se definen tradicionalmente la asíntota de baja y alta frecuencia como líneas horizontales discontinuas a las fases correspondientes que se juntan mediante una línea vertical que corta a la curva real de fase en el punto en el que ha cambiado $\pm 45^\circ$ (en función del signo de la ganancia y de la constante de tiempo) respecto a su valor inicial (forma en *escalón*). Existen otras aproximaciones asintóticas a la curva de fase, como la *lineal*, donde las asíntotas de baja y alta frecuencia siguen siendo horizontales, pero incorpora una aproximación lineal que va desde la década anterior hasta la posterior cortando a la curva de fase en el punto en que ha cambiado 45° (correspondiente a la frecuencia esquina ω_c). Esta aproximación lineal, está dentro de 6° de la curva de fase real para todas las frecuencias. Otra aproximación asintótica a la fase puede ser la denominada *óptima*, donde la pendiente de la línea se ajusta a la de la curva de fase para minimizar el error entre las mismas y coincidir en el punto de interés (frecuencia de corte), no partiendo por tanto de la década anterior ni terminando en la década posterior.

Como ya se indicó previamente, el ancho de banda (*AB*) se define como la frecuencia a la que la respuesta en frecuencia ha caído 3 dB desde su valor de baja frecuencia. El ancho de banda de un sistema de primer orden coincide con el valor absoluto del polo $|p| = |1/\tau| = \omega_c$. Es una medida de la posibilidad que tiene el sistema de reproducir fielmente una señal de entrada. Generalmente, la respuesta del sistema para valores de frecuencia superiores al ancho de banda estará atenuada. A medida que aumenta el ancho de banda la rapidez de la respuesta también aumenta (cuanto mayor sea el ancho de banda del sistema, más rápida será la respuesta a escalón del mismo). El ancho de banda es además una medida directa de la sensibilidad del sistema al ruido (un ancho de banda muy grande indica que el sistema es muy sensible a los ruidos de alta frecuencia). Estas consideraciones (solución de compromiso entre rapidez de respuesta y rechazo del ruido) en general se mantienen para sistemas de órdenes superiores.

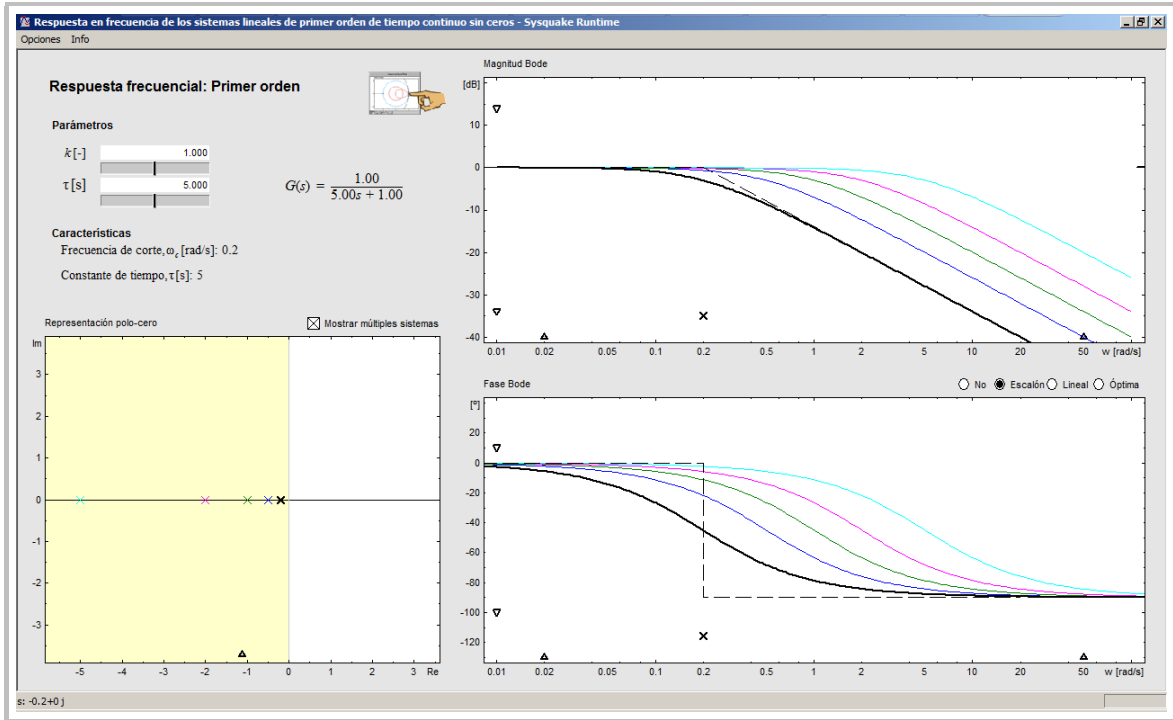
Bibliografía

- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 6, sección 6, páginas 146-148, 2009.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Pearson - Prentice Hall, ISBN: 84-205-4401-9. Capítulo 8, sección 2, páginas 444-445, 2005.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, sección 2, páginas 403-410, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 5, apartado 1, páginas 10-11, 1993.

Aplicación



Herramienta interactiva: 4.2. f_primer_orden



Respuesta frecuencial: Primer orden

Parámetros: En la parte superior izquierda se muestran los parámetros numéricos y la función de transferencia que definen al sistema bajo estudio, junto a índices que describen la respuesta frecuencial del sistema seleccionado (**Características**), que en este caso son la Constante de tiempo y la Frecuencia de corte del sistema. El valor de la ganancia estática k y de la constante de tiempo τ se pueden modificar a través del cuadro de texto o de la barra de desplazamiento. Para introducir ganancias estáticas negativas, hay que hacerlo escribiendo su valor en el cuadro de texto (y automáticamente los límites de la barra de desplazamiento tendrán en cuenta el nuevo signo de la ganancia). Cuando se cambian los valores de k y τ , automáticamente se refrescan en este área la representación simbólica de la función de transferencia y las características frecuenciales, así como los datos que aparecen en el resto de representaciones gráficas.

Representación polo-cero: En la parte inferior izquierda se representa el plano s (o plano complejo), donde se muestra la localización del polo del sistema analizado (o la posición de los polos de los sistemas estudiados si se selecciona la opción de **Mostrar múltiples sistemas**).

Como en fichas anteriores, el polo se representa por el símbolo \times , que se puede arrastrar a cualquier localización del eje real del plano complejo (indicándose en todo momento su ubicación en la esquina inferior izquierda de la herramienta). El triángulo que aparece en la parte inferior permite cambiar la escala simultáneamente en los ejes de abscisas y ordenadas (pulsando a la izquierda del triángulo la escala aumenta y a la derecha se reduce).

Aplicación...

Magnitud Bode/Fase Bode: En la derecha de la herramienta se tienen los diagramas de magnitud (parte superior) y fase (parte inferior) de Bode. El diagrama de Magnitud Bode muestra la magnitud de la respuesta en frecuencia en decibelios (dB) de los sistemas representados, en función de la frecuencia ω (rad/s). El diagrama de Fase Bode incluye las gráficas de la fase (en grados) de los sistemas visualizados, en función de la frecuencia ω (rad/s). Ambos diagramas disponen de la posibilidad de realizar ampliaciones o reducciones de escala, con la diferencia respecto a las fichas anteriores que existen dos triángulos \triangle en el eje de abscisas y dos en el eje de ordenadas (\triangle , ∇). Los dos triángulos permiten modificar parcialmente una parte de la escala. En el eje de abscisas, permite ampliar o reducir la escala de alta o baja frecuencia por separado.

En las dos gráficas aparece un aspa \times que se corresponde con la localización de la frecuencia de corte y que facilita modificar su valor desplazándola hacia la derecha o izquierda, de modo que se refrescan automáticamente sus valores en las áreas de **Parámetros** y Representación polo-cero. Al colocar el ratón sobre la misma el valor de la frecuencia correspondiente se visualiza en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

También cabe destacar que además de la respuesta en frecuencia real, se muestran las correspondientes asíntotas. En el caso de la curva de magnitud, las asíntotas se dibujan con líneas discontinuas de color negro. La de baja frecuencia es horizontal y la de alta frecuencia aparece en este caso como una recta con pendiente $-20\text{dB}/\text{década}$ que corta a la de baja frecuencia precisamente en la frecuencia de corte ω_c . Hay que hacer notar que el cambio de la magnitud en baja frecuencia (y por tanto de la ganancia estática) se realiza en estas fichas arrastrando hacia arriba/abajo la línea de trazo grueso negra (-) que aparece en la parte derecha de la curva Magnitud Bode.

Para la curva de fase, aparecen por omisión la asíntota de baja y alta frecuencia como líneas horizontales discontinuas a las fases correspondientes.

En la frecuencia de corte se dibuja una línea vertical discontinua, que corta a la curva real de fase en el punto en el que ha cambiado $\pm 45^\circ$ (en función del signo de la ganancia y de la constante de tiempo) respecto a su valor inicial (forma en escalón). Existe la posibilidad de no representar ninguna asíntota o de escoger entre las distintas representaciones de las asíntotas de fase (escalón, lineal y óptima) activando los botones circulares que aparecen sobre la curva de fase:

No Escalón Lineal Óptima.

Al marcar la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, en el menú Opciones de la parte superior izquierda de la herramienta se activan diferentes opciones para inicializar la ubicación de los polos y poder comparar la respuesta de cinco sistemas en función de sus parámetros (cada uno con un color asociado según la definición de colores de la Biblioteca explicada en el Capítulo 1):

- Efecto constante tiempo: Inicia el atributo τ de los modelos de cinco sistemas con distintos valores, manteniendo k constante ($k = 1$) en todos ellos.
- Efecto ganancia: Inicia el atributo k de cinco modelos con valores diferentes manteniendo para todos ellos el valor de $\tau = 1$.

El sistema activo en el área **Parámetros** se elige pulsando sobre la localización de los polos en la gráfica de Representación polo-cero o sobre cualquier punto de la respuesta frecuencial deseada, bien sea en la gráfica Magnitud Bode o en la Fase Bode, resaltándose automáticamente en negrita.

Hay que hacer notar que cuando se coloca el ratón sobre las curvas de respuesta en frecuencia del sistema activo, se visualizan sobre las mismas el valor de frecuencia (ω) y magnitud (m) o fase (f) correspondiente al punto seleccionado de la curva. De igual forma, esta información se muestra en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

Ejercicios

1. Desplace verticalmente la asíntota de baja frecuencia de la curva de magnitud del diagrama de Bode. ¿Qué elementos de la herramienta interactiva se modifican? Justifique la respuesta.
2. Seleccione un sistema de primer orden con $k = 1$ y $\tau = 1$ s. Indique el valor de la frecuencia de corte y el valor de la magnitud y la fase en dicha frecuencia. Utilizando la curva de magnitud, calcule los errores que se producen a distintas frecuencias entre la curva real de magnitud y la asíntótica. ¿Cuál es el valor máximo de ese error y en qué frecuencia se produce?
3. Desplace el aspa \times que aparece en las curvas de magnitud y fase de la herramienta hacia derecha e izquierda. ¿Qué elementos de la herramienta interactiva se modifican? Si desplaza el aspa hacia la derecha, ¿aumenta o disminuye el ancho de banda del sistema?, ¿cómo se relaciona el ancho de banda con la constante de tiempo del sistema?, ¿y con la ganancia estática?, ¿y con la localización del polo del sistema?
4. ¿Se puede conseguir desplazando el aspa \times que aparece en las curvas de magnitud y fase de la herramienta una constante de tiempo negativa? Justifique la respuesta.
5. Si aleja el polo del eje imaginario, ¿aumenta o disminuye el ancho de banda del sistema?, ¿y la frecuencia de corte?, ¿y la rapidez de respuesta?
6. Intente colocar el polo del sistema en el origen $s = 0$ o cercano a él. Comente y justifique la forma que adoptan las curvas de magnitud y fase.
7. Introduzca un valor negativo de la ganancia. Explique qué ocurre con la curva de magnitud y fase del diagrama de Bode. Justifique la respuesta.
8. Seleccione una constante de tiempo $\tau = -1$ s. Justifique los valores iniciales y finales de la fase. Haciendo uso de la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, coloque el polo de uno de ellos en $s = -1$ y el de otro en $s = 1$. Compare las curvas de magnitud y fase y comente las diferencias. ¿Cuál de los dos sistemas podríamos denominarlo de fase no mínima? Desplace el polo de $s = 1$ a $s = -1$ y analice y comente lo que ocurre con las curvas de magnitud y fase.
9. Activando la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, seleccione del menú **Opciones (Efecto constante tiempo)**. Analice el efecto que sobre el diagrama de Bode tiene el desplazamiento de izquierda a derecha del polo más alejado del eje imaginario, incluyendo valores positivos de dicho polo.
10. Activando la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, seleccione en el menú **Opciones** el tercer caso (**Efecto ganancia**). ¿Por qué todas las respuestas frecuenciales tienen el mismo diagrama de fase? ¿Cuál es el valor de la frecuencia de corte de cada uno de los sistemas representados?
11. Escoja un sistema con ganancia estática unidad y constante de tiempo igual a 0.5 s. Indique el valor de la frecuencia de corte y su relación con la constante de tiempo del sistema. A continuación analice la precisión de las distintas aproximaciones asíntóticas de la fase, indicando para cada una de ellas la frecuencia a la que se obtiene la mayor diferencia entre la curva del sistema real y su aproximación asíntótica y el valor de dicha diferencia.
12. Activando la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, seleccione en el menú **Opciones** el segundo caso (**Efecto constante tiempo**). Para la configuración de polos por omisión, calcule el ancho de banda en cada uno de los casos. Usando la herramienta interactiva **3.1. t_primer_orden**, simule esos ejemplos y relacione la rapidez de respuesta del sistema con el ancho de banda.

4.3 Respuesta en frecuencia de los sistemas lineales de segundo orden de tiempo continuo sin ceros

Herramienta interactiva: 4.3. f_segundo_orden

Conceptos analizados en la ficha

- Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden.
- Representación en el diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden.
- Aproximaciones asintóticas a las curvas de magnitud y fase del diagrama de Bode de un sistema de segundo orden.
- Relación entre la ganancia estática y la curva de magnitud a baja frecuencia.
- Concepto de resonancia. Relación entre el factor de amortiguamiento relativo, la frecuencia de resonancia y el pico de resonancia.
- Relación entre la frecuencia natural no amortiguada y el factor de amortiguamiento relativo y la frecuencia de corte de ganancia. Ancho de banda en sistemas de segundo orden.

Teoría Aunque la respuesta en frecuencia de un sistema representa de forma cualitativa la respuesta transitoria, la correlación entre las respuestas en frecuencia y transitoria es aproximada, salvo en el caso de sistemas de segundo orden. La función de transferencia normalizada de los sistemas de segundo orden es:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \rightarrow G(j\omega) = \frac{k}{\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta\left(j\frac{\omega}{\omega_n}\right) + 1}$$

donde k es la ganancia estática, ζ es el factor de amortiguamiento relativo y ω_n la frecuencia natural no amortiguada del sistema. Los polos se sitúan en $s_1 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ y $s_1^* = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$. En el caso estable, dichos polos pueden ser reales $\zeta > 1$ (sistema sobreamortiguado), reales e iguales ($\zeta = 1$, sistema críticamente amortiguado) o complejos conjugados ($0 < \zeta < 1$, sistema subamortiguado).

La curva de magnitud y fase se obtiene como:

$$|G(j\omega)| = 20 \log(k) - 20 \log \left(\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \quad \phi = \arctan \left(\frac{2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \right) \quad (4.8)$$

En lo que sigue se va a considerar que $k = 1$ sin pérdida de generalidad.

En el caso en que el sistema tenga los polos en el semiplano izquierdo del plano complejo, para bajas frecuencias, la magnitud logarítmica es 0 dB⁴ y la fase 0° (asíntotas de baja frecuencia), mientras que para altas frecuencias la asíntota de magnitud es una recta con pendiente -40 dB/década y la fase es -180° (se puede comprobar haciendo $\omega \rightarrow \infty$ en las ecuaciones (4.8)). Al igual que se ha explicado en la Sección 4.2, existen distintas aproximaciones asintóticas a la curva de fase:

- **Escalón:** Las asíntotas de baja frecuencia (0°) y alta frecuencia (-180°) se juntan mediante una línea vertical que corta a la curva real de fase en el punto en que ha cambiado -90°.

⁴20 log(k) si $k \neq 1$.

- *Lineal*: Las asíntotas de baja y alta frecuencia se unen mediante una recta que va desde la década anterior hasta la posterior cortando a la curva de fase en el punto en que ha cambiado -90° .
- *Óptima*: La pendiente de la asíntota lineal se ajusta a la curva real minimizando el error entre las mismas y coincidiendo en el punto medio (-90°).

En la gráfica de magnitud, la asíntota de alta frecuencia corta a la de baja en $\omega = \omega_n$, que en este caso coincide con la frecuencia de corte. Las dos asíntotas son independientes del valor de ζ . Por este motivo, las aproximaciones asintóticas no proporcionan resultados muy exactos para valores bajos de ζ ($0 \leq \zeta \leq 0.707$), que son aquéllos para los que la ecuación (4.8) tiene un máximo.

En el caso subamortiguado, el diagrama de Bode presenta un pico de resonancia cerca de ω_n (en $\omega = \omega_r$, siendo ω_r la *frecuencia de resonancia*, que es la frecuencia a la cual se logra el máximo valor de la respuesta en frecuencia del par de polos complejos conjugados), con una *magnitud de pico* M_r (máxima amplitud de la respuesta en frecuencia), donde:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2}, \quad M_r = \frac{1}{2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}}, \quad \forall \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Es fácil comprobar que [7]:

$$|G(j\omega_n)| = \frac{1}{2\zeta} \quad (4.9)$$

Es importante notar que la magnitud de pico sólo depende de ζ . A medida que el factor de amortiguamiento relativo ζ tiende a cero, $\omega_r \rightarrow \omega_n$ y $M_r \rightarrow \infty$. Para $\zeta > 0.707$ no hay pico de resonancia y $M_r = 1$.

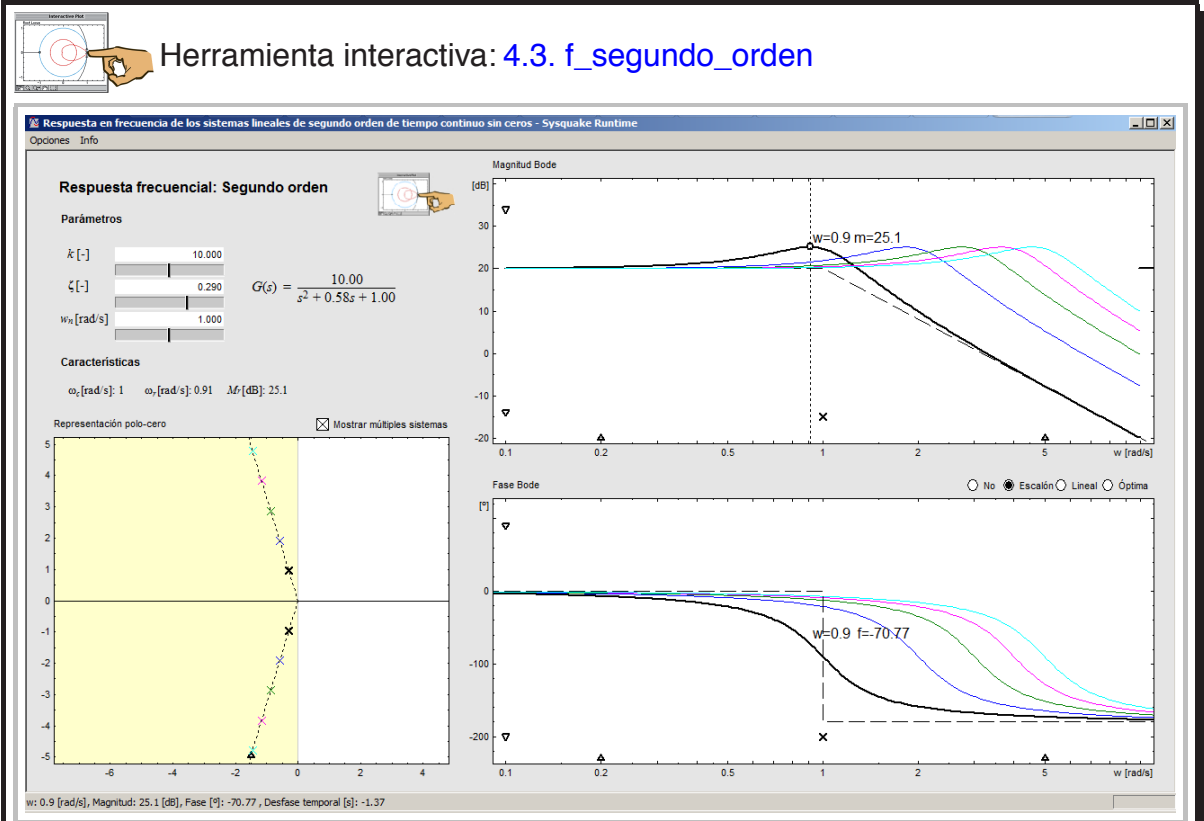
El ancho de banda viene dado por $AB = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{2 - 4\zeta^2 + 4\zeta^4}}$. Cuando ζ varía entre 0 y 1, el AB es directamente proporcional a ω_n y varía entre $1.55 \omega_n$ y $0.64 \omega_n$. Los ingenieros de control tratan siempre de mantener el factor de amortiguamiento relativo de los sistemas controlados en torno a 0.707. Para este valor de ζ , $AB = \omega_n$. De hecho, es normal cuando se está diseñando considerar que el ancho de banda de un sistema de segundo orden puede ser aproximado por ω_n .

En el caso de sistemas sobreamortiguados, el diagrama de Bode se construye a partir de los dos sistemas de primer orden que lo forman, aprovechando las propiedades de las escalas logarítmicas (ver Sección 4.2).

Bibliografía

- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 6, sección 6, páginas 148-151, 2009.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 6, sección 1, páginas 134-137, 319-321, 2010.
- [26] Kuo, B. C. Sistemas de control automático. Prentice Hall, ISBN: 968-880-723-0. Capítulo 9, sección 2, páginas 541-550, 1996.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, sección 2, páginas 403-413, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 5, apartado 2, páginas 11-16, 1993.

Aplicación



Respuesta frecuencial: Segundo orden

El objetivo principal de esta ficha es analizar la respuesta frecuencial de un sistema lineal de segundo orden en función de los valores de sus parámetros descriptivos. La aplicación interactiva está dividida en cuatro áreas principales.

Parámetros: En la parte superior izquierda se muestran los parámetros numéricos y la función de transferencia que definen al sistema bajo estudio en formato normalizado:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

junto a índices que describen la respuesta frecuencial del sistema seleccionado (**Características**), que en este caso son la Frecuencia de corte ω_c (rad/s), la Frecuencia de resonancia ω_r (rad/s) y la Magnitud pico M_r (dB). El valor de la ganancia estática k , del factor de amortiguamiento relativo ζ y de la frecuencia natural no amortiguada ω_n se pueden modificar a través de sus respectivos cuadros de texto o barras de desplazamiento. Para introducir ganancias estáticas negativas, hay que hacerlo cambiando su valor en el cuadro de texto (y automáticamente los límites de la barra de desplazamiento tendrán en cuenta el nuevo signo de la ganancia).

Aplicación...

Cuando se cambian los valores de k , ζ y ω_n automáticamente se refrescan en este área la representación simbólica de la función de transferencia y las características frecuenciales, así como los datos que aparecen en el resto de representaciones gráficas. Cuando los dos polos son reales, los cuadros de texto y barras de desplazamiento correspondientes a ω_n y ζ se transforman en τ_1 y τ_2 , que son las constantes de tiempo de los dos polos reales, representándose en el área de **Características** únicamente el valor de ω_c y la función de transferencia en forma de constantes de tiempo.

Representación polo-cero: El plano complejo situado en la parte inferior izquierda contiene los polos de los sistemas analizados, descritos por el símbolo \times , que se puede arrastrar a cualquier localización del plano complejo. Cuando se coloca el ratón sobre estos elementos, en la esquina inferior izquierda de la herramienta se indica su posición. El cambio de escala se realiza usando el triángulo posicionado en la parte inferior del diagrama (pulsando a la izquierda del triángulo la escala aumenta y a la derecha se reduce).

Magnitud Bode/Fase Bode: En la zona derecha de la herramienta se dibujan las gráficas de Magnitud Bode (parte superior) y Fase Bode (parte inferior). Ambos diagramas disponen de la posibilidad de realizar ampliaciones o reducciones de escala, pinchando con el ratón a la derecha o izquierda de los triángulos ubicados en el eje de abscisas (Δ) o en la parte superior o inferior de los que se encuentran en el eje de ordenadas (Δ , ∇). En las dos gráficas aparece un aspa (\times) que se corresponde con la localización de la frecuencia de corte que facilita la modificación de su valor, desplazándola hacia la derecha o izquierda. Cuando se hace, se refrescan automáticamente sus valores en las áreas de **Parámetros** y Representación polo-cero. Si los dos polos son reales, son dos los símbolos \times que se representan, ligados a las frecuencias esquina $\omega_{e_1} = 1/\tau_1$ y $\omega_{e_2} = 1/\tau_2$ correspondientes a cada uno.

El cambio de la magnitud en baja frecuencia (y por tanto de la ganancia estática) se realiza arrastrando en vertical la línea de trazo grueso negra (–) situada en la parte derecha de la curva Magnitud Bode.

En esta herramienta es posible visualizar tanto las curvas exactas de respuesta frecuencial para los sistemas de segundo orden como sus aproximaciones asintóticas. Dado que en la literatura aparecen diferentes aproximaciones para la curva de fase, la herramienta permite seleccionar entre ellas, hecho que contribuye a poderlas comparar y entenderlas mejor. La aproximación asintótica permite generar aproximaciones simples de la curva de repuesta frecuencial lo que ayuda al ingeniero a construir modelos mentales simples de la misma.

En el caso de sistemas subamortiguados ($0 \leq \zeta < 1$):

- En la curva de magnitud, se muestra la asíntota de baja frecuencia como una línea horizontal discontinua de color negro, mientras que la asíntota de alta frecuencia se representa en este caso como una recta con pendiente -40 dB/década que corta a la de baja frecuencia precisamente en la frecuencia de corte.
- En la curva de fase, las asíntotas de baja y alta frecuencia se dibujan con líneas horizontales discontinuas en las fases correspondientes. En la frecuencia de corte se traza una línea vertical discontinua, que atraviesa la curva real de fase en el punto en el que ha cambiado $\pm 90^\circ$ respecto a su valor inicial (forma en escalón). Existe la posibilidad también de escoger entre distintas representaciones de las asíntotas de fase activando los botones circulares que aparecen sobre la curva de fase \odot No \odot Escalón \odot Lineal \odot Óptima.

Aplicación...

La opción de Mostrar múltiples sistemas funciona en esta herramienta de la misma forma que en la herramienta anterior, resaltándose siempre en negrita el sistema seleccionado a través de sus polos representativos en la gráfica de Representación polo-cero o sobre cualquier punto de su respuesta frecuencial, reflejándose los valores de la frecuencia, magnitud y fase correspondientes a ese punto seleccionado en las gráficas.

Cuando se utiliza la citada función Mostrar múltiples sistemas, en el menú Opciones aparecen diversas alternativas para inicializar la ubicación de los diferentes polos y poder comparar la respuesta de varios sistemas en función de sus parámetros:

- Efecto factor de amortiguamiento: Inicializa sistemas estables con distintos valores de ζ manteniendo k constante ($k = 1$) y ω_n constante ($\omega_n = 2$ rad/s).
- Efecto frecuencia no amortiguada: Inicializa los sistemas con un conjunto de valores de ω_n manteniendo ζ constante ($\zeta = 0.5$) y k constante ($k = 1$).
- Parte imaginaria constante: Inicializa los sistemas subamortiguados con diferentes valores de su parte real y con parte imaginaria constante.
- Parte real constante: Inicializa los sistemas subamortiguados con varios valores de su parte imaginaria y con parte real constante, colocados sobre una línea vertical situada en $s = -5$.

Ejercicios

1. Determine, haciendo uso de la herramienta, una función de transferencia de un sistema de segundo orden que tenga ganancia estática unidad, una magnitud pico de valor $M_r = 5$ dB y una frecuencia de resonancia $\omega_r = 1$ rad/s. Compare los resultados con los esperados de teoría.
2. Active la opción de Mostrar múltiples sistemas. Para los sistemas representados, calcule haciendo uso de la herramienta la frecuencia de corte ω_c , el ancho de banda AB , la frecuencia de resonancia ω_r y la magnitud pico M_r . ¿Cuáles de los sistemas representados no tendrán sobreoscilación cuando se les introduzca una señal en forma de escalón a la entrada?
3. Para un sistema de segundo orden con $k = 1$ y $\omega_n = 2$ rad/s, analice la respuesta en frecuencia que se obtiene para valores de $\zeta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1.0$ (utilice la opción de Ejemplo factor amortiguamiento). Calcule haciendo uso de la herramienta la frecuencia de corte ω_c , el ancho de banda, la frecuencia de resonancia ω_r , la magnitud pico M_r y la magnitud de $|G(j\omega_n)|$, así como la diferencia entre la curva real y la asíntota, tanto en magnitud como en fase (use en este caso todas las aproximaciones posibles).
4. Utilizando la herramienta interactiva **4.1. f_concepto**, repita el apartado anterior y compruebe que en el diagrama polar el punto de frecuencia cuya distancia al origen es la máxima corresponde a la frecuencia de resonancia. Compruebe también en el diagrama de Nichols que la distancia vertical entre los puntos $\omega = 0$ y $\omega = \omega_r$ es el valor pico de $G(j\omega)$ en dB.
5. Utilizando la herramienta interactiva **4.1. f_concepto**, construya con el editor de polos y ceros una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{1}{s(\tau s + 1)}$$

Dibuje el diagrama polar de esta función de transferencia, indicando dónde se ubican los puntos de frecuencia cero y frecuencia infinito.

6. Utilizando de nuevo la herramienta interactiva **4.3. f_segundo_orden**, active la opción de **Mostrar múltiples sistemas** y seleccione en el menú **Opciones** el (Ejemplo frecuencia no amortiguada). Indique el valor de la ganancia estática k y el factor de amortiguamiento relativo ζ constante utilizados en este ejemplo. Seleccionando en la gráfica de **Magnitud Bode** todos los sistemas sucesivamente, analice el valor de la magnitud pico M_r . ¿Por qué en todos los casos tiene el mismo valor? Justifique la respuesta. Calcule utilizando la herramienta los valores de la frecuencia de corte ω_c , el ancho de banda y la frecuencia de resonancia ω_r de todos los sistemas representados. ¿Qué sistema será más rápido cuando a su entrada se introduzca una señal en escalón?, ¿cuál será más lento? Justifique la respuesta.
7. Escoja ahora la opción de menú **Parte imaginaria constante**. Para cada uno de los sistemas representados, indique el valor de k , ζ , ω_n , ω_c , ω_r y M_r . Determine qué sistema tendrá la máxima sobreoscilación cuando se le introduzca una entrada en forma de escalón y cuál tendrá la respuesta más lenta. Justifique la respuesta. Desplace los dos polos más cercanos al eje imaginario sobre dicho eje. Justifique lo que ocurre con las curvas de magnitud y fase. ¿Cuál será el valor del factor de amortiguamiento relativo ζ ? ¿Qué tipo de respuesta temporal cabe esperar?
8. Seleccione finalmente la opción de menú **Parte real constante**. Para cada uno de los sistemas representados, indique el valor de k , ζ , ω_n , ω_c , ω_r y M_r . Desplace algún par de polos complejos conjugados alejándolos del eje real verticalmente. Explique lo que ocurre con las curvas de magnitud y fase del diagrama de Bode. Indique cuál es la posición de los polos que produce un factor de amortiguamiento relativo $\zeta = 0.7$ y el valor de la frecuencia natural no amortiguada ω_n asociada. En ese caso, calcule el valor de ω_c , ω_r y M_r . ¿Por qué $\omega_n = \omega_c$? ¿Por qué $\omega_r < \omega_c$? Justifique las respuestas.
9. Usando la herramienta interactiva **3.2. t_segundo_orden**, simule los ejemplos 1, 2, 5, 6 y 7 y compruebe las respuestas temporales que se obtienen y si el comportamiento esperado concuerda con las justificaciones que ha hecho en dichos apartados.
10. Arranque la herramienta o pulse **Reset** en el menú **Opciones**. Para la configuración de parámetros que aparecen por omisión, indique si puede existir algún valor de frecuencia de forma que cuando se introduce una senoide a la entrada de esa frecuencia, la salida crezca indefinidamente. ¿Qué valor se obtiene en este caso en la magnitud pico M_r ?
11. Analice con la herramienta la respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden sobreamortiguado:

$$G(s) = \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

considerando $k = 1$ y los siguientes casos:

- a) $\tau_2 = 1$ s, $\tau_1 = 0.1$ s.
- b) $\tau_2 = 2$ s, $\tau_1 = 1$ s.
- c) $\tau_2 = \tau_1 = 1$ s.
- d) $\tau_2 = 1$ s, $\tau_1 = -1$ s.
- e) $\tau_2 = -1$ s, $\tau_1 = -0.1$ s.

4.4 Efecto de un cero en la respuesta en frecuencia de sistemas lineales de primer orden de tiempo continuo

Herramienta interactiva: [4.4. f_primer_orden_cero](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden con un cero. Diagrama de Bode. Aproximaciones asintóticas.
- Relación entre la localización del polo y el cero del sistema con la respuesta en frecuencia. Ganancia mínima y máxima. Desfase mínimo y máximo. Adelanto y retraso de fase.

Teoría En esta ficha se va a estudiar la respuesta en frecuencia de sistemas representados por una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = k \frac{\beta s + 1}{\tau s + 1} \quad (4.10)$$

Una ventaja de los diagramas de Bode es que, para factores que son recíprocos entre sí, las curvas de magnitud logarítmica y de ángulo de fase sólo necesitan cambiar de signo. Los factores derivativos (caso particular de un cero en $s = 0$ y recíproco de un integrador) tienen una magnitud logarítmica en dB igual a $20 \log(\omega)$ y su ángulo de fase es constante e igual a 90° . En un diagrama de Bode, la curva de magnitud de un derivador es una recta de pendiente 20 dB/década que pasa por el punto (0 dB, $\omega = 1$ rad/s). Para un cero (factor $\beta j\omega + 1$) se podrá obtener el diagrama de Bode como se hacía para un polo (factor $1/(\tau j\omega + 1)$). La asíntota de magnitud a baja frecuencia será una línea recta de pendiente nula en 0 dB, que en la frecuencia esquina $\omega_e = 1/\beta$ cortará a la asíntota de alta frecuencia que tendrá una pendiente de 20 dB/década. La curva de fase partirá de 0° y llegará hasta 90° .

La forma de la respuesta en frecuencia en sistemas de primer orden con un cero dependerá de la posición relativa del polo y el cero y de los valores de las constantes de tiempo características. Nótese que en este caso el sistema no es estrictamente causal (pues tiene el mismo grado en el numerador y en el denominador). En el ámbito de los sistemas en lazo cerrado que se estudiarán en el Capítulo 7, a una función de transferencia con un polo y un cero en el semiplano izquierdo en la que se cumpla que $\beta > \tau$ (cero a la izquierda del polo) se le denomina controlador (compensador, red) de retraso de fase, mientras que en el caso $\beta < \tau$ (cero a la derecha del polo) se llama controlador (compensador, red) de adelanto de fase, debido a las características que tiene la curva de fase en cada una de estas situaciones (aporte negativo o positivo de fase). En estos casos (polo y cero en el semiplano izquierdo del plano s , incluyendo la posibilidad de un integrador o un derivador), las asíntotas de magnitud $\rho = |G(j\omega)|$ y fase $\phi = \angle G(j\omega)$ tendrán las características mostradas en la Tabla 4.1.

Si no hay un integrador o un derivador en la función de transferencia, entre la asíntota de baja frecuencia ($\rho_{\omega_{\downarrow}}$) y la de alta frecuencia ($\rho_{\omega_{\uparrow}}$), la magnitud en el diagrama de Bode seguirá lo siguiente:

- Retraso de fase: Una asíntota de pendiente -20 dB/década entre $\omega_{e_1} = 1/\tau$ y $\omega_{e_2} = 1/\beta$, siendo ω_{e_1} la frecuencia esquina de baja frecuencia y ω_{e_2} la de alta frecuencia.
- Avance de fase: Una asíntota de pendiente 20 dB/década entre $\omega_{e_1} = 1/\beta$ y $\omega_{e_2} = 1/\tau$.

Si existe un integrador o un derivador sólo habrá una frecuencia esquina en $\omega_e = 1/\beta$ o $\omega_e = 1/\tau$ respectivamente. El ángulo de fase vendrá determinado en ambos casos por: $\phi = \arctan(\beta\omega) - \arctan(\tau\omega)$, alcanzándose el mínimo (máximo) desfase para $\omega_m = 1/\sqrt{\tau\beta}$, donde:

$$\text{sen}(\phi_{min}) = -\frac{1 - (\tau/\beta)}{1 + (\tau/\beta)} \quad \text{sen}(\phi_{max}) = \frac{1 - (\tau/\beta)}{1 + (\tau/\beta)} \quad (4.11)$$

asíntota	polo y cero en $s \neq 0$	integrador	derivador
$\rho\omega_{\downarrow\downarrow}$	pendiente 0 dB/década	pendiente -20 dB/década	pendiente 20 dB/década
$\phi\omega_{\downarrow\downarrow}$	línea de 0°	línea de -90°	línea de 90°
$\rho\omega_{\uparrow\uparrow}$	pendiente 0 dB/década	pendiente 0 dB/década	pendiente 0 dB/década
$\phi\omega_{\uparrow\uparrow}$	línea 0°	línea 0°	línea 0°

Tabla 4.1 Caracterización de las asíntotas en un sistema lineal de primer orden con un cero

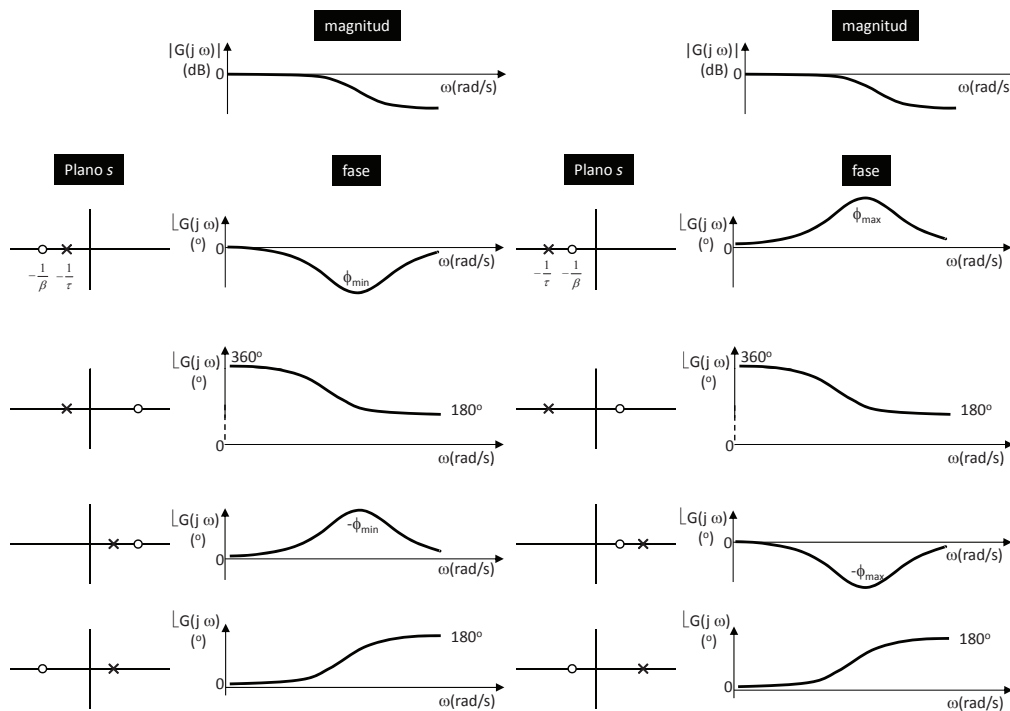


Figura 4.1 Desfase en función de la posición relativa del polo y el cero

Para sistemas con ceros o polos en el semiplano derecho del plano complejo (sistemas de fase no mínima) la curva de magnitud será similar a la del caso explicado en el párrafo previo (correspondiente a un sistema de fase mínima), pero la de fase cambiará en función de la ubicación del polo y/o del cero en el semiplano derecho del plano complejo (y de su posición relativa), pudiendo provocar desfases de hasta 360° en función de las contribuciones individuales del cero (ver Figura 4.1). Estas características se analizarán a través de ejercicios y se profundizarán en la ficha 4.7.

Bibliografía

- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, páginas 404-410 y 493-511, 2010.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta edición. Pearson, ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 6, sección 7, apartado 2, páginas 366-383, 2010.

Aplicación

Herramienta interactiva: 4.4. f_primer_orden_cero

Respuesta frecuencial: Primer orden+cero

Parámetros

k [-]	1.000
τ [s]	4.738
β [s]	-1.970

$$G(s) = 1.00 \frac{(-1.97s + 1)}{(4.74s + 1)}$$

Características

Ganancia [dB]	mínima: -7.62	máxima: 0
Fase [°]	mínima: -3.85e-15	máxima: 0

Representación polo-cero Mostrar múltiples sistemas

Magnitud Bode

Fase Bode

Res: -0.2111+0j

Respuesta frecuencial: Primer orden + cero

La sección **Parámetros** (zona superior izquierda) ofrece la posibilidad de introducir y modificar los valores de los parámetros k , τ y β que definen la función de transferencia de un sistema de primer orden con un cero (a través de cuadros de texto y barras de desplazamiento). A la derecha aparece la representación simbólica de la función de transferencia determinada por esos parámetros. En el área de **Características** se presentan los valores de la ganancia y fase máximas y mínimas correspondientes a esa configuración de los parámetros.

En la Representación polo-cero (zona inferior izquierda), se pueden desplazar interactivamente a lo largo del eje real el polo y el cero del sistema, indicándose su posición en la esquina inferior izquierda de la herramienta, que además incluye un triángulo para realizar una ampliación o reducción de la escala. Junto al título de la gráfica se puede habilitar la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, que toma como base el sistema que se esté analizando e incluye cuatro nuevos ceros en distintas posiciones en el eje real (manteniendo fijo el polo), facilitando la realización de comparativas entre sistemas de fase mínima y no mínima.

El área derecha de la herramienta está dedicada al análisis de la respuesta en frecuencia del sistema, por medio de las gráficas de Magnitud Bode y Fase Bode. Por omisión se muestran los diagramas para un único sistema (el sistema seleccionado) y con las representaciones asintóticas clásicas (ver la ficha 4.2).

Aplicación...

Al colocar el ratón sobre cualquier punto de la curva real de magnitud o fase, se visualizan sobre dicho punto de la curva los valores de la frecuencia (ω) y magnitud (m , dB) o fase (f , °) correspondientes a esa frecuencia, siendo muy útil a la hora de medir ciertas características sobre la gráfica. Esa información también aparece reflejada de una forma más completa en la esquina inferior izquierda de la herramienta. El cambio de la magnitud en baja frecuencia (y por tanto de la ganancia estática) se realiza en estas fichas arrastrando hacia arriba/abajo la línea de trazo grueso negra (-) situada en la parte derecha de la curva Magnitud Bode.

En las dos gráficas aparece un aspa \times y un círculo \circ que se corresponden con la localización de las dos frecuencias esquina (ω_{e1} y ω_{e2}) asociadas al polo y al cero del sistema. Estos dos símbolos se pueden desplazar hacia la derecha o izquierda, de modo que, además de afectar a la forma de la curva de respuesta frecuencial, actualizan sus valores en las áreas de **Parámetros** y Representación polo-cero.

Ejercicios

1. Para las siguientes combinaciones de k , τ y β , calcule los valores de ω_{e1} , ω_{e2} , $\rho_{\omega_{\downarrow\downarrow}}$, $\rho_{\omega_{\uparrow\uparrow}}$, $\phi_{\omega_{\downarrow\downarrow}}$, $\phi_{\omega_{\uparrow\uparrow}}$, ω_m , $\phi_{min(max)}$.

(k, τ, β)					
(1,1,0.5)	(1,1,2)	(1,1, ∞)	(1,1,-2)	(1,1,-1)	(1,1,-0.5)
(1,0.5,1)	(1,2,1)	(1, ∞ ,1)	(1,-2,1)	(1,-1,1)	(1,-0.5,1)
(1,-1,0.5)	(1,-1,1)	(1,-1,2)	(1,-1, ∞)	(1,-1,-2)	(1,-1,-0.5)
(1,0.5,-1)	(1,1,-1)	(1,2,-1)	(1, ∞ , -1)	(1,-2,-1)	(1,-0.5,-1)
(0.5,1,0.5)	(2,1,0.5)	(0.5,0.5,1)	(2,0.5,1)	(-1,0.5,1)	(-1, 1, -1)

En las herramientas interactivas lógicamente no se puede introducir un valor ∞ a un parámetro, por lo que en los casos indicados en la tabla, lo que hay que hacer es introducir un valor muy alto en el parámetro correspondiente.

2. Usando la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, analice de forma comparativa algunas de las combinaciones indicadas en las filas 1 y 3 de la tabla del ejercicio anterior. Comente las diferencias que observa entre sistemas de fase mínima y no mínima. Determine el sistema que produce un mayor desfase positivo y el que presenta un mayor desfase negativo.
3. Para los ejemplos anteriores, compare la precisión de las distintas aproximaciones asintóticas de fase, indicando el error máximo que se produce en cada caso.

4.5 Efecto de un cero en la respuesta en frecuencia de sistemas lineales de segundo orden de tiempo continuo

Herramienta interactiva: [4.5. f_segundo_orden_cero](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden con un cero.
- Representación en el diagrama de Bode de la respuesta en frecuencia de un sistema de segundo orden con un cero.
- Aproximaciones asintóticas a las curvas de magnitud y fase del diagrama de Bode de un sistema de segundo orden con un cero.
- Relación entre la localización de los polos y el cero del sistema con la respuesta en frecuencia. Ganancia mínima y máxima. Desfase mínimo y máximo.

Teoría En la ficha anterior se han analizado los conceptos teóricos relacionados con la introducción de un cero en la respuesta en frecuencia de un sistema de primer orden. Para un sistema de segundo orden, cuando es de fase mínima (los dos polos y el cero están en el semiplano izquierdo del plano complejo), se cumple lo siguiente:

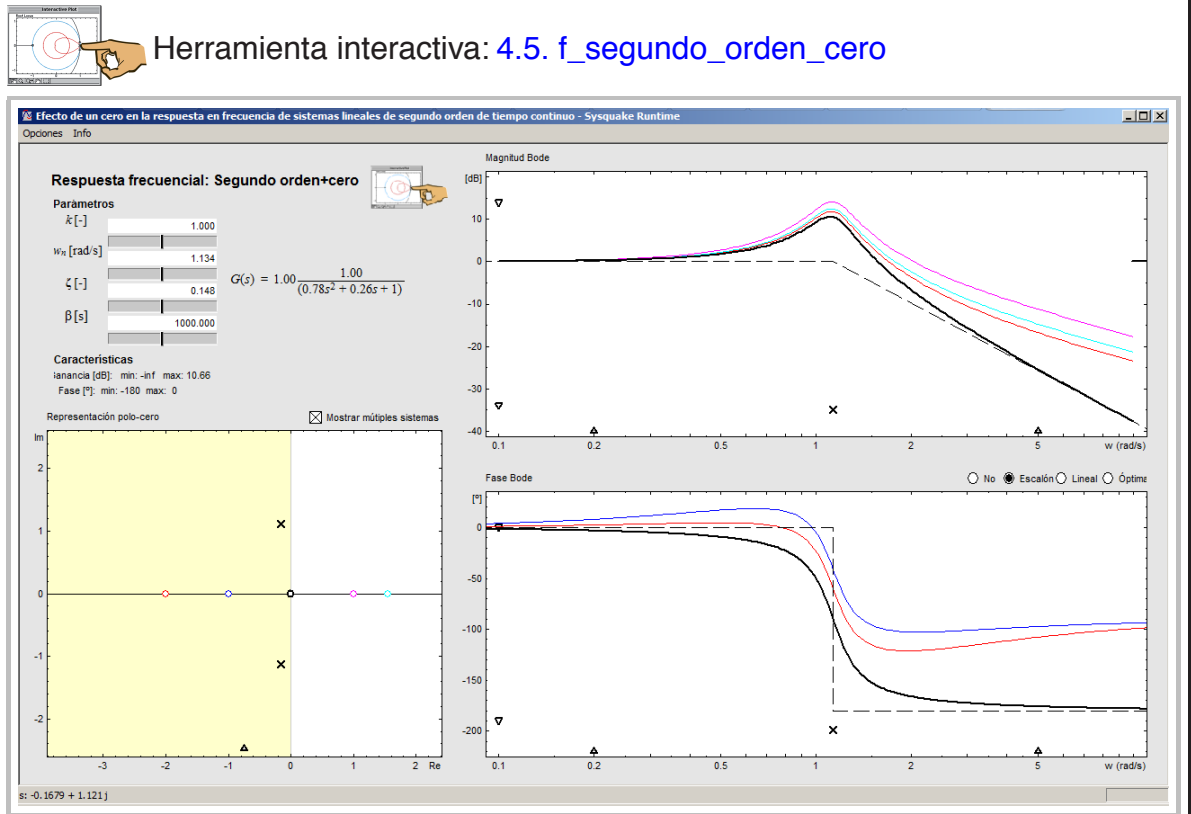
- Si el sistema es sobreamortiguado, cada polo real aporta en magnitud una pendiente de -20 dB/década a partir de su frecuencia esquina $\omega_{e_i} = 1/\tau_i$ y una fase que va de 0 a -90° (con una contribución total de -180°).
- Si el sistema es subamortiguado, los dos polos complejos conjugados aportan directamente una pendiente de -40 dB/década a partir de su frecuencia de corte $\omega_c = \omega_n$ y una fase que va de 0° a -180° .

El cero aporta una pendiente de 20 dB/década a partir de su frecuencia esquina $\omega_e = 1/\beta$ y una fase que va de 0 a 90° . Por tanto, debido al carácter aditivo de las gráficas logarítmicas de Bode, la respuesta en frecuencia cambiará su perfil en función de la posición relativa entre el cero y los polos del sistema, como se analizó para el caso de primer orden en la Figura 4.1.

Bibliografía

- [26] Kuo, B. C. Sistemas de control automático. Prentice Hall, ISBN: 968-880-723-0. Capítulo 9, sección 3, páginas 551-554, 1996.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, páginas 404-413, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 5, apartado 3, páginas 16-19, 1993.

Aplicación



Respuesta frecuencial: Segundo orden + cero

Esta herramienta interactiva es similar a la de respuesta frecuencial de sistemas de primer orden con un cero (ficha 4.4), variando únicamente los aspectos derivados de tratarse de un sistema de segundo orden.

En la parte superior izquierda, el menú **Parámetros** ofrece en este caso cuatro barras de desplazamiento y sus cuadros de texto asociados para modificar los parámetros k , β , ζ y ω_n (o alternativamente τ_1 y τ_2 en caso de seleccionar dos polos reales), que definen la función de transferencia de un sistema de segundo orden con un cero. A la derecha aparece la representación simbólica de dicha función de transferencia con los valores escogidos de los citados parámetros. En este área, debajo de la zona de **Parámetros** se encuentra la de **Características**, donde se indican los valores de la ganancia y fase máximas y mínimas correspondientes a esa configuración de los parámetros.

La Representación polo-cero (área inferior izquierda) incluye un cero y dos polos interactivos. Al colocar el ratón sobre ellos, se indica su posición en la esquina inferior izquierda de la herramienta. Los polos complejos conjugados se pueden arrastrar al eje real, convirtiéndose en dos polos reales que provocan la conmutación de los cuadros de texto de ω_n y ζ del área **Parámetros** a τ_1 y τ_2 . La gráfica incluye un triángulo para realizar una ampliación o reducción de la escala y sobre la misma gráfica se puede habilitar la opción de **Mostrar múltiples sistemas**, que añade cuatro ceros adicionales a la configuración que esté seleccionada en ese momento.

Aplicación...

El área derecha de la herramienta está dedicada al análisis de la respuesta en frecuencia del sistema, por medio de las gráficas de Magnitud Bode y Fase Bode, representándose tanto las curvas reales como las asintóticas clásicas. Al pasar el ratón sobre la curva de magnitud o la de fase se visualizan sobre las mismas los valores de frecuencia (ω) y magnitud (m) o fase (f), además de hacerlo en la esquina inferior izquierda de la herramienta. La ganancia de baja frecuencia se modifica usando la línea de trazo grueso (–) ubicada a la derecha de la curva Magnitud Bode.

En las dos gráficas aparece un círculo o ligado a la frecuencia de corte del cero del sistema. En el caso de dos polos complejos conjugados, se dibuja un aspa \times para indicar la frecuencia de corte asociada a los dos polos complejos conjugados (ω_n). Si los polos son reales, son dos las aspás \times que se dibujan en los diagramas, correspondientes a las dos frecuencias esquina ($\omega_{e1} = 1/\tau_1$ y $\omega_{e2} = 1/\tau_2$) asociadas a dichos polos. Estos dos símbolos se pueden desplazar hacia la derecha o izquierda, de modo que, además de afectar a la forma de la curva de respuesta frecuencial, se refrescan automáticamente sus valores en las áreas de **Parámetros** y Representación polo-cero.

El menú Opciones de esta herramienta sólo incorpora la opción de Reset.

Ejercicios

1. Para la configuración inicial que aparece cuando se arranca la herramienta ($k = 1$, $\omega_n = 1$ rad/s, $\zeta = 0.6$ y $\beta = 0.5$ s), desplace el círculo (o) representado en las gráficas de Magnitud Bode y Fase Bode superponiéndolo al aspa (\times). Indique qué parámetro de la función de transferencia se modifica y su valor final. ¿Se modifica la posición del círculo o cuando aumenta o disminuye el valor de ζ ? Justifique la respuesta. Cuando $\zeta = 1$, ¿qué tipo de respuesta en frecuencia se obtiene? Justifique la respuesta.
2. Para los siguientes valores de $k = 1$, $\zeta = 0.1$, $\omega_n = 1$ rad/s y $\beta = \{1.0, 0.1, -0.1, -1.0\}$ s, calcule los valores de ω_r , M_r , $\rho_{\omega_{\downarrow}}$, $\rho_{\omega_{\uparrow}}$, $\phi_{\omega_{\downarrow}}$, $\phi_{\omega_{\uparrow}}$. Comente los resultados.
3. Seleccione un sistema con ganancia estática unidad, con dos polos reales distintos en $s = -1$ y en $s = -0.5$ y un cero en $s = -0.3$. Calcule el ancho de banda⁵ del sistema para esa configuración. Coloque el cero en $s = -1$ y calcule el ancho de banda. Repita la operación colocando el cero en $s = -0.5$. Comente los resultados.
4. Seleccione una función de transferencia con parámetros $k = 0.3$, $\omega_n = 1$ rad/s, $\zeta = 0.01$ y $\beta = 100$ s. Analice las curvas de respuesta frecuencial e indique el rango de frecuencias en los que una senoidal de entrada no sufre una atenuación superior a 3 dB. ¿Cuál es el ancho de banda de este sistema?
5. Seleccione una función de transferencia con parámetros $k = 0.3$, $\beta = 100$ s y dos polos reales en $s = 1$ y $s = -1$. Analice las curvas de respuesta frecuencial e indique el rango de frecuencias en los que una senoidal de entrada no sufre una atenuación superior a 3 dB. ¿Cuál es el ancho de banda de este sistema? Compárelo con el ejercicio anterior.

⁵Frecuencia a la que la respuesta en frecuencia ha caído -3 dB desde su valor en baja frecuencia.

4.6 Respuesta en frecuencia de sistemas lineales genéricos de tiempo continuo

Herramienta interactiva: 4.6. f_genérico

Conceptos analizados en la ficha

- Efecto de añadir polos, ceros, integradores y derivadores en la forma de la respuesta en frecuencia.
- Interpretación del concepto de polos dominantes en el dominio de la frecuencia.

Teoría La construcción de diagramas de Bode de sistemas genéricos se realiza a partir de la representación de la función de transferencia como producto de factores básicos. La ventaja principal de la representación gráfica logarítmica es la conversión de factores multiplicativos en factores aditivos, por la definición de ganancia logarítmica:

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_{\ell=1}^q (\beta_{\ell} j\omega + 1) \prod_{\ell=1}^r \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_{n_{\ell}}} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_{\ell}}{\omega_{n_{\ell}}} \right) j\omega + 1 \right)}{(j\omega)^{\aleph} \prod_{i=1}^p (\tau_i j\omega + 1) \prod_{i=1}^h \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_i}{\omega_{n_i}} \right) j\omega + 1 \right)} e^{-t_r j\omega}$$

Esta función de transferencia incluye q ceros reales, $2r$ ceros complejos conjugados (r pares de ceros complejos conjugados), \aleph polos en el origen, p polos en el eje real, $2h$ polos complejos conjugados (h pares de polos complejos conjugados) y un tiempo de retardo t_r . La magnitud logarítmica de $G(j\omega)$ es:

$$\begin{aligned} 20 \log (|G(j\omega)|) &= 20 \log (k) + 20 \sum_{\ell=1}^q \log (|\beta_{\ell} j\omega + 1|) + 20 \sum_{\ell=1}^r \log \left(\left| \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_{\ell}}} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_{\ell}}{\omega_{n_{\ell}}} \right) j\omega + 1 \right| \right) - \\ &- 20\aleph \log (\omega) - 20 \sum_{i=1}^p \log (|\tau_i j\omega + 1|) - 20 \sum_{i=1}^h \log \left(\left| \left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_i}{\omega_{n_i}} \right) j\omega + 1 \right| \right) \end{aligned}$$

y el diagrama de Bode se puede obtener sumando la gráfica debida a cada factor individual. Nótese que el tiempo de retardo no contribuye a la curva de magnitud porque $|e^{-t_r j\omega}| = 1$ y por tanto $|e^{-t_r j\omega}|_{dB} = 0$.

La gráfica del ángulo de fase en grados se obtiene como:

$$\begin{aligned} \phi(\omega) = \angle G(j\omega) &= \sum_{\ell=1}^q \arctan (\beta_{\ell} \omega) + \sum_{\ell=1}^r \arctan \left(\frac{2\zeta_{\ell} \omega_{n_{\ell}} \omega}{\omega_{n_{\ell}}^2} - \omega^2 \right) \\ &- 90^{\circ} \aleph - \sum_{i=1}^p \arctan (\tau_i \omega) - \sum_{i=1}^h \arctan \left(\frac{2\zeta_i \omega_{n_i} \omega}{\omega_{n_i}^2} - \omega^2 \right) - \omega t_r \frac{180^{\circ}}{\pi} \end{aligned}$$

que es simplemente la suma de los ángulos de fase debidos a cada factor individual de la función de transferencia. Como se observa, la fase tiene una evolución lineal en ω y cuando se usa una escala logarítmica en el eje de frecuencias genera una curva con evolución exponencial.

Las clases diferentes de factores que pueden encontrarse en una función de transferencia son los siguientes: Ganancia estática (k), integradores ($1/(j\omega)$), derivadores ($j\omega$), términos de primer orden ($(\tau_j \omega + 1)^{\pm 1}$), términos de segundo orden ($(j\omega/\omega_n)^2 + 2\zeta(j\omega/\omega_n) + 1$) $^{\pm 1}$ y tiempo de retardo $e^{-t_r j\omega}$. La Tabla 4.2 muestra las principales características de ganancia logarítmica y fase asociadas a estos factores.

Factor	Ganancia logarítmica (dB)	Fase (°)	
Ganancia estática positiva	$20 \log(k)$	0	
Ganancia estática negativa	$20 \log(k)$	180	
Integrador	$-20 \log(\omega)$	-90	
Integrador múltiple	$-20N \log(\omega)$	$-90N$	
Derivador	$20 \log(\omega)$	90	
Derivador múltiple	$20N \log(\omega)$	$90N$	
Polo sobre eje real	$-10 \log(\tau^2 \omega^2 + 1)$	$-\arctan(\tau \omega)$	
Cero sobre eje real	$10 \log(\tau^2 \omega^2 + 1)$	$\arctan(\tau \omega)$	
Polos complejos conjugados	$-10 \log((1 - \nu^2)^2 + 4\zeta^2 \nu^2)$	$-\arctan\left(\frac{2\zeta\nu}{1 - \nu^2}\right)$	con $\nu = \omega/\omega_n$
Ceros complejos conjugados	$10 \log((1 - \nu^2)^2 + 4\zeta^2 \nu^2)$	$\arctan\left(\frac{2\zeta\nu}{1 - \nu^2}\right)$	
Tiempo de retardo	0	$-\omega t_r \frac{180^\circ}{\pi}$	

Tabla 4.2 Características de magnitud logarítmica y fase de factores básicos

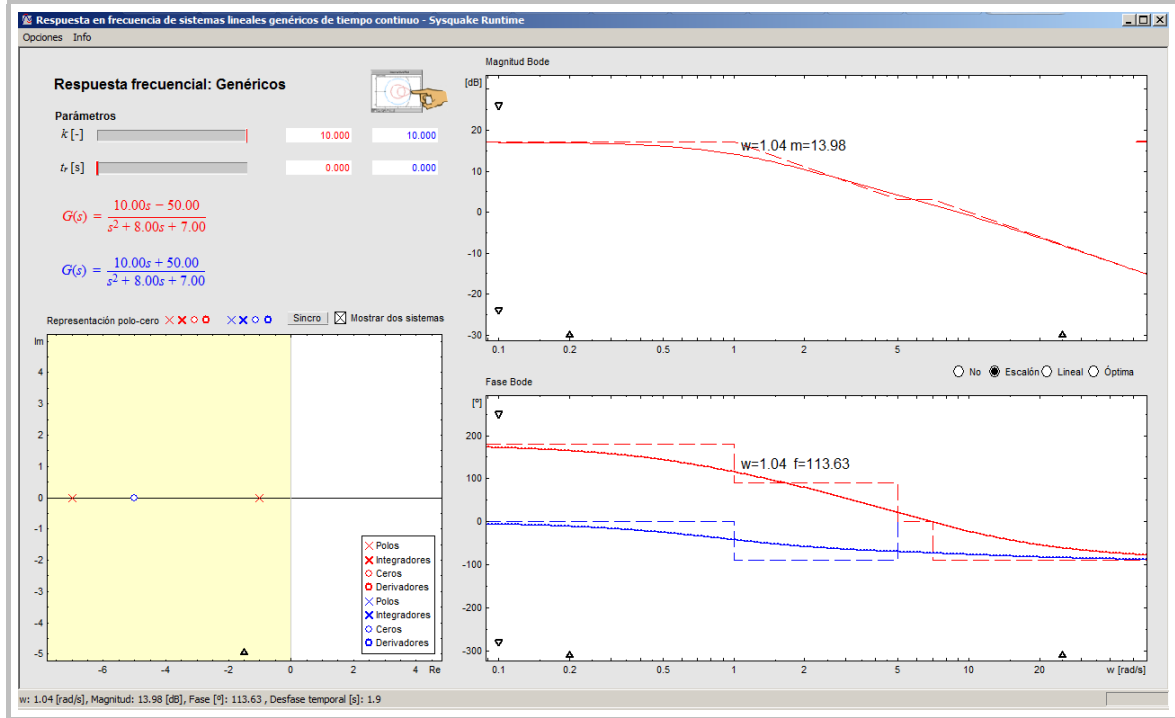
Por otra parte, cuando se ha tratado en la Sección 3.5 el concepto de *polos dominantes*, se ha comprobado que una aproximación a una función de transferencia $G(s)$ (de alto orden) que contenga sus polos dominantes, tiende a reproducir la dinámica lenta del sistema, pasando por alto la rápida. Por tanto, se espera que la respuesta en frecuencia de la aproximación con polos dominantes no difiera mucho de la del sistema original para valores bajos de la frecuencia ω . Como se dice habitualmente, una aproximación de polos dominantes representa un modelo en baja frecuencia del sistema. De hecho, cuando se trazan diagramas asintóticos, los polos y ceros con pequeñas constantes de tiempo o frecuencias naturales elevadas producen contribuciones muy poco representativas de la forma de los diagramas para valores bajos de la frecuencia.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Capítulo 9, ejercicio 9.9, página 292, 2008.
- [4] Barrientos, A., R. Sanz, F. Matía y E. Gambao. Control de sistemas continuos. Problemas resueltos. Mc Graw Hill, ISBN: 84-481-0605-9. Capítulo 7, sección 2, páginas 233-235, 1996.
- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 6, sección 6, apartado 6, página 155, sección 9, páginas 167-168, 2009.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Pearson - Prentice Hall, ISBN: 84-205-4401-9. Capítulo 8, sección 2, páginas 441-449, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 6, sección 1, páginas 134-137, 314-335; ejemplo 6.5, páginas 331-332, 2010.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, páginas 398-490, 2010.
- [36] Truxal, J. G. Automatic feedback control system synthesis. McGraw-Hill, ISBN: 978-00-7065-310-8. Páginas 212-219, 1955.

Aplicación

Herramienta interactiva: 4.6. f_genérico



Respuesta frecuencial: Genéricos

Esta herramienta facilita el análisis de la respuesta frecuencial de sistemas genéricos (con un número arbitrario de polos y ceros, incluyendo integradores y derivadores y tiempo de retardo).

El área superior izquierda de la herramienta contiene el apartado de **Parámetros**, donde se muestra una representación simbólica de la función de transferencia y dos barras de desplazamiento que facilitan la modificación de los valores de la ganancia estática k y del retardo del sistema t_r , limitado entre 0 y 30 s. Los valores de ambos parámetros se pueden fijar también a través de cuadros de texto. Las denominaciones que aparecen en este caso son k_1 y t_{r1} , porque es posible mostrar simultáneamente dos sistemas (seleccionando la opción **Mostrar dos sistemas** que aparece sobre la gráfica inferior izquierda que se comentará a continuación). En este caso, la barra de desplazamiento y el texto correspondiente al valor de los parámetros del sistema original se muestran en color **rojo**, mientras que los correspondientes al nuevo sistema (k_2 y t_{r2}) se muestran en **azul**. Nótese que cuando se activan, se suelen superponer en la barra de desplazamiento las de los dos sistemas, siendo sensible la del sistema original. Si se desplazan las barras de desplazamiento se hacen visibles ambas respuestas. También se hacen visibles las dos representaciones simbólicas de las funciones de transferencia correspondientes. En este área no se incluyen cuadros de texto ni barras de desplazamiento asociadas a otros parámetros dinámicos, cuyos valores se introducirán mediante el editor asociado al diagrama de polos y ceros.

Aplicación...

Representación polo-cero: Incluye el editor de polos y ceros introducido en la herramienta **Respuesta temporal: Genéricos** para configurar cualquier clase de función de transferencia añadiendo polos (\times), ceros (\circ), integradores (\times) y derivadores (\circ). Se garantiza en todo momento la causalidad del sistema y está acotado el número total de polos (4) y el retardo (30 s) para limitar la carga computacional. En el caso del sistema que aparece por omisión el color utilizado es el **rojo** y si se selecciona la opción de Mostrar dos sistemas aparecen las mismas leyendas en color **azul**, correspondientes al segundo sistema a estudiar. La configuración del sistema se realiza arrastrando los elementos gráficos que aparecen junto a la leyenda Representación polo-cero (elementos \times , \circ , \times , \circ) sobre el plano complejo (o sacándolos hacia dicho repositorio en el caso en que se quieran eliminar elementos). Sobre la gráfica existe un botón de sincronización (Sincro) que, cuando está activa la opción de Mostrar dos sistemas, hace que el segundo sistema (representado en **azul**) sea exactamente igual al primero (representado en **rojo**) para poder analizar de una forma directa el efecto de modificar los parámetros de uno de los dos sistemas en relación a la configuración inicial.

El área derecha de la herramienta está dedicada al análisis de la respuesta en frecuencia del sistema, por medio de las gráficas de Magnitud Bode y Fase Bode, incluyendo tanto las curvas reales como las asintóticas (explicadas en detalle en la ficha 4.1) y los valores de frecuencia (ω) y magnitud (m) o fase (f) cuando se coloca el ratón sobre las curvas reales (incluyéndose una información más detallada en la esquina inferior izquierda de la herramienta). El símbolo interactivo – situado a la derecha de la gráfica de Magnitud Bode modifica la ganancia de baja frecuencia al desplazarse verticalmente. Se muestra en color **rojo** para el primer sistema y en color **azul** para el segundo. Cuando se introduce tiempo de retardo, la fase del sistema original se representa en línea de puntos, mientras que la correspondiente al sistema con retardo se representa en trazo continuo. Estas propiedades son similares a las gráficas del segundo sistema cuando se selecciona la opción de Mostrar dos sistemas. Sobre la gráfica de fase existen opciones para seleccionar distintas aproximaciones asintóticas de la fase.

En el menú Opciones se han incluido por omisión tres ejemplos:

- Ejemplo 1 ($P_{11}(s)$): Son dos sistemas de tercer y quinto orden respectivamente, cuyas respuestas en frecuencia son muy similares en un rango de bajas frecuencias. Es un ejemplo muy ilustrativo de la influencia de dos polos complejos conjugados adicionales en el segundo sistema y su efecto en la respuesta en frecuencia (efecto de los polos menos dominantes).
- Ejemplo 2 ($P_5(s)$): Muestra dos sistemas, representados por las funciones de transferencia siguientes, para permitir comparar las gráficas de Bode a baja, media y alta frecuencia y la diferencia relativa de grados entre el denominador y el numerador de la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)} \quad G(s) = \frac{s(0.4s+0.4)}{s^2+0.7s+1.75}$$

- Ejemplo 3 ($P_7(s)$): incluye dos sistemas de segundo orden con polos reales en el semiplano izquierdo situados en la misma posición y un cero de igual valor absoluto pero situado en uno de los sistemas en el semiplano derecho y en el otro en el semiplano izquierdo. Es un ejemplo muy útil para analizar el concepto de fase mínima y no mínima en sistemas de segundo orden con un cero.
- Además, se puede introducir una función de transferencia arbitraria utilizando los formatos de Matlab ((NUM,DEN) y ZPK) explicados en la Tabla 1.2 del Capítulo 1.

Ejercicios

1. Considere la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{5(0.1s + 1)}{s(0.5s + 1)\left(\left(\frac{s}{50}\right)^2 + \frac{0.6s}{50} + 1\right)}$$

Dibuje el diagrama de Bode de dos formas distintas. En primer lugar, convierta $G(s)$ a un formato tipo Matlab ((NUM,DEN) o ZPK) e introdúzcala a través del menú Opciones. En segundo lugar, vaya incluyendo (de forma lógica) elemento a elemento analizando cómo se construye incrementalmente el diagrama mediante la adición de las aportaciones en magnitud y fase de cada uno de los elementos. Indique el valor de las distintas frecuencias de corte. Calcule el valor de la magnitud y la fase en las frecuencias $\omega = 1, 5, 10$ rad/s.

2. Seleccione ahora el Ejemplo 1 ($P_{11}(s)$) del menú Opciones de la herramienta. Activando la casilla de Mostrar dos sistemas, aleje los dos polos complejos conjugados menos dominantes del sistema azul separándolos del eje imaginario y comente lo que ocurre con las curvas de magnitud y fase. ¿Sería posible obtener unas curvas de magnitud y fase similares en los dos casos? Haga un análisis utilizando la herramienta y justifique las conclusiones.
3. Seleccione el Ejemplo 2 ($P_5(s)$) del menú Opciones de la herramienta. Activando la casilla de Mostrar dos sistemas, añada un integrador al sistema representado en color rojo $G(s)$. Compare las respuestas en frecuencia de los dos sistemas y justifique las diferencias y las similitudes que encuentre.
4. Seleccione el Ejemplo 3 ($P_7(s)$) del menú Opciones de la herramienta. Activando la casilla de Mostrar dos sistemas, analice cómo va cambiando la respuesta en frecuencia del sistema representado en color rojo $G(s)$ cuando va desplazando el cero hacia el semiplano izquierdo, hasta hacerlo coincidir con el cero del sistema dibujado en color azul.
5. Haciendo uso de la herramienta interactiva, dibuje los diagramas de Bode para la siguiente función de transferencia (o una aproximada - se recomienda introducir primero los polos complejos conjugados o bien introduzca directamente la función de transferencia desde el menú Opciones):

$$G(s) = \frac{10(s + 3)}{s(s + 2)(s^2 + s + 2)} = \frac{10(s + 3)}{s^4 + 3s^3 + 4s^2 + 4s}$$

Indique las frecuencias esquina que aparecen en la curva de magnitud y el valor asociado. Calcule el error máximo que se obtiene con las curvas asintóticas en las frecuencias esquina.

6. Utilizando la herramienta interactiva, construya con el editor de polos y ceros una función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{e^{-t_r s}}{\tau s + 1}$$

analice el diagrama de Bode de esa función de transferencia y describa lo que ocurre con las curvas de magnitud y fase cuando aumenta el tiempo de retardo. Utilizando ahora la herramienta interactiva **4.1. f_concepto**, construya con el editor de polos y ceros la misma función de transferencia. Dibuje el diagrama polar de esa función de transferencia, indicando dónde se ubican los puntos de frecuencia cero y frecuencia infinito. Analice cómo, en presencia de tiempo de retardo, el diagrama polar tiene forma espiral. Justifique este resultado.

7. Haciendo uso de la herramienta, considere el modelo de motor eléctrico modificado con respecto al descrito en [7] (página 167):

$$G(s) = \frac{3.98}{(8.56s + 1)(0.22s + 1)} = \frac{2.1134}{(s + 0.1168)(s + 4.5455)} = \frac{2.1134}{s^2 + 4.6623s + 0.5309}$$

que describe la relación entre la tensión de inducido y la velocidad de rotación. Esta función de transferencia puede ser aproximada razonablemente por la siguiente función:

$$G_a(s) = \frac{3.98}{(8.56s + 1)}$$

en la que se conserva el polo dominante. Compare los diagramas de Bode de las dos funciones de transferencia e indique el rango de frecuencias para los que la aproximación dada por $G_a(s)$ se puede considerar válida (una "buena aproximación").

8. Para la siguiente función de transferencia, descrita en [7] (página 168):

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{(0.5s + 1)}{(0.1s + 1)(0.002s^2 + 0.02s + 1)(s^2 + 0.1s + 1)} \\ &= \frac{(0.5s + 1)}{0.0004s^5 + 0.00604s^4 + 0.221s^3 + 1.028s^2 + 0.32s + 1} \end{aligned}$$

proponga una aproximación de polos dominantes de segundo orden sin ceros a esa función de transferencia. Represente el diagrama de Bode de ambas e indique el rango de frecuencias en las que dicha aproximación podría considerarse válida.

9. Dibuje simultáneamente los diagramas de Bode de los sistemas con función de transferencia (referencia [4], páginas 233-235)

$$G(s) = \frac{10(s - 5)}{(s + 1)(s + 7)} = \frac{10(s - 5)}{s^2 + 8s + 7} \quad G(s) = \frac{10(s + 5)}{(s + 1)(s + 7)} = \frac{10(s + 5)}{s^2 + 8s + 7}$$

Compare ambas respuestas y comente los resultados.

10. Cuando se desea obtener una aproximación racional a un tiempo de retardo, se puede obtener la denominada *aproximación de Padé a un tiempo de retardo*,

$$G(s) = e^{t_r s} \approx \frac{1 - s \frac{t_r}{2}}{1 + s \frac{t_r}{2}} = - \left(\frac{s - \frac{2}{t_r}}{s + \frac{2}{t_r}} \right)$$

De esta manera se aproxima un tiempo de retardo por un cero en el semiplano derecho. Compruebe haciendo uso de la herramienta (por ejemplo escogiendo $t_r = 1$) que las dos funciones de transferencia son similares cuando $\omega < 1/t_r$ (referencia [2], página 292). Note que por el criterio de ángulos escogido en las herramientas puede apreciarse una diferencia de 360° en la fase, siendo por tanto equivalentes.

11. Haciendo uso de la herramienta interactiva **4.1. f_concepto**, analice el diagrama de Bode, el diagrama de Nyquist y el diagrama de Nichols de los siguientes sistemas genéricos (cuyas gráficas de respuesta en frecuencia ya aparecían en el libro clásico de Truxal [36]) cuya función de transferencia tenga la siguiente estructura (puede escoger el valor que desee de los parámetros):

$$\begin{aligned}
 G_1(s) &= \frac{k}{\tau s + 1} & G_2(s) &= \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} & G_3(s) &= \frac{k}{s} \\
 G_4(s) &= \frac{k}{s(\tau s + 1)} & G_5(s) &= \frac{k}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} & G_6(s) &= \frac{k(\beta s + 1)}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} \\
 G_7(s) &= \frac{k}{s^2} & G_8(s) &= \frac{k}{s^2(\tau s + 1)} & G_9(s) &= \frac{k(\beta s + 1)}{s^2(\tau s + 1)} \\
 G_{10}(s) &= \frac{k}{s^3} & G_{11}(s) &= \frac{k(\beta s + 1)}{s^3} & G_{12}(s) &= \frac{k(\beta_1 s + 1)(\beta_2 s + 1)}{s^3} \\
 G_{13}(s) &= \frac{k(\beta s + 1)}{s^2(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} & G_{14}(s) &= \frac{k}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)} \\
 G_{15}(s) &= \frac{k(\beta_1 s + 1)(\beta_2 s + 1)}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)(\tau_4 s + 1)}
 \end{aligned}$$

Es muy importante que analice las formas que se obtienen y saque conclusiones que le ayuden a construir cualquier diagrama de un sistema genérico. Estas representaciones le serán de gran utilidad a la hora de entender los criterios de estabilidad en el dominio frecuencial de sistemas realimentados.

Compruebe haciendo uso de esos ejemplos que en el caso de los diagramas de Nyquist (polares), si se considera una representación genérica del sistema de la forma.

$$G(j\omega) = \frac{k(\beta_1 j\omega + 1)(\beta_2 j\omega + 1) \dots (\beta_m j\omega + 1)}{(j\omega)^\aleph (\tau_1 j\omega + 1)(\tau_2 j\omega + 1) \dots (\tau_n j\omega + 1)} \tag{4.12}$$

donde $n > m$. En función del número de integradores (términos $(j\omega)$ en el denominador) se tendrá:

- Para $\aleph = 0$ el punto inicial del diagrama polar estará sobre el eje real positivo, siendo la tangente en el diagrama polar en $\omega = 0$ perpendicular al eje real. El punto terminal correspondiente a $\omega = \infty$ está en el origen, y la curva es tangente a uno de los ejes.
- Para $\aleph = 1$, a bajas frecuencias el diagrama polar es asintótico hacia una línea paralela al eje imaginario negativo. En $\omega = \infty$ la magnitud vuelve a cero y la curva converge hacia el origen siendo tangente a uno de los ejes.
- Si $\aleph = 2$, a bajas frecuencias el diagrama polar es asintótico hacia una línea paralela al eje real negativo, mientras que en $\omega = \infty$ la magnitud es cero siendo la curva tangente a uno de los ejes.

Como se ha comentado, para $\omega = \infty$ los lugares geométricos son tangentes a uno u otro de los ejes (eje imaginario negativo para $n - m = 1$, eje real negativo para $n - m = 2$ y eje imaginario positivo para $n - m = 3$). Las formas complicadas de las curvas de los diagramas polares se deben a la dinámica del numerador.

12. Considere el ejemplo obtenido de la referencia [13], página 331, que trata de la respuesta en frecuencia que representa un sistema mecánico con dos masas iguales acopladas a través de un muelle. La función de transferencia que modela el sistema es:

$$G(s) = \frac{0.01(s^2 + 0.01s + 1)}{s^2((s^2/4) + 0.02(s/2) + 1)}$$

Calcule con la herramienta el diagrama de Bode de ese sistema. Comente los resultados que se obtienen con las aproximaciones asintóticas de magnitud y fase. ¿Qué aproximación asintótica de fase proporciona mejores resultados en este ejemplo?

4.7 El desfase en sistemas de fase no mínima

Herramienta interactiva: 4.7. f_fase_no_mínima

Conceptos analizados en la ficha

- Concepto de fase no mínima. Análisis de la respuesta en frecuencia de sistemas de fase no mínima.
- Evaluación del desfase en sistemas de fase no mínima a partir de los componentes de la función de transferencia.

Teoría Las funciones de transferencia que no tienen polos ni ceros en el semiplano derecho se denominan de fase mínima. En caso de tener algún polo o cero en el semiplano derecho se llaman de fase no mínima. La diferencia entre ambas en el dominio de la frecuencia es que para los sistemas con la misma característica de magnitud, el rango del ángulo de fase de la función de transferencia de fase mínima es mínimo entre todos los sistemas con el mismo diagrama de magnitud (la función de transferencia se determina de forma única a partir de la curva de magnitud), mientras que el rango del ángulo de fase para cualquier función de transferencia de fase no mínima es mayor que ese mínimo y su función de transferencia no puede obtenerse analizando únicamente la curva de magnitud. La respuesta temporal de un sistema de fase no mínima con ceros en el semiplano derecho se caracteriza por tener una respuesta inversa, donde la reacción a un cambio en forma de escalón en la entrada es inicialmente en un sentido pero acaba evolucionando en sentido contrario.

Una forma de abordar el problema es utilizar una gráfica del patrón de polos y ceros en el plano s . Si un polo está localizado en $s = -a = -1/\tau$ y se selecciona un punto arbitrario s en el plano, el vector que se inicia en $s = -a$ y termina en el punto s representa la longitud y el ángulo del vector $(s + a)$, tal y como se observa en la figura 4.2. Al trazar la respuesta en frecuencia, los puntos de interés son aquéllos que cumplen $s = j\omega$ (los puntos del eje imaginario positivo, desde $\omega = 0$ hasta $\omega = \infty$).

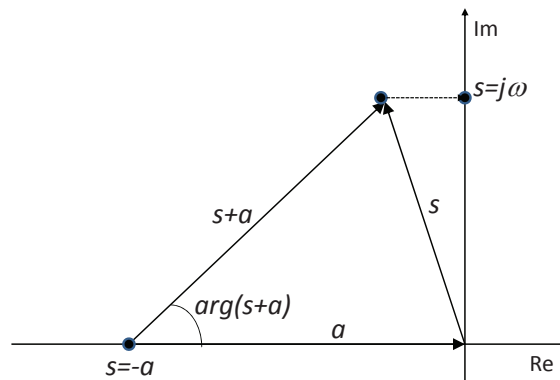


Figura 4.2 Evaluación de la magnitud y ángulo de fase de un vector $(s + a)$

Si se factoriza la función de transferencia de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{\kappa \prod_{\ell=1}^q (s - z_{\ell}) \prod_{\ell=1}^r (s^2 + 2\zeta_{\ell}\omega_{n_{\ell}}s + \omega_{n_{\ell}}^2)}{s^N \prod_{i=1}^p (s - p_i) \prod_{i=1}^h (s^2 + 2\zeta_i\omega_{n_i}s + \omega_{n_i}^2)}$$

cuya respuesta en frecuencia viene dada por:

$$G(s) = \frac{\kappa \prod_{\ell=1}^q (j\omega - z_{\ell}) \prod_{\ell=1}^r (-\omega^2 + 2j\zeta_{\ell}\omega_{n_{\ell}}\omega + \omega_{n_{\ell}}^2)}{(j\omega)^{\kappa} \prod_{i=1}^p (j\omega - p_i) \prod_{i=1}^h (-\omega^2 + 2j\zeta_i\omega_{n_i}\omega + \omega_{n_i}^2)}$$

Esta función de transferencia se puede expresar de la forma $G(j\omega) = \rho e^{i\phi}$, donde:

$$\rho = \frac{|\kappa| \prod_{\ell=1}^q \rho_{z_{\ell}} \prod_{\ell=1}^{2r} \rho_{r_{\ell}}}{\rho_0^{\kappa} \prod_{i=1}^p \rho_{p_i} \prod_{i=1}^{2h} \rho_{h_i}} \quad \text{y} \quad \phi = \phi_{\kappa} + \sum_{\ell=1}^q \phi_{z_{\ell}} + \sum_{\ell=1}^{2r} \phi_{r_{\ell}} - \kappa\phi_0 - \sum_{i=1}^p \phi_{p_i} - \sum_{i=1}^{2h} \phi_{h_i}$$

En esas fórmulas $\rho_{z_{\ell}}, \rho_{r_{\ell}}, \rho_0, \rho_{p_i}$ y ρ_{h_i} son los módulos y $\phi_{z_{\ell}}, \phi_{r_{\ell}}, \phi_0, \phi_{p_i}$ y ϕ_{h_i} son las fases de los vectores señalados por las singularidades correspondientes de $G(s)$ y con el segundo extremo en $j\omega$ (ver Figura 4.3), mientras que ϕ_{κ} es el argumento de la constante κ . Analizando el módulo y la fase de los vectores individuales al aumentar ω de cero a infinito, se puede determinar la evolución de $G(j\omega)$.

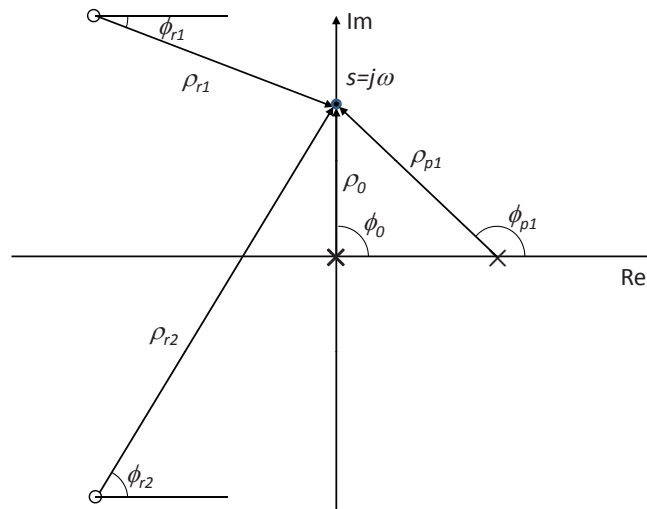


Figura 4.3 Cálculo de $G(j\omega)$ de forma gráfica

Por tanto, la fase de la función de transferencia será la suma de los ángulos de fase de los polos menos los de los ceros. Para cada frecuencia ω , se puede calcular la fase sabiendo que los ángulos positivos se cuentan desde el eje real positivo en sentido contrario a las agujas del reloj. Se adopta como convenio que una ganancia negativa aporta un desfase de 180° . En la Tabla 4.3 se resumen las contribuciones de los distintos elementos.

Los ceros en el semiplano derecho aportan la misma cantidad de cambio de fase que los ceros situados en el semiplano izquierdo, pero con signo contrario.

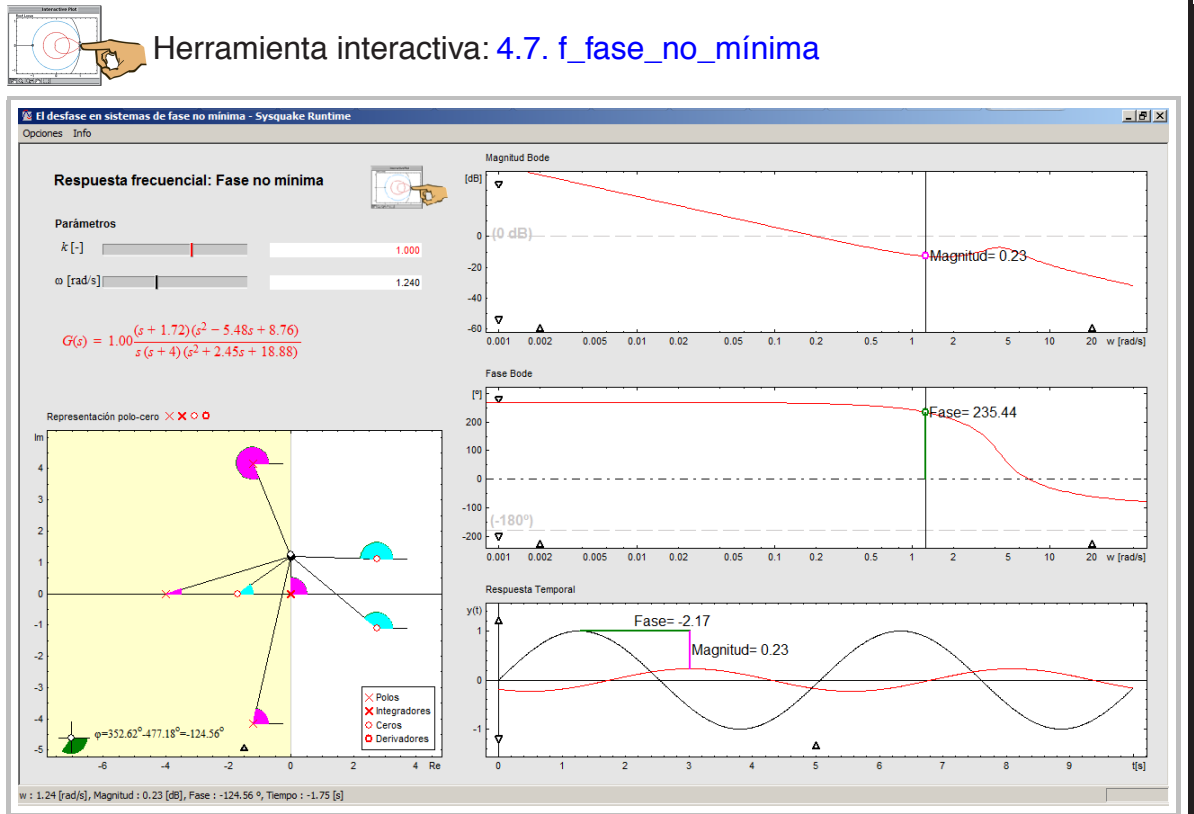
	fase para $\omega = 0$	fase para $\omega = \infty$
Ganancia estática positiva	0°	0°
Ganancia estática negativa	180°	180°
Polo en $s = 0$	-90°	-90°
Polo en $s = p$ ($p < 0$)	0°	-90°
Polo en $s = p$ ($p > 0$)	-180°	-90°
Polos en $s = \sigma \pm j\omega$ ($\sigma < 0$)	0°	-180°
Polos en $s = \sigma \pm j\omega$ ($\sigma > 0$)	-360°	-180°
Cero en $s = 0$	90°	90°
Cero en $s = z$ ($z < 0$)	0°	90°
Cero en $s = z$ ($z > 0$)	180°	90°
Ceros en $s = \sigma \pm j\omega$ ($\sigma < 0$)	0°	180°
Ceros en $s = \sigma \pm j\omega$ ($\sigma > 0$)	360°	180°

Tabla 4.3 Contribuciones en fase de los distintos elementos de la función de transferencia

Bibliografía

- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 6, sección 7, páginas 157-158, 2009.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, páginas 415-418, 2010.
- [34] Rohrs, C. E, J. L. Melsa y D. G. Schultz. Sistemas de control lineal. McGraw-Hill, ISBN: 970-10-0411-6. Capítulo 5, páginas 298-302, 1994.

Aplicación



Respuesta frecuencial: Fase no mínima

El área de **Parámetros** de esta herramienta permite modificar los valores de la ganancia estática del sistema seleccionado y de la frecuencia concreta para la que se está calculando el desfase, a través de cuadros de texto y barras de desplazamiento. Bajo estos valores de los parámetros, se visualiza una representación simbólica de la función de transferencia.

La principal novedad de esta herramienta es que en la **Representación polo-cero**, que incluye el editor de polos y ceros para construir funciones de transferencia arbitrarias (se utiliza como en las otras herramientas, por ejemplo las explicadas en las Secciones 3.5 y 4.6), se muestran los ángulos de fase asociados a cada elemento dinámico (polos, ceros, integradores y derivadores), de forma que se puede analizar para una frecuencia en concreto cuál es el ángulo de fase correspondiente de la función de transferencia. La frecuencia de estudio, además de en el área de parámetros, se puede fijar a través de un círculo de color blanco localizado sobre el eje imaginario positivo que se puede desplazar desde $j\omega = 0j$ hasta ∞j .

En la parte inferior izquierda de la representación se muestra el aporte global de fase. Al igual que en otras herramientas interactivas, si se coloca el puntero del ratón sobre cualquier elemento dinámico, en la esquina inferior izquierda de la herramienta se muestran sus coordenadas en el plano complejo. La gráfica incluye la posibilidad de realizar ampliaciones o reducciones de escala tocando con el ratón a la derecha o la izquierda del triángulo situado en la parte inferior.

Aplicación...

En la parte derecha de la herramienta aparecen distintas representaciones de la respuesta frecuencial, que son seleccionables a través del menú desplegable de Opciones ubicado en el marco superior de la aplicación. Por omisión aparece la opción Bode (Fase), pues es la representación donde mejor se visualizan los conceptos asociados al aporte individual de ángulo de fase por parte de cada uno de los elementos dinámicos que conforman la función de transferencia. Las otras opciones seleccionables son Bode (Magnitud y Fase), Nyquist, Nichols y Completo. Este último incluye todas las representaciones, que cuentan con los siguientes elementos interactivos:

- En el Diagrama de Bode, aparece una recta vertical en color negro que permite modificar interactivamente la frecuencia de estudio. En la curva de Magnitud Bode se dibuja un círculo de color rosa indicando la magnitud logarítmica para la frecuencia determinada. Del mismo modo, en la curva de Fase Bode se representa un círculo verde que marca el desfase a la frecuencia seleccionada. Colocando el cursor del ratón sobre la curva de magnitud (en cualquier punto o sobre el círculo rosa) se puede modificar la magnitud del diagrama (afectando únicamente a la ganancia estática del sistema). Si se coloca sobre la curva de fase (en cualquier parte o sobre el círculo verde), se puede modificar el desfase (afectando al tiempo de retardo). Se pueden modificar las escalas de la representación utilizando los triángulos en los ejes de abscisas y ordenadas.
- En el Diagrama de Nyquist se incluye como elemento interactivo un círculo sobre la curva de respuesta en frecuencia, que al desplazarse sobre la curva modifica la frecuencia de interés y como consecuencia la Respuesta temporal del sistema y los valores que se visualizan en el área de **Parámetros**. El segmento no interactivo de color rosa que une el círculo sobre la respuesta con el origen determina la magnitud de la respuesta en la frecuencia seleccionada, mientras que el ángulo en color verde determina la fase. Colocando el ratón sobre el círculo situado sobre la curva se mostrarán los valores asociados a magnitud y fase para la frecuencia seleccionada. También se puede modificar la escala accediendo a la izquierda o derecha del triángulo ubicado sobre el eje de ordenadas.
- En el Diagrama de Nichols, se puede modificar interactivamente la frecuencia para la cuál se está estudiando la magnitud y la fase de la respuesta en frecuencia (accediendo al círculo sobre la respuesta en frecuencia). El segmento de color verde indica en este diagrama el desfase, mientras que el rosa representa la magnitud en dB. También se pueden modificar las escalas a través de los triángulos que aparecen en la representación gráfica.

En todos los casos, en la parte inferior se muestra la Respuesta temporal, que permite analizar la respuesta senoidal del sistema para el valor de la frecuencia fijado en el área de **Parámetros**, en la Representación polo-cero e incluso usando las líneas verticales que aparecen en todas las representaciones en el dominio frecuencial. En la curva de Respuesta temporal se representa la atenuación o amplificación de ganancia mediante un segmento vertical no interactivo de color rosa y el desfase asociado mediante un segmento horizontal no interactivo de color verde. Al colocar el ratón sobre ellos aparecen los valores asociados al desfase temporal y a la ganancia de magnitud, representándose también en la esquina inferior izquierda de la herramienta. Los triángulos situados en el eje de abscisas y ordenadas permiten cambiar respectivamente la escala de la gráfica pulsando a derecha-izquierda o arriba-abajo de los mismos, respectivamente.

El menú Opciones contiene las opciones Introducir Planta (NUM,DEN) o Introducir Planta ZPK, que facilitan la inclusión de funciones de transferencia genéricas en esos formatos tipo (ver Tabla 1.2). Además, se pueden seleccionar varios ejemplos con distintas estructuras de polos, ceros y retardo asociadas:

Aplicación...

- El Ejemplo 1 ($P_{11}(s)$) toma como sistema base uno de tercer orden estable con dos polos complejos conjugados y uno real. Es un ejemplo básico de fase mínima.
- El Ejemplo 2 ($P_4(s)$) utiliza un sistema base con un polo real estable y un cero en el semiplano derecho. En este caso se puede observar cómo la fase varía entre 180° y 0° a medida que aumenta la frecuencia. Puede servir como ejemplo de base para compararlo con el caso en el que el cero esté en el semiplano izquierdo.
- El Ejemplo 3 ($P_{11}(s)$) es un ejemplo sencillo de fase mínima en el que aparecen por omisión las distintas representaciones en el dominio de la frecuencia.
- El Ejemplo 4 incluye dos polos reales estables y dos ceros complejos conjugados de fase no mínima. La utilidad de este ejemplo es analizar la contribución de fase de esos dos ceros.

Ejercicios

1. Para las siguientes agrupaciones de funciones de transferencia, compare las curvas de magnitud y fase que se obtienen para cada una de ellas. Comente los resultados e indique los valores de desfase para $\omega = 0$, $\omega \rightarrow \infty$ y $\omega = 1$ rad/s.

Grupo 1: $G(s) = \frac{k(s-z)}{(s-p)}$	$(1, -5, -1), (1, -5, 1), (-1, -5, -1), (-1, -5, 1),$
Combinaciones de (k, p, z)	$(1, 5, -1), (-1, 5, -1), (1, 5, 1), (-1, 5, 1)$
Grupo 2: $G(s) = \frac{k(s-z)}{s(s-p)}$	$(1, -5, -1), (1, -5, 1), (-1, -5, -1), (-1, -5, 1),$
Combinaciones de (k, p, z)	$(1, 5, -1), (-1, 5, -1), (1, 5, 1), (-1, 5, 1)$
Grupo 3: $G(s) = \frac{ks}{(s-p_1)(s-p_2)}$	$(1, -5, -1), (1, -5, 1), (-1, -5, -1), (-1, -5, 1),$
Combinaciones de (k, p_1, p_2)	$(1, 5, -1), (-1, 5, -1), (1, 5, 1), (-1, 5, 1)$
Grupo 4: $G(s) = \frac{s^2 + 2\zeta_1\omega_{n_1}s + \omega_{n_1}^2}{s^2 + 2\zeta_2\omega_{n_2}s + \omega_{n_2}^2}$	$(0.1, 1, 0.5, 1), (-0.1, 1, 0.5, 1), (0.1, 1, -0.5, 1),$
Combinaciones de $(\zeta_1, \omega_{n_1}, \zeta_2, \omega_{n_2})$	$(0.1, 1, 0.5, 2), (-0.1, 1, 0.5, 2), (0.1, 1, -0.5, 2)$

2. Utilizando el Ejemplo 2 ($P_4(s)$) del menú Opciones analice la diferencia en las distintas representaciones en el dominio de la frecuencia y en la del dominio temporal entre la configuración que aparece por omisión y la resultante de colocar el cero en $s = -1$. ¿Cuáles son las diferencias más notables que aprecia en la curva de fase de Bode? ¿y en la respuesta senoidal del sistema?
3. Utilizando el Ejemplo 3 ($P_{11}(s)$) que viene incluido en el menú Opciones repita el ejercicio anterior colocando el polo real en $s = 0.72$.

4.8 Ajuste de modelos en el dominio de la frecuencia

Herramienta interactiva: 4.8. f_ajuste_modelos

Conceptos analizados en la ficha

- Ajuste de modelos a datos experimentales en el dominio de la frecuencia.

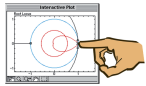
Teoría La identificación de la planta consiste en determinar la función de transferencia de ésta a partir de medidas experimentales. La aplicación del concepto de respuesta en frecuencia, para sistemas físicos describibles por un sistema lineal estable, permite obtener experimentalmente valores que puedan incorporarse a los distintos diagramas de la respuesta frecuencial del sistema y fundamentalmente al diagrama de Bode. La obtención de estos puntos se lleva a cabo de la siguiente manera: se lleva al sistema a un estado de equilibrio (punto de operación) y se le introduce a la entrada una señal senoidal $u(t) = A \sin(\omega_0 t)$, esperando el tiempo necesario hasta que el sistema alcance una condición de régimen permanente. En esa condición se mide la amplitud y la fase de la señal sinusoidal de salida. El módulo de la respuesta en frecuencia en $\omega = \omega_0$ es igual a la relación entre las amplitudes de la senoide de salida y la de entrada, siendo su fase igual a la diferencia entre sus fases. Si se repite esta operación utilizando señales sinusoidales de la misma amplitud y distintas frecuencias $\omega = \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_i$, se pueden obtener puntos de la respuesta en frecuencia para las frecuencias utilizadas en la generación de las senoidales de entrada. Estos puntos se pueden colocar en un diagrama de Bode (pasando previamente el módulo a decibelios y la fase a grados) e interpolar dichos puntos con una aproximación adecuada. A continuación, haciendo uso de aproximaciones asintóticas, se puede postular una función de transferencia que modele esa respuesta frecuencial.

Existen tres factores que hacen que los diagramas asintóticos de magnitud y fase sean ideales para la solución de este problema. En primer lugar, es relativamente fácil aproximar la gráfica de la magnitud determinada experimentalmente mediante la gráfica de la magnitud asintótica. Puesto que la gráfica sólo contiene rectas de pendientes que son múltiplos enteros de ± 20 dB/década, se puede obtener mediante prueba y error la aproximación asintótica de una manera considerablemente simple. En segundo lugar, la forma de la función de transferencia se puede obtener por inspección a partir de la aproximación asintótica. Esta característica proviene del hecho de que las frecuencias de corte o esquina de la aproximación asintótica corresponden a la localización de los polos y ceros de la función de transferencia, presentando únicamente una ligera dificultad la consideración de polos o ceros complejos conjugados. En tercer lugar, la consideración conjunta de las gráficas de magnitud y fase determinadas experimentalmente especifican de manera única a la función de transferencia. Empleando únicamente la gráfica de la magnitud, se puede determinar la forma de la función de transferencia (y sus correspondientes frecuencias esquina). Sin embargo, no se sabe si el sistema es o no de fase mínima, existiendo una ambigüedad a menos que se considere también la curva de fase.

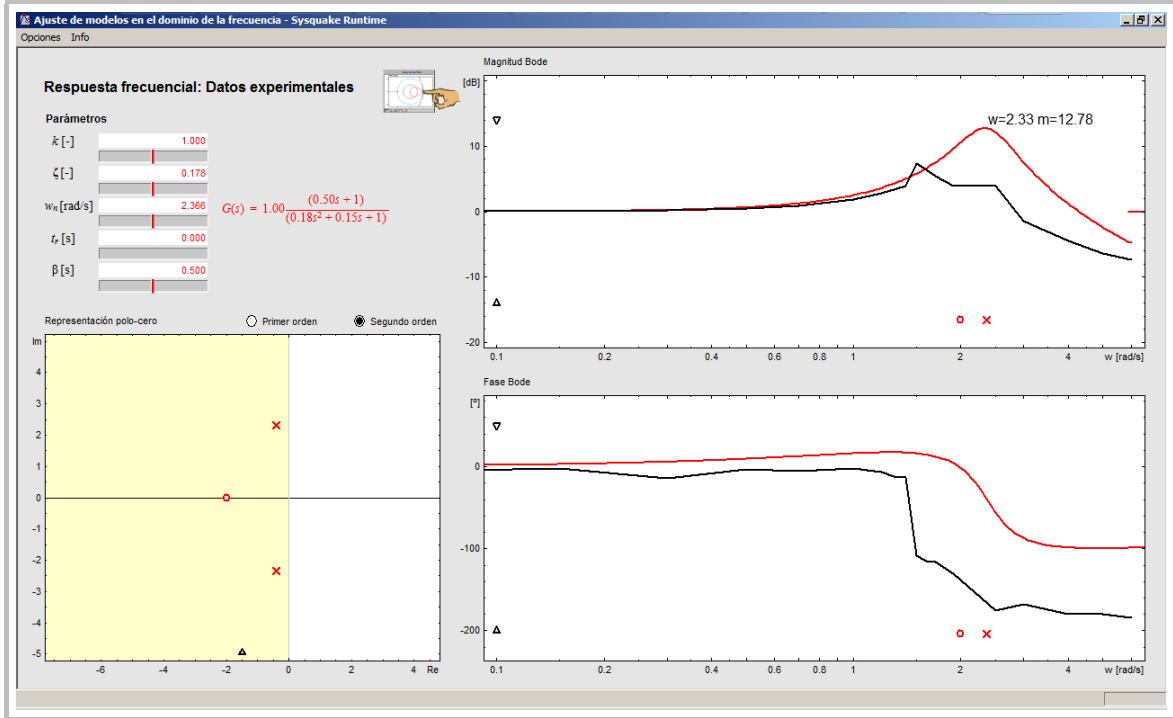
Bibliografía

- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 6, sección 5, páginas 145-146, 2009.
- [34] Rohrs, C. E., J. L. Melsa y D. G. Schultz. Sistemas de control lineal. McGraw-Hill, ISBN: 970-10-0411-6. Capítulo 5, páginas 309-320, 1994.

Aplicación



Herramienta interactiva: 4.8. f_ajuste_modelos



Respuesta frecuencial: Datos experimentales

El objetivo principal de esta ficha es facilitar la identificación de funciones de transferencia de sistemas a partir de sus diagramas de Bode experimentales, utilizando la herramienta interactiva para calcular la función de transferencia que lo modela, proponiendo en este caso estructuras de primer o segundo orden (pudiendo incluir tiempo de retardo y un cero). La aplicación interactiva está dividida en tres áreas principales:

Parámetros: En la parte superior izquierda se muestran los parámetros numéricos y la función de transferencia que se postula como modelo al sistema bajo estudio. En esta herramienta, se han fijado las posibles estructuras de funciones de transferencia que modelen los datos experimentales:

- Función de transferencia de primer orden con un cero y retardo, representada por:

$$G(s) = k \frac{(\beta s + 1)}{(\tau s + 1)} e^{-t_r s}$$

- Función de transferencia de segundo orden con un cero y retardo, representada por:

$$G(s) = k \frac{(\beta s + 1)}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)} e^{-t_r s} \quad \text{ó} \quad G(s) = k \frac{(\beta s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} e^{-t_r s}$$

Aplicación...

cuyos parámetros se pueden fijar a través de cuadros de texto o barras de desplazamiento en el área de **Parámetros**, que incluye la representación simbólica de la función de transferencia escogida. La elección entre los posibles modelos se realiza marcando un botón de selección circular (*radiobutton*) que se ubica sobre la gráfica de Representación polo-cero (área inferior izquierda de la herramienta), en la que se muestran los polos y ceros del sistema seleccionado, mostrándose su localización en la esquina inferior izquierda de la herramienta cuando se coloca el ratón sobre ellos.

En la zona derecha de la herramienta se representan los diagramas de Magnitud Bode y Fase Bode, que contienen unas líneas de trazo fino en color negro (que corresponden a la respuesta en frecuencia obtenida a partir de datos experimentales) y otras en trazo grueso de color rojo que representan la respuesta en frecuencia del sistema que se postula como modelo más adecuado para reproducir la respuesta en frecuencia obtenida de datos experimentales. Ambos diagramas disponen de la posibilidad de realizar ampliaciones o reducciones de los fondos de escala del eje de ordenadas, pulsando con el puntero del ratón en la parte superior o inferior de los símbolos ∇ . En las dos gráficas aparece un aspa roja \times que se corresponde con la localización de la frecuencia de corte y que permite modificar su valor desplazándola hacia derecha o izquierda, de modo que se refrescan automáticamente sus valores en las áreas de **Parámetros** y Representación polo-cero. En el caso de sistemas de primer orden, el aspa roja representará la frecuencia de corte asociada al polo (y por tanto a la constante de tiempo), mientras que en el caso de sistemas de segundo orden, el aspa roja corresponderá a la frecuencia natural si el sistema es subamortiguado. Si el sistema es sobreamortiguado, se dibujan dos aspapas que representan las frecuencias esquina asociada a cada polo real. También se puede desplazar un círculo rojo \circ que se corresponde con la localización del cero del sistema y que permite modificar la ubicación del mismo, actualizándose los datos ligados en las otras partes de la herramienta. El cambio de la magnitud en baja frecuencia (y por tanto de la ganancia estática) se realiza en esta ficha arrastrando hacia arriba/abajo la línea de trazo grueso negra que aparece en la parte derecha de la curva Magnitud Bode. Cuando se cambian los valores de k y τ automáticamente se refrescan en este área la representación simbólica de la función de transferencia y las características frecuenciales, así como los datos que aparecen en el resto de representaciones gráficas.

Representación polo-cero: En la parte inferior izquierda se representa el plano s (o plano complejo), donde se muestra la localización del polo del sistema analizado (o la localización de los polos de los sistemas estudiados si se selecciona la opción de **Mostrar múltiples sistemas**), que permite analizar simultáneamente y de forma comparativa la respuesta frecuencial de distintos sistemas de primer orden (cada uno con un color asociado según la definición de colores de la Biblioteca explicada en el Capítulo 1). Como en fichas anteriores, el polo se representa por el símbolo \times que se puede arrastrar a cualquier posición del eje real del plano complejo.

El triángulo que aparece en la parte inferior permite cambiar la escala simultáneamente en los ejes de abscisas y ordenadas (pulsando a la izquierda del triángulo la escala aumenta y a la derecha se reduce).

Ejercicios

1. Escoja en el menú Opciones los Ejemplo 1, 2, 3 y 4. Ajuste lo mejor posible las dos posibles funciones de transferencia a los datos experimentales. Si no puede ajustar con dichos modelos todo el rango de frecuencias, indique el rango de validez de los mismos.

5

Relación de los parámetros de los modelos con los modelos físicos

Introducción

En el Capítulo 2 se utilizó el sistema de un tanque como ejemplo ilustrativo para exponer los conceptos relacionados con la obtención de modelos lineales a partir de ecuaciones diferenciales no lineales. En los Capítulos 3 y 4 se han desarrollado fichas interactivas para introducir conceptos básicos de respuesta temporal y frecuencial de sistemas lineales invariantes en el tiempo representados por funciones de transferencia.

Siguiendo con el ejemplo guía del tanque, en este capítulo se van a explorar las relaciones que guardan los parámetros de los modelos físicos de los sistemas con los de la función de transferencia normalizada que los representa, como una vía para explorar la influencia de los parámetros físicos en el comportamiento dinámico del sistema.

Se sigue utilizando por tanto la función de transferencia como modelo fundamental (descripción externa del sistema).

5.1 El sistema de un tanque II

Herramienta interactiva: [5.1. tanque_parámetros](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Obtención de la función de transferencia de un sistema dinámico linealizado en torno a un estado de equilibrio.
- Relación de los parámetros de la función de transferencia con los que describen la ecuación diferencial del modelo linealizado del sistema.
- Influencia en la respuesta temporal a escalón unitario de la modificación de los parámetros de la función de transferencia.

Teoría La mayoría de los sistemas dinámicos poseen un comportamiento que se puede representar por leyes físicas de naturaleza no lineal. Mediante un desarrollo en serie de Taylor alrededor de un

estado de equilibrio, se obtiene en general un modelo lineal dado por una ecuación diferencial lineal, que es posible representar mediante su descripción externa en forma de función de transferencia. De nuevo se va a considerar el sistema de control de nivel de un tanque [23, 21] para analizar la relación de los parámetros de los modelos con los modelos físicos.

El proceso está compuesto por un tanque de carga con orificio de salida o sección de descarga, al cual entra un caudal variable de agua mediante la acción de una bomba y viene descrito por la siguiente ecuación diferencial no lineal [23]:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q(t) - a\sqrt{2gh(t)} \quad (5.1)$$

donde $h(t)$ representa la altura del agua del tanque, A el área del tanque, a el área de la sección de salida, g la aceleración de la gravedad a nivel del mar y $q(t)$ el caudal de entrada.

Si se linealiza en torno a un punto de operación estacionario se obtiene el modelo lineal de primer orden de la forma:

$$\tau \frac{d\bar{h}(t)}{dt} + \bar{h}(t) = k\bar{q}(t) \quad (5.2)$$

donde $\tau = \frac{A}{a} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}$, $k = \frac{\tau}{A}$, $\bar{h}(t)$ es variable de desviación de altura respecto al punto de equilibrio y $\bar{q}(t)$ es la variable de desviación de caudal respecto al punto de equilibrio, siendo h_0 y q_0 la altura y caudal que definen dicho punto de equilibrio, respectivamente.

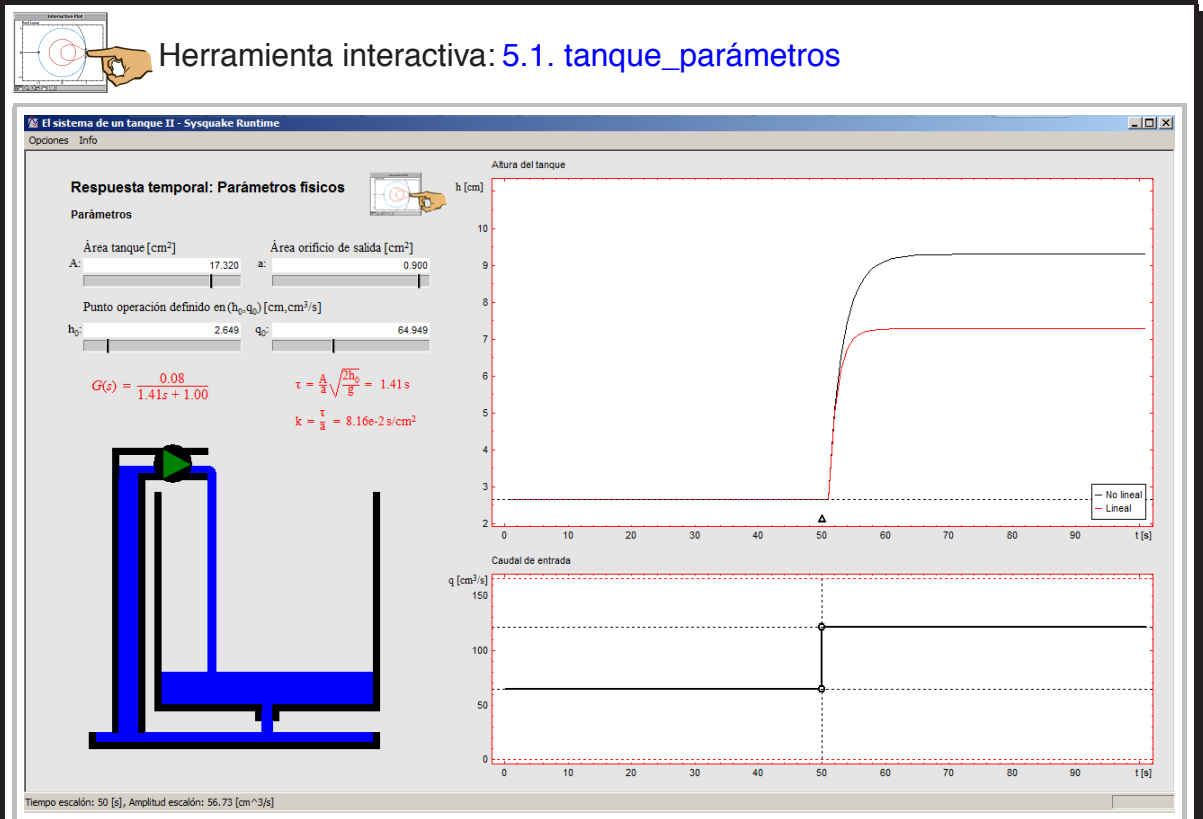
Aplicando la transformada de Laplace se deduce la función de transferencia, como el cociente entre la transformada de Laplace de la variable $\bar{h}(t)$ y la de la variable $\bar{q}(t)$:

$$G(s) = \frac{\bar{H}(s)}{\bar{Q}(s)} = \frac{k}{\tau s + 1} = \frac{\frac{1}{a} \sqrt{\frac{2h_0}{g}}}{\frac{A}{a} \sqrt{\frac{2h_0}{g}} s + 1} \quad (5.3)$$

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Ejercicio 4.2 páginas 126-127, 2008.
- [15] Golnaraghi, F. y B. C. Kuo. Automatic control systems. Novena edición. Marcel Dekker Inc., ISBN: 978-0470-04896-2. Páginas 5-7, 109, 184-187, 215-216, 242, 2010.
- [21] Guzmán, J. L., H. Vargas, J. Sánchez-Moreno, F. Rodríguez, M. Berenguel y S. Dormido. Distance Education Research Trends. Capítulo 6: Education research in engineering studies: Interactivity, virtual and remote labs. Nova Science Publishers Inc., ISBN: 1-60021-829-6. Páginas 131-167, 2007.
- [23] Johansson, K. H. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. IEEE Transactions on Control Systems Technology, páginas 456-465, 2000.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 2, sección 7, páginas 42-45 y 101-105, 2010.

Aplicación



Respuesta temporal: Parámetros físicos

En la aplicación descrita en la figura es posible comparar la respuesta temporal del sistema en lazo abierto obtenida con el modelo no lineal con la obtenida del sistema linealizado. También se muestra la función de transferencia de primer orden que lo describe, así como la relación entre los parámetros del sistema físico y los de la dicha función de transferencia (ganancia estática y constante de tiempo). La aplicación también permite realizar un análisis en diferentes puntos de equilibrio y con diferentes geometrías del tanque. Se obtiene así una información cuantitativa y cualitativa del intervalo de validez de estos modelos. Los parámetros del sistema se pueden cambiar mediante la interacción con la descripción geométrica del tanque.

En la parte superior izquierda de la aplicación es posible modificar los valores de las variables fundamentales que definen la dinámica del sistema: el ancho del tanque (A), el ancho del orificio de descarga (a) y las variables que definen el estado de equilibrio (h_0 , q_0). Se visualiza así mismo una representación simbólica de la función de transferencia que se modifica a medida que se manipulan los valores de los parámetros indicados previamente. También aparece la fórmula que relaciona a dichos parámetros con la ganancia estática (k) y la constante de tiempo (τ).

Hay que hacer notar que para obtener una aplicación realista se ha utilizado como unidad de longitud el cm y como unidad de tiempo el s.

Aplicación ...

Si se accede a las barras de desplazamiento (*sliders*) de h_0 o q_0 el valor de la variable ligada se modifica de acuerdo con la ecuación (2.6) y se produce un escalado interno de los intervalos en que se modifican dichas variables. También existe una ligadura entre los intervalos de A y a para que las simulaciones que aparecen en la imagen superior derecha tengan sentido físico.

En las imágenes del área derecha de la herramienta se compara la respuesta temporal del modelo lineal y la del sistema no lineal, como consecuencia de un cambio en el caudal de entrada de fluido que se representa en la imagen inferior derecha. Nótese que el valor base del cambio viene definido por q_0 , pudiéndose modificar en esta gráfica o bien en las barras de desplazamiento de la parte superior izquierda. Cuando se coloca el puntero del ratón sobre cualquier punto de las gráficas de evolución temporal de la altura o el caudal, se hace visible una etiqueta que proporciona las coordenadas (t, h) o (t, q) que definen ese punto en la gráfica correspondiente.

La aplicación presenta en la parte inferior izquierda un esquema del proceso a modelar. La figura es interactiva, en el sentido que se pueden modificar sus atributos haciendo uso del ratón. El área del depósito A se puede cambiar pinchando con el ratón sobre las paredes del mismo y arrastrando en dirección horizontal; el área del orificio de descarga a también se puede modificar arrastrando con el ratón las paredes del orificio (nótese que existe una limitación de valores mínimo y máximo para que la simulación tenga sentido físico y la gráfica se pueda representar en el espacio dejado a tal efecto). También se puede cambiar el punto de operación pinchando sobre la superficie de líquido y arrastrándola en dirección vertical. El caudal de equilibrio q_0 se puede modificar desplazando en la dirección vertical el nivel de líquido que hay en el tubo justo antes del codo que hay a la izquierda de la bomba.

Ejercicios Para un estado de equilibrio descrito por la configuración que sale por omisión al arrancar la herramienta ($q_0 = 112.870 \text{ cm}^3/\text{s}$, $h_0 = 8 \text{ cm}$, $A = 17.32 \text{ cm}^2$ y $a = 0.9 \text{ cm}^2$):

1. Obtenga un modelo lineal del sistema en lazo abierto midiendo sobre la gráfica de respuesta temporal del sistema no lineal la ganancia y constante de tiempo que definen un modelo lineal aproximado del sistema válido en ese punto de equilibrio. Compare los resultados con el modelo teórico linealizado, analizando las discrepancias. Comente los resultados. Vuelva a repetir el proceso cambiando la amplitud del escalón de entrada que se visualiza en la parte inferior derecha de la herramienta, llevando el valor final del caudal a $140 \text{ cm}^3/\text{s}$. ¿Cuáles son los nuevos valores de la ganancia estática y la constante de tiempo?, ¿difieren mucho de los primeros que ha calculado? En caso de respuesta afirmativa, indique posibles motivos.
2. Si cambia el caudal a $q_0 = 130 \text{ cm}^3/\text{s}$, indique cómo influye el cambio en el punto de equilibrio en la ganancia estática y la constante de tiempo del sistema. ¿Cuál es la nueva altura de equilibrio?
3. Repita el ejercicio anterior llevando el caudal a $q_0 = 90 \text{ cm}^3/\text{s}$.
4. Con los valores de las variables y parámetros del ejercicio anterior, cambie la sección del tanque a $A = 10 \text{ cm}^2$. Indique cómo afecta esa disminución en la sección del tanque a la ganancia estática y a la constante de tiempo del sistema. ¿Y si la aumenta hasta $A = 20 \text{ cm}^2$?
5. Para la configuración del ejercicio previo, indique cómo afecta un aumento en la sección de descarga $a = 1.1 \text{ cm}^2$ a la ganancia estática y a la constante de tiempo del sistema.

6

Sistemas en lazo cerrado y estabilidad

Introducción

En este capítulo se van a tratar conceptos básicos relacionados con la realimentación y su efecto sobre el comportamiento y estabilidad del sistema en lazo cerrado. Se incluyen cuatro fichas interactivas donde se estudian el método del lugar de las raíces, el criterio de estabilidad de Nyquist, los conceptos de márgenes de estabilidad relativos y la influencia del tiempo de retardo en la estabilidad. Se suponen conocimientos previos básicos sobre la transformada de Laplace y funciones de transferencia, que se pueden revisar en la introducción del Capítulo 3.

Los *sistemas de control* son una interconexión de componentes que forman una configuración del sistema que proporcionará una respuesta deseada [9]. Los sistemas de control en lazo abierto se comportan de forma adecuada sólo si el modelo de la planta es muy exacto, si los parámetros de la planta cambian de una determinada manera y si no hay perturbaciones externas. La presencia de alguno de estos factores requiere que los sistemas de control presenten lazos de realimentación.

La *realimentación* consiste en redirigir una cierta proporción de la señal de salida de un sistema hacia la entrada. Implica que dos o más sistemas dinámicos se conectan juntos de forma que cada sistema ejerce una influencia sobre el otro y sus dinámicas están fuertemente acopladas [2]. Un *sistema en lazo cerrado* utiliza una medida de la *señal de salida* y una comparación con la salida deseada (*referencia*) para generar una *señal de error* que es utilizada por el *controlador* para generar una *señal de control* que se aplica al *actuador*, que es el dispositivo que proporciona la potencia motriz al proceso [9]. Cuando la señal de referencia es constante (recibe el nombre de *set-point* en inglés) se suele decir que se está ante un problema de *regulación*, si bien en este texto no se hace distinción entre los términos control y regulación. Por otro lado, cuando se desea que la señal de salida siga un valor de referencia cambiante, se está ante un problema de seguimiento (o *tracking* en inglés).

El control se basa en el uso de algoritmos y realimentación en sistemas de ingeniería. En un lazo de control, la salida del sistema se hace pasar a través de una función de transferencia $H(s)$ situada en el lazo de realimentación y la salida de este bloque se lleva a la entrada del sistema. La Figura 6.1 muestra un lazo típico de realimentación. La función de transferencia $G(s)$ representa al *sistema*, $C(s)$ al *controlador*, $H(s)$ es la función de transferencia del lazo de realimentación (suele estar ligada al *sensor* y considerarse $H(s) = 1$, realimentación unitaria) y $F(s)$ es una función de transferencia que permite *filtrar la referencia* y dotar a la estructura del sistema de control de dos grados de libertad (en los cursos básicos de control se considera $F(s) = 1$). Las señales internas, de entrada y de salida del lazo son:

- $y(t), Y(s)$: Es la *salida del sistema* descrito por $G(s)$ (variable que se quiere controlar).
- $u(t), U(s)$: Es la *entrada al sistema*. Coincide con la *señal de control*, en sistemas en lazo cerrado sin

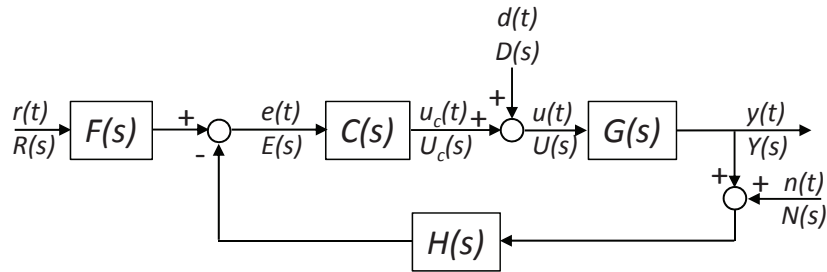


Figura 6.1 Diagrama de bloques estándar de un sistema en lazo cerrado. Si se considera realimentación unitaria $H(s) = 1$. Si no se usa filtro en la referencia $F(s) = 1$

perturbaciones de carga ($d(t) = 0$), pues la entrada la proporciona el controlador $C(s)$.

- $r(t), R(s)$: Es la *señal de referencia* o consigna que debe seguir el sistema en lazo cerrado.
- $e(t), E(s)$: Es la *señal de error*, resultado de comparar la referencia con la salida del sistema. Esta señal es la entrada al controlador $C(s)$.
- $d(t), D(s)$: Es la *perturbación de carga* a la entrada del sistema. Es una variable no controlable que afecta negativamente a la salida del sistema.
- $n(t), N(s)$: Es el *ruido* o perturbación generalmente asociado con los instrumentos de medida (sensores), que suelen provocar señales aleatorias de alta frecuencia.

Este esquema básico de realimentación basado en medir, calcular y actuar es el concepto central en el control de sistemas. En sistemas de control automático en lazo cerrado se suele utilizar normalmente *realimentación negativa*. La señal de salida se redirige hacia la entrada y se resta de la señal de referencia. Es el caso considerado en este libro, donde en todo momento se utilizará la realimentación negativa. En el caso de la *realimentación positiva*, la salida se suma con la referencia.

Las propiedades de la transformada de Laplace permiten trabajar de forma cómoda con los *diagramas de bloques* y realizar operaciones algebraicas sobre los mismos. En la Figura 6.2 se muestran las principales estructuras de diagrama de bloques utilizados en control, así como las operaciones que se pueden realizar sobre ellos usando *álgebra de bloques*.

Los aspectos claves en el diseño de sistemas de control son asegurar que el sistema en lazo cerrado es *estable* (entradas acotadas producen salidas acotadas) y que tienen un *comportamiento deseado* (buenas características de rechazo de perturbaciones, respuesta rápida a cambios en el punto de operación, ...) Estas propiedades se establecen a través de una gran variedad de técnicas de modelado y análisis que capturan la dinámica esencial del sistema y facilitan la exploración de posibles comportamientos en presencia de incertidumbre, ruido e incluso fallo de componentes. La incertidumbre entra en el lazo de control a través del ruido en los sensores y actuadores, perturbaciones externas y dinámicas inciertas que provienen de errores en los parámetros del modelo o efectos no modelados [2].

Utilizando las propiedades de la transformada de Laplace y de la función de transferencia (álgebra de bloques), se puede calcular la expresión de la salida en lazo cerrado como:

$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}N(s) \quad (6.1)$$

Si se define el *error de seguimiento* como $E(s) = R(s) - Y(s)$, se obtiene:

$$E(s) = \frac{1}{1 + C(s)G(s)}R(s) - \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s) + \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}N(s) \quad (6.2)$$

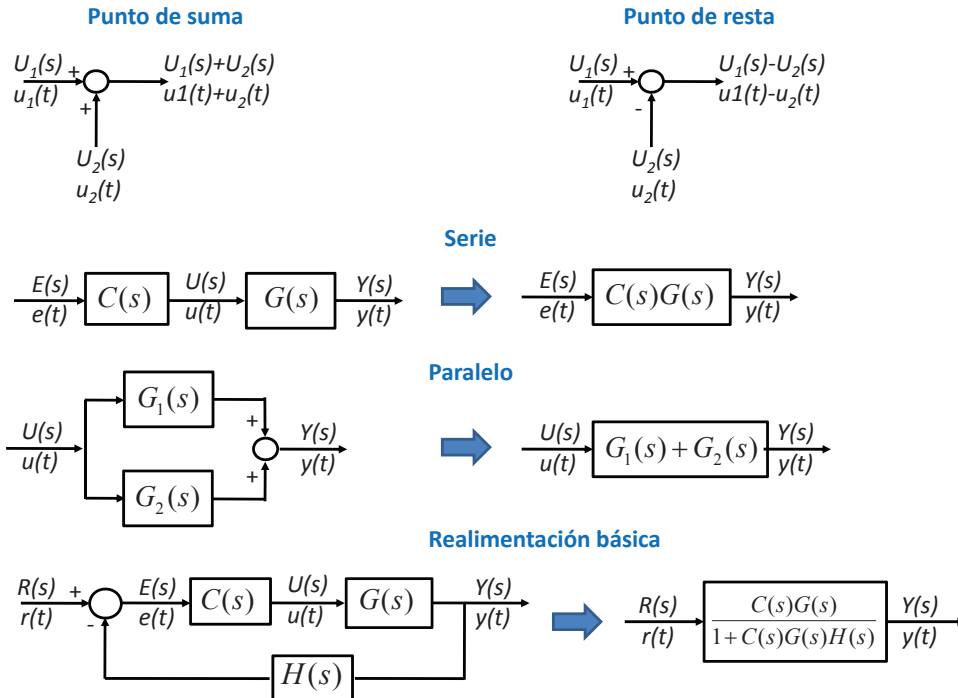


Figura 6.2 Estructuras y operaciones en álgebra de bloques

La salida del controlador vendrá dada por:

$$U(s) = \frac{C(s)}{1 + C(s)G(s)}(R(s) - N(s)) - \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s) \quad (6.3)$$

La función de transferencia de lazo cerrado $T(s)$ viene dada por:

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)} \quad (6.4)$$

Si se utilizara realimentación no unitaria y filtro en la referencia, la expresión sería:

$$T(s) = \frac{F(s)C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)} \quad (6.5)$$

Las principales ventajas de la realimentación son que proporciona robustez¹ frente a incertidumbre y permite modificar el comportamiento dinámico de un sistema (puede proporcionar un buen comportamiento a partir de malos componentes), permitiendo “crear” sistemas con una respuesta entrada-salida lineal. La realimentación permite reducir la *sensibilidad* de un sistema, entendida como la relación del cambio en la función de transferencia en lazo cerrado respecto al cambio en la función de transferencia del proceso (o parámetro) para un cambio incremental pequeño [9]. Los principales inconvenientes

¹Cualidad de un sistema de control que muestra poca sensibilidad a efectos que no fueron considerados en la fase de análisis y diseño del mismo, por ejemplo, perturbaciones, dinámicas no modeladas, ruido, ...

son que puede producir *inestabilidad* en un sistema si no se utiliza de forma adecuada, requiere un aumento de componentes (fundamentalmente sensores, que introducen ruido e imprecisiones en el lazo), aumentando la complejidad del sistema, e inherentemente acopla partes de un sistema. Otro *coste de la realimentación* es la pérdida de ganancia, puesto que al cerrar un lazo simple en torno a un sistema representado por la función de transferencia $G(s)$ se obtiene $G(s)/(1+G(s))$. La reducción de ganancia del lazo es $1/(1+G(s))$, que es el factor que reduce la sensibilidad del sistema frente a variaciones y perturbaciones de los parámetros [9] y por lo que se denomina *función de sensibilidad*.

La *estabilidad* es una medida del comportamiento del sistema. En el Capítulo 3, a través del análisis de la respuesta temporal a escalón de sistemas lineales invariantes en el tiempo, se estableció que un sistema es estable si todos los polos de la función de transferencia tienen partes reales negativas (denominados *sistemas asintóticamente estables*, pues la salida tiende a su valor de estado estacionario de forma asintótica). También se introdujo en la Sección 3.2 el concepto de sistemas marginalmente estables (únicamente algunas entradas limitadas hacen que la salida no esté acotada).

A partir de este capítulo, el interés se va a centrar en la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado, que son el principal objetivo del control automático (generalmente, un sistema en lazo cerrado inestable no tiene valor práctico). Por tanto, en el diseño de sistemas de control realimentados se buscará siempre que los polos de la ecuación característica ($J(s) = 1 + C(s)G(s) = 0$), se encuentren en el semiplano izquierdo del plano complejo. De forma más general, se hablará de estabilidad entrada acotada-salida acotada (estabilidad externa o estabilidad BIBO²), que significa que un sistema será estable si se obtiene una salida acotada cuando la entrada correspondiente está acotada. Los sistemas asintóticamente estables disfrutan también de la propiedad de estabilidad entrada acotada-salida acotada [7].

Existen numerosas definiciones de estabilidad, generalmente ligadas a la representación interna del sistema - representación en el espacio de estados- que se analizará en el Capítulo 9. En todas subyace la idea de que a medida que el tiempo tiende a infinito, la salida del sistema no puede tender a infinito.

La *estabilidad absoluta* es una descripción del sistema que revela si un sistema realimentado en lazo cerrado es estable o inestable, sin tener en consideración otros atributos como el grado de estabilidad. Un sistema que tenga estabilidad absoluta se denomina *estable* (la calificación de absoluto se suprime), pudiéndose caracterizar su grado de estabilidad. La *estabilidad relativa* proporciona una medida de cómo de estable es el sistema. Como una condición necesaria y suficiente para que un sistema realimentado sea estable (en sentido absoluto) es que todos los polos de su función de transferencia tengan partes reales negativas, la estabilidad relativa se puede analizar examinando las posiciones relativas de los polos (cuando se trabaja con representaciones en el plano complejo s , Sección 6.1) o con los denominados *márgenes de estabilidad relativa* (margen de fase y margen de ganancia), procedentes de una interpretación del criterio de estabilidad de Nyquist (Sección 6.2) cuando se trabaja con representaciones gráficas de la respuesta en frecuencia (Sección 6.3). También se habla de *estabilidad condicional* en el ámbito de sistemas con ganancia variable si el sistema es estable (en el sentido de estabilidad entrada acotada-salida acotada) para ciertos valores de la ganancia, pero no lo es para otros. Este concepto de estabilidad se analiza en la sección dedicada al método del lugar de las raíces (Sección 6.1). Utilizando la realimentación se pueden estabilizar plantas que son inestables en lazo abierto y tanto en ese caso como en el de plantas estables en lazo abierto, la realimentación permite ajustar un determinado comportamiento en lazo cerrado relacionado con las especificaciones de diseño.

En este capítulo se introducen distintas técnicas de análisis que permiten estudiar el efecto que sobre la estabilidad y el comportamiento dinámico del sistema produce la realimentación y la variación de la ganancia estática de la función de lazo del sistema (ganancia estática de la función $L(s) = C(s)G(s)$).

No se ha estudiado el conocido *Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz* porque el método es difícil de visualizar y trabajar con herramientas interactivas y además hoy en día los computadores pueden proporcionar las raíces de un polinomio de alto orden con precisión.

²BIBO: Bounded Input Bounded Output.

6.1 El lugar de las raíces

Herramienta interactiva: [6.1. lugar_raíces](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Realimentación y estabilidad de un sistema en lazo cerrado.
- Técnica del lugar de las raíces.
- Construcción del lugar de las raíces.
- Elementos característicos del lugar: Asíntotas, centroides y ramas del lugar.

Teoría La primera técnica relacionada con el concepto de realimentación que se va a estudiar es el *método del lugar de las raíces*, que sirve para examinar el efecto de la realimentación en la localización de los polos y los ceros del sistema en lazo cerrado cuando se varía desde 0 a ∞ un parámetro característico (generalmente la ganancia) del sistema en lazo abierto. El *lugar de las raíces* es el trazado de las raíces de la ecuación característica dibujado en el plano s (diagrama de polos y ceros) cuando se varía un parámetro del sistema [9]. Por tanto es una técnica en la que, partiendo de información sobre el sistema en lazo abierto, permite obtener información sobre la ubicación de los polos del lazo cerrado, y por tanto sobre el comportamiento dinámico del sistema realimentado y su estabilidad asintótica, relativa y condicional. En este ámbito, la *estabilidad relativa* está relacionada con el amortiguamiento relativo de cada raíz de la ecuación característica. La estabilidad relativa de un sistema es una propiedad que se puede relacionar con la posición relativa de la parte real de cada raíz o par de raíces. También se puede definir en función de los factores de amortiguamiento relativo ζ de cada par de raíces complejas y, por tanto, en función de la velocidad de respuesta y la sobreoscilación.

Como se ha comentado previamente, tradicionalmente, se estudia un sistema realimentado unitariamente con una configuración como la que se muestra en la Figura 6.3, donde K representa la ganancia proporcional de un controlador y $G(s)$ la función de transferencia del sistema en lazo abierto ($L(s) = KG(s)$ es la función de transferencia del lazo).

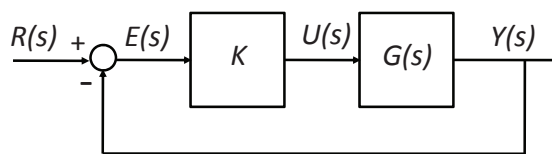


Figura 6.3 Diagrama de bloques utilizado para el análisis en el lugar de las raíces

En el método del lugar de las raíces se representan las raíces de la ecuación característica del sistema en lazo cerrado para todos los valores de un parámetro del sistema. Si se considera $G(s)$ factorizada en forma de polos y ceros:

$$G(s) = \kappa \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

donde κ es la constante de transferencia. El método se basa en expresar la función de transferencia del lazo cerrado de forma que la ecuación característica viene dada por:

$$1 + KG(s) = 0 \tag{6.6}$$

donde K es una constante proporcional situada en la cadena directa (Figura 6.3) y se ha supuesto que no existe tiempo de retardo³. Mediante el método del lugar de las raíces, se puede predecir el efecto que tiene en la localización de los polos de lazo cerrado variar el valor de la ganancia o añadir polos o ceros en lazo abierto. Si se expresa la ecuación característica de la siguiente manera:

$$1 + KG(s) = 1 + K \frac{\text{num}(G(s))}{\text{den}(G(s))} \rightarrow \text{den}(G(s)) + K \text{num}(G(s)) = 0$$

Para K pequeño ($K \rightarrow 0$) se debe cumplir $\text{den}(G(s)) = 0$, mientras que para K muy grande ($K \rightarrow \infty$), $K \text{num}(G(s)) = 0$, por lo que se puede deducir que el lugar de las raíces parte en los polos del sistema en lazo abierto y finaliza en los ceros del sistema en lazo cerrado (incluyendo ceros en el infinito). La ecuación (6.6) proporciona también las denominadas:

- Condición de magnitud: $|KG(s)| = 1$.
- Condición de ángulo: $\angle KG(s) = \pm 180^\circ(2l + 1)$, $l = 0, 1, 2, \dots$

Los valores de s que cumplen tanto las condiciones de ángulo como las de magnitud son las raíces de la ecuación característica (polos en lazo cerrado) y las reglas de construcción del lugar de las raíces se obtienen aplicando dichas condiciones a puntos de prueba en el plano complejo⁴.

Se resumen a continuación una serie de pasos para construir el lugar de las raíces. Más importante que el procedimiento de construcción⁵, es conocer los fundamentos teóricos e implicaciones que la construcción del lugar conlleva:

1. Escribir la ecuación característica en notación polos-ceros, de forma que el parámetro de interés K (el que se modifica para analizar su efecto en la localización de los polos en lazo cerrado) aparezca despejado en la forma $1 + KG(s) = 0$.
2. Colocar sobre el plano de polos y ceros (plano s) los polos (\times) y los ceros (\circ) de $G(s)$. El lugar comienza en los polos de $G(s)$ y finaliza en los ceros de $G(s)$, incluidos los ceros en el infinito.
3. Dibujar los *lugares geométricos en el eje real*, que son los que dejan a la izquierda un número impar de polos y ceros (salvo sistemas de fase no mínima, ganancias negativas, realimentaciones positivas, etc. en que cambia el criterio del ángulo en la construcción del lugar).
4. Dibujar $n - m$ *asíntotas* (rectas que representan lugares de las raíces para valores de s muy grandes), siendo n el número de polos ($p_i, i = 1..n$) de la función de transferencia $G(s)$ y m el número de ceros de la misma ($z_\ell, \ell = 1..m$). Las asíntotas se cruzan en el *centroide* q (ubicado sobre el eje real) y partirán con ángulos γ , siendo:

$$q = \frac{\sum_{i=1}^n p_i - \sum_{\ell=1}^m z_\ell}{n - m}; \quad \gamma = \frac{180^\circ(2l + 1)}{n - m}; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n - m - 1$$

5. Calcular los *puntos de salida y llegada al eje real* del lugar (*bifurcaciones*, puntos de ruptura o puntos de silla), que corresponden a puntos en el plano s en los cuales hay raíces múltiples de la ecuación característica. Los puntos de ruptura, que son puntos de confluencia y dispersión de ramas, se

³Existen variantes del método para sistemas con tiempo de retardo que no se tratan en este texto.

⁴Recuérdese que los ángulos de las cantidades complejas que se originan a partir de los polos y los ceros en lazo abierto para el punto de prueba s se miden en sentido contrario al de las agujas del reloj desde el eje real positivo.

⁵Se puede conocer la localización de los polos del lazo cerrado a través de un resolvidor numérico de raíces de un polinomio para distintos valores de K o bien usar herramientas interactivas como la que se muestra en esta ficha.

determinan a partir de las raíces de $dK/ds = 0$ (ecuación polinómica) y se debe comprobar que están sobre el lugar de las raíces y en ellos el valor de K es positivo. Dicho valor de K se obtiene de la aplicación del criterio del módulo evaluado en esas raíces.

- Determinar los *ángulos de partida (llegada)* del lugar de las raíces desde los polos complejos (hacia los ceros complejos). Si se selecciona un punto de prueba y se mueve en la cercanía precisa del polo complejo (o del cero complejo), se considera que no cambia la suma de las contribuciones angulares de los otros polos y ceros. Por tanto, el ángulo de llegada (o de salida) del lugar de las raíces de un polo complejo (o cero complejo) se encuentra restando a 180° la suma de todos los ángulos de vectores, desde todos los otros polos y ceros hasta el polo complejo (o cero complejo) en cuestión, incluyendo los signos apropiados:

- *Ángulo de partida de un polo complejo* $= 180^\circ - \sum_{i=1}^n \theta_i + \sum_{\ell=1}^m \vartheta_\ell$.

- *Ángulo de llegada a un cero complejo* $= 180^\circ - \sum_{\ell=1}^m \vartheta_\ell + \sum_{i=1}^n \theta_i$.

donde θ_i es el ángulo que forma con el eje real el vector que une el polo i con el polo complejo y ϑ_ℓ es el ángulo que forma con el eje real el vector que une el cero ℓ con el cero complejo.

- Determinar los *puntos de corte con el eje imaginario* (por ejemplo haciendo en la ecuación característica $s_0 = j\omega_0$ e igualando a cero tanto la parte real como la parte imaginaria). Se obtienen así los valores de K y ω para los que hay raíces del lazo cerrado sobre el eje imaginario.
- Asegurarse en el trazado de que el lugar de las raíces es *simétrico respecto al eje real*, dado que los polos y ceros complejos sólo aparecen en pares conjugados. El lugar de las raíces tendrá tantas *ramas* como raíces tenga la ecuación característica. El número de *lugares separados* del lugar geométrico de las raíces es igual al número de polos de la función de transferencia, suponiendo que el número de polos es mayor o igual que el número de ceros de la misma.
- Tomar algunos puntos de prueba y trazar el lugar definitivo. Se recomienda tomar algunos puntos de prueba en la cercanía del origen del plano s y en la parte cercana al eje $j\omega$, dada su importancia en la estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado:

$$K = \frac{\text{producto de las longitudes entre el punto } s \text{ y los polos}}{\text{producto de las longitudes entre el punto } s \text{ y los ceros}}$$

Es importante darse cuenta que para construir el lugar de las raíces se usan los polos, ceros y la ganancia del lazo abierto $KG(s)$ y no la función de transferencia en lazo cerrado. Este es uno de los aspectos de control clásico, que usa la función de transferencia en lazo abierto para predecir el comportamiento del lazo cerrado.

Puede haber ocasiones en que exista interés en analizar el caso de la localización de los polos del lazo cerrado cuando los posibles valores del parámetro son negativos. Una situación equivalente se da cuando existen lazos de realimentación positiva, donde la ecuación característica viene dada por $1 - KG(s) = 0$, que produce $KG(s) = 1$. Las variaciones acarreadas vienen dadas por la interpretación de la ecuación básica que aporta el lugar de las raíces. En este caso, el ángulo de $G(s)$ se hace 0 o múltiplo de 360° . Esto cambia las reglas 2 y 3 y todas aquellas reglas sujetas al criterio de ángulo. El lugar sobre el eje real ahora existe en aquellas zonas que dejan un número par de polos más ceros a la derecha.

También existen variantes del método para sistemas con tiempo de retardo. En esos casos, se suele utilizar una aproximación polinomial al término exponencial que representa el tiempo de retardo en el dominio de Laplace. La aproximación más conocida (comentada en el Capítulo 4) es la de Padé:

$$G(s) = e^{t_r s} \approx \frac{1 - s \frac{t_r}{2}}{1 + s \frac{t_r}{2}}$$

En esta ficha sólo se tratará el caso $K \geq 0$ y no se considerará la existencia de tiempos de retardo.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Capítulo 9, sección 2, ejercicio 9.5, página 275, 2008.
- [4] Barrientos, A., R. Sanz, F. Matía y E. Gamba. Control de sistemas continuos. Problemas resueltos. Mc Graw Hill, ISBN: 84-481-0605-9. Capítulo 7, sección 6, páginas 245-250, Capítulo 8, sección 1, páginas 271-289, 1996.
- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 12, páginas 325-343, 2009.
- [8] D'Azzo, J. J., C. H. Houpis y S. Sheldon. Linear control system analysis and design with Matlab. Marcel Dekker Inc., ISBN: 0-8247-4038-6. Capítulo 7, páginas 253-280, 2003.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN:84-205-4401-9. Capítulo 6, sección 1, páginas 312-316; Capítulo 7, páginas 347-348, 354-374, 409, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Pearson. ISBN:978-0-13-500150-9. Capítulo 5, páginas 238-266, 2010.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 6, páginas 269-394, 493-511, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 7, páginas 27-30, 1993.
- [36] Truxal, J. G. Automatic feedback control system synthesis. McGraw-Hill, ISBN: 978-00-7065-310-8. Páginas 212-219, 1955.

Aplicación...

Usando el editor de polos y ceros se puede configurar cualquier sistema (de fase mínima, no mínima, ...). Cuando se coloca el ratón sobre los polos y los ceros del lazo abierto, en la esquina inferior izquierda de la herramienta se visualiza su ubicación. Si se trata de polos o ceros complejos conjugados, a esa información básica se añade la de los ángulos de partida o llegada del lugar. En el caso de los polos del lazo cerrado, además de su localización se muestra el valor de la ganancia que lo produce. También se indica en la esquina inferior izquierda de la herramienta la posición de los centroides y puntos de bifurcación al colocar el ratón sobre los mismos. En el caso de los centroides, se añade también la de los ángulos de las asíntotas asociadas a los mismos.

La parte superior derecha de la herramienta representa en azul (color utilizado para representar la respuesta del sistema en lazo cerrado) la Respuesta temporal del sistema para la configuración de polos y ceros mostrada en la Representación polo-cero. La referencia se representa en trazo verde discontinuo. La gráfica inferior muestra la Señal de entrada al sistema (la generada a partir del error entre la referencia y la salida del sistema en lazo cerrado). En ambas gráficas, si se sitúa el ratón sobre las curvas temporales aparece el valor asociado al tiempo (t) y a la señal correspondiente (y,u). Los triángulos situados junto a los ejes de las gráficas habilitan la ampliación o reducción de escalas. Para el eje de abscisas hay que pulsar con el ratón a derecha o izquierda del símbolo. En el caso del eje de ordenadas, hay que pulsar arriba y abajo de los triángulos para el aumento o reducción de la escala.

El menú Opciones incluye por omisión cinco ejemplos con configuraciones iniciales típicas:

- Ejemplo 1: Representa un sistema de tercer orden con dos polos reales y un integrador. Es un caso muy típico para analizar los valores de la ganancia de lazo a partir de la cual las raíces del lazo cerrado cortan al eje imaginario y el sistema se hace inestable (estabilidad condicionada al valor de la ganancia). También es muy útil para analizar el concepto de polos dominantes, pues al aumentar la ganancia uno de los polos del sistema en lazo cerrado se aleja del eje imaginario y tiene cada vez menos influencia en la respuesta dinámica.
- Ejemplo 2: Tiene una estructura similar al anterior pero se incluye un cero en el numerador, de modo que una de las raíces del lazo cerrado alcanzará la localización de dicho cero para ganancias de lazo muy elevada. La inclusión del cero provoca también que dos de las asíntotas se encuentren en este caso en el semiplano derecho.
- Ejemplo 3: Representa un sistema de orden elevado con un integrador, un polo real, dos polos complejos conjugados y dos ceros reales. Para ganancias positivas se puede analizar que el sistema va a ser siempre estable y existirán dos polos complejos conjugados dominantes.
- Ejemplo 4: Muestra el caso de un sistema con dos ceros complejos conjugados en el semiplano izquierdo y dos polos complejos conjugados en el derecho (sistema inestable en lazo abierto). Es un ejemplo interesante para analizar cómo un sistema inestable en lazo abierto se puede estabilizar mediante un aumento de la ganancia del lazo (con ganancias positivas). También es útil para analizar el concepto de *estabilidad condicional*.
- Ejemplo 5: Representa un sistema de orden elevado dos polos reales, dos polos complejos conjugados y dos ceros complejos conjugados. Si el polo real menos dominante se aleja del eje imaginario, cambia la configuración de lugares separados del lugar de las raíces.

Además, en el menú Opciones se incluye la posibilidad de introducir funciones de transferencia genéricas en formatos polinomiales y polo-cero: Introducir Planta (NUM,DEN) e Introducir Planta ZPK.

Ejercicios

1. Seleccione el Ejemplo 1 ($P_8(s)$) del menú Opciones. Indique si existe algún valor de la ganancia que haga inestable al sistema en lazo cerrado (considere sólo el caso de ganancia positiva) y, en su caso, proporcione el valor de dicha ganancia. ¿Dónde está el centroide de las asíntotas y qué ángulos forman dichas asíntotas con el eje real positivo? Añada un cero real a la izquierda de los dos polos reales e indique si cambia la posición del punto de bifurcación. ¿Cuáles son en este caso los ángulos de las asíntotas? ¿En qué intervalo de valores de la ganancia K no hay polos complejos conjugados en el lazo cerrado?
2. Seleccione el Ejemplo 2 del menú Opciones, que representa el producto de las funciones $P_2(s)P_6(s)$ de la Tabla 1.2. Indique el valor de la ganancia de lazo que hace que el sistema se inestabilice. Determine el valor de dicha ganancia que provoca una sobreoscilación del 50% en la respuesta del lazo cerrado. ¿Cuál es el tiempo de pico? ¿De qué orden es el sistema en lazo cerrado? ¿Es apropiado usar la sobreoscilación y el tiempo de pico como características temporales de la respuesta del sistema en lazo cerrado? Calcule la localización del centroide, de los ángulos de las asíntotas y de los puntos de bifurcación.
3. Seleccione el Ejemplo 3 del menú Opciones ($P_{12}(s)P_6(s)$) Responda en este caso a las mismas preguntas formuladas en el ejercicio anterior.
4. Seleccione el Ejemplo 4 del menú Opciones. Analice si existe alguna posible ubicación de los ceros (en el eje real) que proporcione una respuesta sobreamortiguada en el sistema en lazo cerrado. Justifique la respuesta. Indique también una posible localización del cero más cercano al eje imaginario que hace que la asíntota sea el propio eje imaginario.
5. Seleccione el Ejemplo 5 del menú Opciones. Indique si existe algún valor de la ganancia de lazo que haga que el sistema en lazo cerrado sea inestable. ¿Se puede obtener para algún valor de la ganancia una respuesta sobreamortiguada? ¿Existe en este caso algún centroide o alguna bifurcación? Desplace los dos ceros complejos conjugados de forma que el polinomio del numerador de la función de transferencia sea aproximadamente $s^2 + 0.8s + 8$. Calcule el intervalo de valores de K que hacen que el sistema en lazo cerrado sea estable. Vuelva a la configuración original. Sitúe el polo que inicialmente está en $s = -2.05$ en $s = -4$. ¿Cuántos lugares separados tiene el lugar de las raíces? ¿Dónde se sitúa el centroide y el punto de bifurcación?
6. Seleccione el Ejemplo 5 del menú Opciones. Usando la configuración de polos y ceros inicial, realice un análisis de la estabilidad relativa del sistema en función de la localización de la parte real de las raíces de los polos y de su amortiguamiento. Señale los valores de la ganancia que desde su punto de vista producen que el sistema en lazo cerrado tenga una menor estabilidad relativa.
7. Seleccione un sistema con un polo en $s = -1$ y un cero en $s = 1$. ¿Existe algún valor de la ganancia que estabilice al sistema en lazo cerrado? ¿Qué tipo de respuesta temporal observa?
8. El despegue de un avión es inherentemente inestable y puede ser modelado por una función de transferencia $G(s)$. Para controlar el vehículo se utiliza un sistema de control con propulsores ajustable cuya función de transferencia viene dada por $C(s)$ (referencia [9], páginas 347-348):

$$G(s) = \frac{1}{s(s-1)} \quad C(s) = \frac{K(s+2)}{(s+10)}$$

La función de transferencia de lazo viene por tanto dada por $L(s) = C(s)G(s)$. Determine el intervalo de ganancia K para el cual el sistema es marginalmente estable y las raíces de la ecuación característica para el valor límite de K .

9. El sistema de control de un probador de suspensiones de un automóvil tiene una realimentación negativa unitaria sobre un proceso con función de transferencia (referencia [9], página 409):

$$L(s) = KG(s) = \frac{K(s^2 + 4s + 8)}{s^2(s + 4)}$$

Se desea que las raíces dominantes tengan una $\zeta = 0.5$. Calcule el valor de K y la posición de las raíces dominantes.

10. Seleccione un sistema que tenga un integrador, un polo en $s = -1$, un polo en $s = -2$ y un cero real (su posición inicial será $s = -4$). Analice las distintas formas del lugar de las raíces para $\kappa = 1$ y $K = 1$ en función de la posición del cero. Justifique si existe alguna ubicación del cero para la que se obtengan tres polos reales en lazo cerrado (respuesta sobreamortiguada).
11. Haciendo uso de la herramienta interactiva, analice el lugar de las raíces de los siguientes sistemas genéricos [36] cuya función de lazo $L(s) = KG(s)$ tenga la siguiente estructura (puede escoger el valor que desee de los parámetros) cuando se varía la ganancia K :

$$L_1(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$$

$$L_2(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$L_3(s) = \frac{K}{s}$$

$$L_4(s) = \frac{K}{s(\tau s + 1)}$$

$$L_5(s) = \frac{K}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$L_6(s) = \frac{K(\beta s + 1)}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$L_7(s) = \frac{K}{s^2}$$

$$L_8(s) = \frac{K}{s^2(\tau s + 1)}$$

$$L_9(s) = \frac{K(\beta s + 1)}{s^2(\tau s + 1)}$$

$$L_{10}(s) = \frac{K}{s^3}$$

$$L_{11}(s) = \frac{K(\beta s + 1)}{s^3}$$

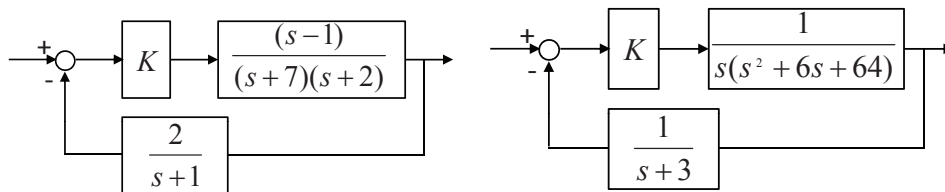
$$L_{12}(s) = \frac{K(\beta_1 s + 1)(\beta_2 s + 1)}{s^3}$$

$$L_{13}(s) = \frac{K(\beta s + 1)}{s^2(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$

$$L_{14}(s) = \frac{K}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)}$$

$$L_{15}(s) = \frac{K(\beta_1 s + 1)(\beta_2 s + 1)}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)(\tau_4 s + 1)}$$

12. Estudie la estabilidad de los sistemas de la figura cuando K varía entre 0 e ∞ (referencia [4], páginas 245-250 y 271-278):



13. Obtenga el lugar de las raíces para $K > 0$ y analice la estabilidad de los sistemas (referencias [2], página 275 y [4], páginas 279-289):

$$L(s) = \frac{K(s+6)^2}{s(s+1)^2} \quad L(s) = K \frac{(s+3)(s+2)}{(s+1)(s^2+2s+2)} \quad L(s) = \frac{2K(s+4)}{(s^2+2s+2)(s+2)(s+3)}$$

6.2 El criterio de Nyquist

Herramienta interactiva: 6.2. criterio_Nyquist

Conceptos analizados en la ficha

- Análisis de estabilidad en el dominio de la frecuencia.
- Criterio de estabilidad de Nyquist.

Teoría El criterio de estabilidad de Nyquist determina la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir de la respuesta en frecuencia del sistema en lazo abierto y de los polos y ceros en lazo abierto. Utiliza el diagrama de Nyquist como plano de representación (donde se muestra en el eje de ordenadas la parte imaginaria de la función de transferencia del sistema en lazo abierto ($\text{Im}(G(j\omega))$) y en el eje de abscisas la parte real ($\text{Re}(G(j\omega))$). Si se analiza la ecuación característica con realimentación unitaria:

$$J(s) = 1 + C(s)G(s) = 1 + L(s) = 0, \quad (6.7)$$

para que el sistema sea estable, todas las raíces de la ecuación característica deben estar en el semiplano izquierdo del plano s . El criterio de estabilidad de Nyquist permite determinar gráficamente la estabilidad de un sistema en lazo cerrado a partir de la curva de respuesta en frecuencia del lazo abierto, sin que sea necesario determinar los polos en lazo cerrado. El criterio se basa en el teorema de la transformación de contornos en el plano complejo (teorema de Cauchy de la teoría de la variable compleja). En concreto, como para garantizar la estabilidad se debe estar seguro de que todos los ceros (raíces) de $J(s)$ estén en la parte izquierda del plano s , se realiza una transformación de la parte derecha del plano s en el plano $J(s)$ (un contorno cerrado en el plano s da como resultado un contorno cerrado en el plano $J(s)$).

Teorema de Cauchy (principio del argumento): Si un contorno Γ_s en el plano s rodea Z ceros y P polos de $J(s)$ (considerada una multiplicidad de polos y ceros) y no pasa a través de ningún polo o cero de $J(s)$ cuando el recorrido es en la dirección del movimiento del reloj a lo largo del contorno, el contorno correspondiente Γ_J en el plano $J(s)$ rodea el origen de dicho plano $N = Z - P$ veces en la misma dirección. Obsérvese que un número positivo N indica que hay más ceros que polos en la función $J(s)$ y un número N negativo indica que hay más polos que ceros. El número P se determina fácilmente para $J(s)$ a partir de la función $L(s)$ (es el número de polos inestables de $L(s)$). Por tanto, si N se determina a partir de la gráfica de $J(s)$, será fácil determinar el número de ceros de $J(s)$ (polos de la función de transferencia en lazo cerrado) en el contorno cerrado en el plano s .

El teorema de Cauchy puede comprenderse mejor considerando $J(s)$ en términos del ángulo debido a cada polo y cero cuando el contorno Γ_s se recorre en la dirección del movimiento del reloj.

La aplicación del criterio de Nyquist consiste en que, para que un sistema sea estable, todos los ceros de $J(s)$ (polos del lazo cerrado) deben estar en la parte izquierda del plano s . Por eso, las raíces de un sistema estable (los ceros de $J(s)$) deben estar a la izquierda del eje $j\omega$ en el plano s . Se escoge un contorno Γ_s en el plano s que encierre toda la parte derecha del plano s y, usando el teorema de Cauchy, se determina si alguno de los ceros de $J(s)$ está situado dentro de Γ_s . El contorno Γ_s está formado por el eje $j\omega$ completo desde $\omega = -\infty$ a ∞ y una trayectoria semicircular de radio infinito en el semiplano derecho del plano s .

La aplicación del teorema de Cauchy conlleva dibujar Γ_J en el plano $J(s)$ y determinar el número N de rodeos del origen. Entonces el número de ceros de $J(s)$ dentro del contorno Γ_s (y por tanto ceros en el semiplano derecho de $J(s)$) es $Z = N + P$. Por esto, si $P = 0$, como es el caso habitual (si es distinto de cero implica polos del lazo abierto inestables), se deduce que el número de raíces inestables del sistema es igual a N , número de rodeos del origen del plano $J(s)$.

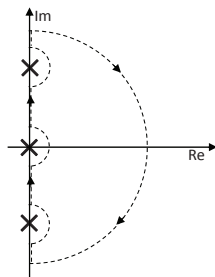
Como $L(s)$ se obtiene generalmente de forma factorizada, se define $\tilde{J}(s) = J(s) - 1 = L(s)$. En este caso, el número de rodeos del origen del plano $J(s)$ en el sentido del movimiento del reloj será igual al número de rodeos en el mismo sentido del punto crítico $(-1, 0j)$ en el plano $\tilde{J}(s) = L(s)$. Por tanto, se establece el *criterio de estabilidad de Nyquist* como [9]: “Un sistema realimentado es estable si, y solamente si, el contorno Γ_L en el plano $L(s)$ no rodea al punto $(-1, 0j)$ cuando el número de polos de $L(s)$ en la parte derecha del plano s es cero ($P = 0$)”.

Cuando el número de polos de $L(s)$ en la parte derecha del plano s es diferente de cero, el criterio de Nyquist es: “Un sistema de control realimentado es estable si, y solamente si, para el contorno Γ_L , el número de rodeos del punto $(-1, 0j)$ en el sentido contrario al movimiento del reloj es igual al número de polos de $L(s)$ con partes reales positivas”.

La base de los dos conceptos anteriores es el hecho de que, para la transformación de $\tilde{J}(s) = L(s)$, el número de raíces (o ceros) de $1 + L(s)$ en la parte derecha del plano s se representa por $Z = N + P$. Evidentemente, si el número de polos de $L(s)$ en la parte derecha del plano s es cero ($P = 0$), para un sistema estable se necesita que $N = 0$ y el contorno Γ_L no debe rodear el punto $(-1, 0j)$. Además, si P es diferente de cero, y para un sistema estable se necesita que $Z = 0$, entonces se debe tener $N = -P$, o P rodeos en el sentido contrario al movimiento del reloj.

Si el sistema en lazo abierto tiene integradores o polos sobre el eje imaginario, el contorno Γ_s se traza de forma que se evita el paso por estas singularidades introduciendo un pequeño semicírculo de radio $\epsilon \rightarrow 0$ que rodea a la singularidad en sentido contrario al de las agujas del reloj (el semicírculo se incluye en el semiplano derecho). En ese contorno $s = \epsilon e^{j\phi}$, donde ϕ varía desde -90° en $\omega = 0^-$ hasta $+90^\circ$ en $\omega = 0^+$. Los puntos correspondientes a $s = j0^+$ y $s = j0^-$ en el lugar geométrico de $L(s)$ en el plano $L(j\omega)$ son $-j\infty$ y $j\infty$ respectivamente. Cuando $L(s) = K/s$, se convierte en

$$L(\epsilon e^{j\phi}) = \frac{K}{\epsilon e^{j\phi}} = \frac{K}{\epsilon} e^{-j\phi}$$



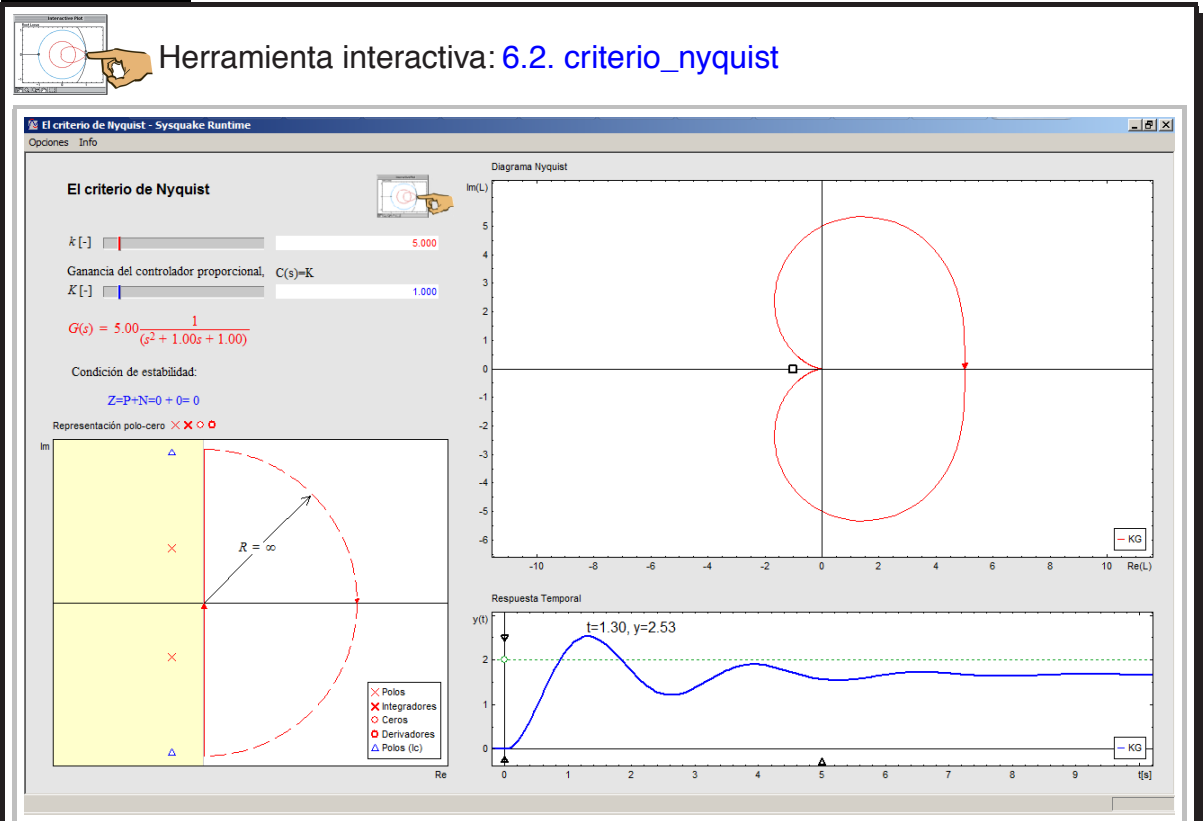
donde $K/\epsilon \rightarrow \infty$ cuando $\epsilon \rightarrow 0$ y $-\phi$ varía de 90° a -90° cuando el punto representativo s se mueve a lo largo del semicírculo [31]. Por tanto, los puntos $L(j0^-) = j\infty$ y $L(j0^+) = -j\infty$ se unen mediante un semicírculo de radio infinito en el semiplano derecho del plano $L(j\omega)$. Cuando $L(s)$ tiene un factor $1/s^N$, donde $N = 2, 3, \dots$, la gráfica de $L(s)$ tiene N semicírculos en el sentido de las agujas del reloj de radio infinito respecto al origen [31].

El *criterio de estabilidad de Nyquist* se generaliza de la siguiente manera [31]: “Si la función de transferencia de lazo $L(s)$ tiene P polos en el semiplano derecho del plano s , para que el sistema en lazo cerrado sea estable, el lugar geométrico de $L(j\omega)$ debe rodear P veces el punto $(-1, 0j)$ en sentido contrario al de las agujas del reloj, conforme un punto representativo de s se traza en la trayectoria de Nyquist modificada (teniendo en cuenta la posible existencia de polos y/o ceros de $L(s)$ sobre el eje $j\omega$) en el sentido de las agujas del reloj”.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Capítulo 9, sección 2, páginas 270-278, 2008.
- [4] Barrientos, A., R. Sanz, F. Matía y E. Gambao. Control de sistemas continuos. Problemas resueltos. Mc Graw Hill, ISBN: 84-481-0605-9. Capítulo 7, secciones 6 y 7, páginas 245-254, 1996.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN:84-205-4401-9. Capítulo 9, sección 3, páginas 504-515, 2005.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, sección 5, páginas 445-462, 2010.

Aplicación



El criterio de Nyquist

En esta herramienta interactiva, el área superior izquierda está dedicada al establecimiento de la ganancia estática k del sistema y a la ganancia proporcional del controlador K , que será el parámetro respecto al cual se realice el análisis de estabilidad. Los valores de ambos se pueden introducir haciendo uso de cuadros de texto y barras de desplazamiento y se han limitado en esta herramienta a valores positivos. Debajo se incluye una representación simbólica de la función de transferencia $G(s)$ y la fórmula que indica el cumplimiento del criterio $Z = P + N$, que se evalúa de forma automática.

Los polos y ceros de la función de transferencia se pueden introducir a través de las estructuras del menú Opciones, que incorpora las doce funciones de transferencia $P_1(s) \dots P_{12}(s)$ descritas en la Tabla 1.2, con parámetros arbitrarios, así como la posibilidad de incluir cualquier función de transferencia en formatos (NUM,DEN) y ZPK.

La Representación polo-cero está situada en la zona inferior izquierda de la herramienta. En ella se posicionan los polos y ceros de los sistemas seleccionados a través del menú Opciones. También se puede configurar la estructura de la función de transferencia utilizando el repositorio de polos y ceros situado junto al título de la gráfica ($\times \times \circ \circ$). Se pueden arrastrar los elementos dentro de la gráfica y situarlos en cualquier punto del plano complejo (lógicamente los integradores y los derivadores se colocarán en el origen del plano s).

Aplicación...

Los polos y ceros se podrán desplazar con el ratón, mostrándose su posición en la esquina inferior izquierda de la herramienta. Se pueden eliminar elementos dinámicos de la función de transferencia simplemente arrastrándolos de nuevo hacia el repositorio. También se dibujan en el plano s los polos de la función de transferencia de lazo cerrado (Δ). Esta figura incorpora una leyenda donde se indican los símbolos que se utilizan para representar los elementos dinámicos del sistema.

Como novedad respecto a otras fichas, en la Representación polo-cero se dibuja el contorno que engloba al semiplano derecho del plano s (semicírculo de radio infinito), que además contempla la posibilidad de existencia de polos y/o ceros en el eje $j\omega$ (y en el origen del plano s). Sobre el contorno se superpone un círculo negro (\circ) que se puede desplazar sobre el mismo haciendo uso del ratón y que tiene su correspondiente en el plano $L(j\omega)$, de forma que se visualiza directamente la transformación de un punto en el plano s a su correspondiente en el plano $L(j\omega)$.

El área superior derecha de la herramienta está ocupada por el Diagrama de Nyquist de $L(j\omega)$, en el que se representa la transformación Γ_L del contorno dibujado en el plano s . Sobre dicha transformación se sitúa el círculo de color negro que tiene su correspondencia con el definido para el plano s . El punto crítico $(-1, 0j)$ se resalta con un cuadrado de color negro.

Bajo la gráfica de Nyquist de $L(j\omega)$ se ha incluido la Respuesta temporal del sistema en lazo cerrado. Posicionando el puntero del ratón sobre cualquier punto de la misma se activa una etiqueta que muestra el tiempo y amplitud de la salida correspondientes al punto señalado. La referencia se puede cambiar desplazando verticalmente la línea de trazo discontinuo y color verde.

Ejercicios

1. Cuando en un sistema el lugar geométrico de $L(j\omega)$ pasa por el punto $(-1, 0j)$, ¿dónde se localizan los polos del sistema en lazo cerrado? Justifique la respuesta.
2. Seleccione del menú Opciones en la esquina superior izquierda de la herramienta las funciones de transferencia $P_1(s) \dots P_{12}(s)$ y analice mediante el criterio de Nyquist la estabilidad del lazo cerrado en función de la ganancia K , considerando que $L(s) = KG(s)$.
3. Estudiar por Nyquist la estabilidad de (referencia [4], páginas 251-254):

$$L(s) = K \frac{(s+4)}{s(s-2)}$$

4. Si $L(s) = G(s)$, analice usando la herramienta la estabilidad en lazo cerrado con realimentación unitaria de las siguientes funciones de transferencia:

$$G_1(s) = \frac{1}{(s+2)^2(s+1)} \quad G_2(s) = \frac{1}{(s+1)^4} \quad G_3(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$G_4(s) = \frac{(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad G_5(s) = \frac{(s-1)}{s(s-2)(s+2)} \quad G_6(s) = \frac{(s+1)^2}{s(s+2)^2}$$

5. Realice el mismo estudio con las siguientes funciones de transferencia ($L(s) = KG(s)$), calculando el intervalo de valores de K para los que el sistema en lazo cerrado es estable:

$$\begin{aligned}
L_1(s) &= \frac{K}{s-1} & L_2(s) &= \frac{K}{s(s-2)} & L_3(s) &= \frac{K(s+1)}{s(s-1)} & L_4(s) &= \frac{K(s-1)}{s(s+1)} \\
L_5(s) &= \frac{K}{s(s+1)^2} & L_6(s) &= \frac{K}{s(s^2+s+4)} & L_7(s) &= \frac{K(s-1)}{(s+2)^2} & L_8(s) &= \frac{K(s+2)}{s^2(s+4)} \\
L_9(s) &= \frac{K(s+1)}{(s-1)(s+2)} & L_{10}(s) &= \frac{K(s+3)^2}{s(s+0.5)^2} & L_{11}(s) &= \frac{K}{(s+1)^3} & L_{12}(s) &= \frac{K(s+1)}{s^2} \\
L_{13}(s) &= \frac{K(s+1)}{s^3} & L_{14}(s) &= \frac{K(s+1)^2}{s^3} & L_{15}(s) &= \frac{K}{(s-1)(s+2)(s-3)}
\end{aligned}$$

6. Considere un sistema realimentado con una función de transferencia de lazo dada por:

$$L(s) = \frac{K(s+7)^2}{s(s+1)^2}$$

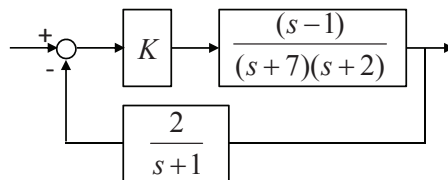
que es un ejemplo ligeramente modificado del presentado en la referencia [2], página 275. Calcule los valores de la ganancia K que hacen que el sistema en lazo cerrado sea estable. ¿Es un sistema condicionalmente estable? ¿Cuántas veces interseca la curva el eje real negativo?

7. La dinámica linealizada de un péndulo invertido se puede representar por la función de transferencia $G(s) = 1/(s^2 - 1)$, donde la entrada es la aceleración en la base y la salida es el ángulo que forma el péndulo con la vertical (ejemplo obtenido de la referencia [2], página 276). Se quiere estabilizar el péndulo con un controlador con función de transferencia $C(s) = K(s+2)$ que, como se verá en el Capítulo 7, corresponde con un control proporcional-derivativo. La función de transferencia de lazo con realimentación unitaria es:

$$L(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 - 1}$$

Aplique el criterio de estabilidad de Nyquist para determinar el intervalo de la ganancia proporcional del controlador que garantiza un sistema estable en lazo cerrado.

8. Estudie la estabilidad del sistema de la figura cuando K varía entre 0 e ∞ aplicando el criterio de Nyquist (referencia [4], páginas 245-250). Compare los resultados con los obtenidos aplicando el método del lugar de las raíces en la Sección 6.1 para el mismo sistema.



6.3 Diagramas de Bode: Margen de fase y margen de ganancia

Herramienta interactiva: 6.3. márgenes

Conceptos analizados en la ficha

- Márgenes de estabilidad relativa.
- Margen de fase.
- Margen de ganancia.
- Frecuencia de cruce de ganancia.
- Frecuencia de cruce de fase.

Teoría Debido a las *incertidumbres de modelado*⁶, en ocasiones no es suficiente que un sistema sea estable, sino que es necesario que también tenga buenos *márgenes de estabilidad* (entendidos como una medida relativa de la variación en la ganancia del sistema o en la fase que puede provocar que el sistema se haga inestable). Los sistemas estables con márgenes de estabilidad bajos sólo funcionan en teoría. Cuando se implantan en la realidad, son frecuentemente inestables. El modo en que la incertidumbre de modelado ha sido cuantificada en la teoría clásica de control es asumir que debido a errores de modelado puede haber cambios en la ganancia del sistema o en su fase (respecto a los considerados en el modelo). Típicamente, los sistemas se inestabilizan cuando sus ganancias exceden ciertos límites o hay mucho retraso de fase (esto es, fase negativa asociada a polos no modelados y tiempos de retardo). Estas tolerancias en la incertidumbre sobre la ganancia y la fase se denominan *margen de fase* y *margen de ganancia*. En esta sección se va a considerar que la función de transferencia del sistema se determina en forma normalizada de constantes de tiempo:

$$G(j\omega) = \frac{k \prod_{\ell=1}^q (\beta_{\ell} j\omega + 1) \prod_{\ell=1}^r \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_{n_{\ell}}} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_{\ell}}{\omega_{n_{\ell}}} \right) j\omega + 1 \right)}{(j\omega)^{\aleph} \prod_{i=1}^p (\tau_i j\omega + 1) \prod_{i=1}^h \left(\left(\frac{j\omega}{\omega_{n_i}} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_i}{\omega_{n_i}} \right) j\omega + 1 \right)} e^{-t_r j\omega}$$

Esta función de transferencia incluye q ceros reales, $2r$ ceros complejos conjugados (r pares de ceros complejos conjugados), \aleph polos en el origen, p polos en el eje real, $2h$ polos complejos conjugados (h pares de polos complejos conjugados) y un tiempo de retardo t_r . También se asume que el sistema está realimentado unitariamente y que la función de transferencia del lazo $L(s) = C(s)G(s) = KG(s)$, es decir, para explicar los conceptos se supondrá que el sistema representado por $G(s)$ tiene en serie un controlador proporcional K , de modo que la ganancia estática de $L(s)$ es Kk , siendo k la ganancia estática del sistema.

El criterio de estabilidad de Nyquist se define en términos del *punto crítico* $(-1, 0j)$ en la gráfica polar (que es el punto de 0 dB y -180° en los diagramas de Bode y Nichols). La proximidad del lugar geométrico de $L(j\omega)$ a este punto es una medida de la estabilidad relativa de un sistema.

Formalmente, se define el *margen de ganancia* de un sistema como el valor mínimo que se puede incrementar la ganancia del lazo abierto antes de que el sistema en lazo cerrado se haga inestable (en el diagrama de Nyquist, el margen de ganancia corresponde con el menor incremento en la ganancia que provoca que $L(j\omega)$ cruce el punto $(-1, 0j)$). Para sistemas cuya fase decrezca monótonamente con

⁶Diferencia que siempre existe entre la dinámica del proceso a controlar y la del modelo que lo describe.

la frecuencia empezando en 0° , el margen de ganancia se puede calcular en base a la mínima frecuencia en que la fase de $L(j\omega)$ es -180° (*frecuencia de cruce de fase*, ω_{cf}):

$$MG = \frac{1}{|L(j\omega_{cf})|} \quad (6.8)$$

También puede definirse como el aumento en la ganancia del sistema que producirá un sistema marginalmente estable con la intersección del punto $(-1, 0j)$ en el diagrama de Nyquist cuando la fase es -180° .

En el caso de sistemas de primer o segundo orden sin tiempo de retardo, el margen de ganancia es infinito porque los diagramas polares de tales sistemas no cortan al eje real negativo.

Se define el *margen de fase* como la cantidad de retraso de fase necesaria para que se alcance el límite de estabilidad definido por el punto $(-1, 0j)$ (es el menor cambio en la fase que provoca que $L(j\omega)$ pase por el punto $(-1, 0j)$). Se define la *frecuencia de cruce de ganancia* (ω_{cg}) como la mínima frecuencia para la cual la función de transferencia de lazo $L(j\omega)$ tiene ganancia 1 ($|L(j\omega)| = 1$). Para un sistema cuya ganancia decrece monótonamente con la frecuencia, el margen de fase viene dado por:

$$MF = 180^\circ + \angle L(j\omega_{cg}) = 180^\circ + \phi(j\omega_{cg})$$

Estos márgenes tienen una interpretación gráfica sencilla en el diagrama de Nyquist de la función de transferencia $L(j\omega)$ [2]. El *margen de ganancia* viene dado por la inversa de la distancia al punto donde la función de transferencia $L(j\omega)$ corta al eje real negativo. El *margen de fase* viene dado por el menor ángulo medido desde el punto $(-1, 0j)$ hasta el punto donde $L(j\omega)$ corta al *círculo unitario* (círculo centrado en el origen que pasa por el punto $(-1, 0j)$), tomándose como positivo en sentido contrario a las agujas del reloj. Esta interpretación es correcta siempre que la ganancia o la fase sean monótonas.

Los márgenes de estabilidad relativa se pueden medir en los diagramas de Bode de la función $L(s)$ siempre que ésta sea estable y de fase mínima (sin ceros o polos en el semiplano derecho). Los diagramas de Bode no suelen usarse para determinar la estabilidad en lazo cerrado de sistemas de fase no mínima, al no existir una correspondencia biunívoca entre las curvas de ganancia y fase. En estos diagramas, la *frecuencia de cruce de fase* (ω_{cf}) es aquella donde la fase es -180° , siendo el *margen de ganancia* el inverso de la ganancia a esa frecuencia. En términos de decibelios: $MG [dB] = -20 \log (|G(j\omega_{cf})|)$. Un margen de ganancia positivo en decibelios indica que el sistema es estable. Para sistemas de primer o segundo orden sin retardo, la curva de fase no corta -180° , por lo que el sistema en lazo cerrado tendrá un margen de ganancia infinito.

La *frecuencia de cruce de ganancia* ω_{cg} es la frecuencia donde la curva de ganancia corta la línea de 0 dB, siendo el *margen de fase* la fase correspondiente más 180° . Esta interpretación puede ser incorrecta si hay multiplicidad de frecuencias donde se produzcan cortes con las líneas de 0 dB o -180° (sistemas condicionalmente estables). Conviene que en la frecuencia de cruce de ganancia la pendiente de $L(j\omega_{cg})$ sea de -20 dB/década.

Un sistema estable de fase mínima es estable en lazo cerrado si sus márgenes de estabilidad son positivos. Por sí solos no aportan un indicador suficiente de estabilidad relativa, deben considerarse ambos. Para obtener comportamientos en lazo cerrado adecuados, en [31] se recomienda que el margen de fase se encuentre entre 30° y 60° y el margen de ganancia sea mayor que 6 dB [31] (entre 6 y 14 dB, [2]). Esta recomendación funciona habitualmente, aunque pueden existir casos de sistemas con buenos márgenes de fase y ganancia donde la estabilidad relativa es pobre⁷ (ver referencia [2], página 281).

La Figura 6.4 representa esquemáticamente los márgenes de estabilidad relativos para un sistema estable y un sistema inestable [31]. Como se observa, en el diagrama de Nichols también se puede realizar

⁷En esos casos en [2] se recomienda utilizar otro índice de estabilidad relativa denominado *margen de estabilidad*, que se define como la mínima distancia al punto crítico $(-1, 0j)$ desde cualquier punto de la curva de respuesta en frecuencia. Ese índice no se trata en este texto.

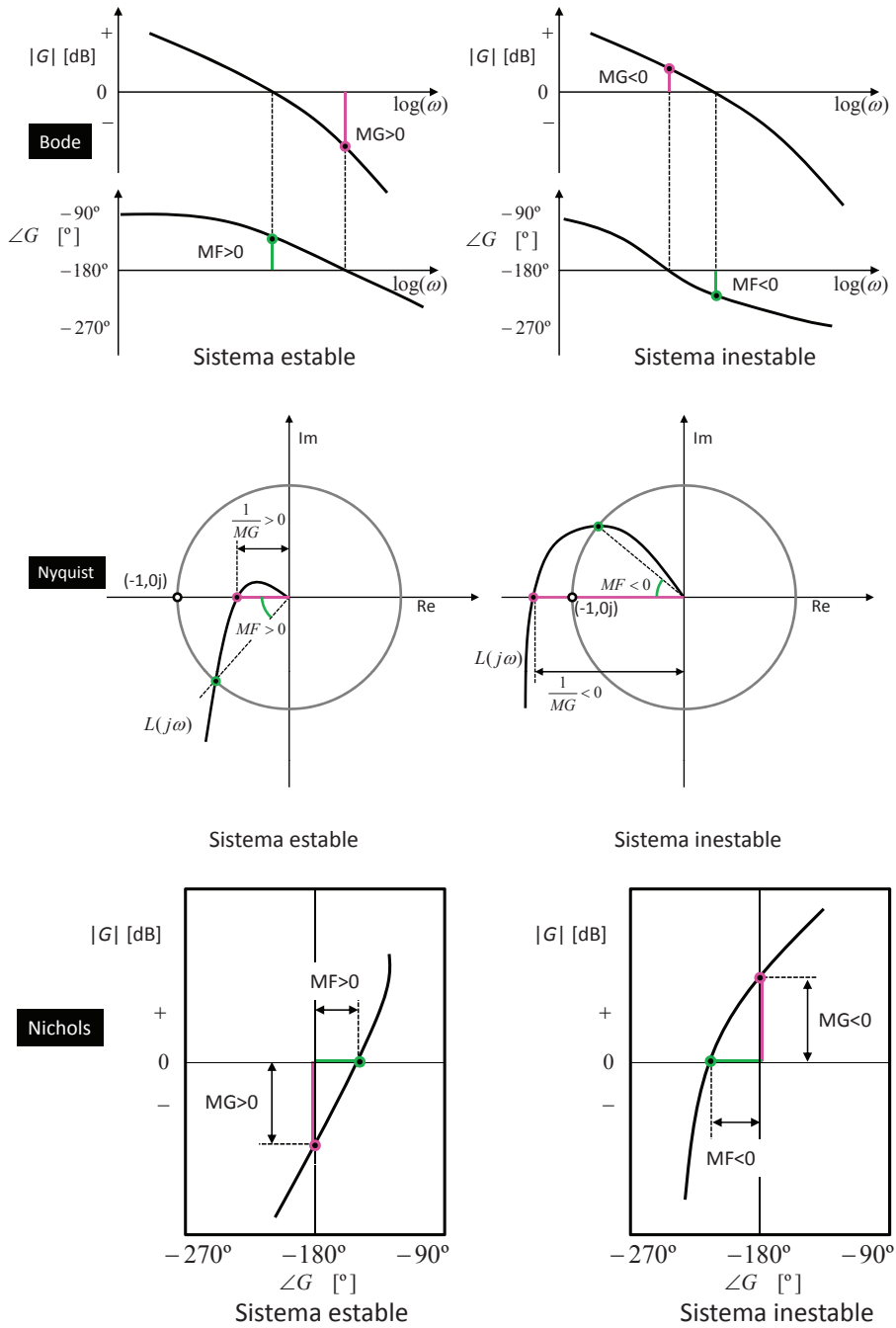


Figura 6.4 Márgenes de fase y de ganancia de sistemas estables e inestables

una interpretación geométrica de los márgenes de fase y ganancia, pues se definen en este caso como distancias al punto crítico (0 dB, -180°). El margen de ganancia se define como la distancia entre el punto en que $L(j\omega)$ corta a la línea vertical de -180° y el punto crítico (se mide sobre esa misma vertical).

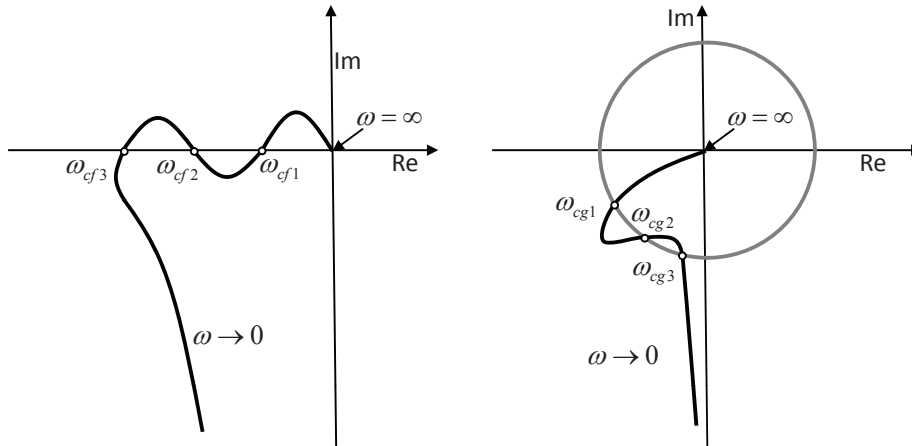


Figura 6.5 Diagramas polares de sistemas con varias frecuencias de cruce de fase o de ganancia

El margen de fase es la distancia entre el corte de la curva de $L(j\omega)$ con la horizontal de 0 dB y el punto crítico, medida sobre esa horizontal.

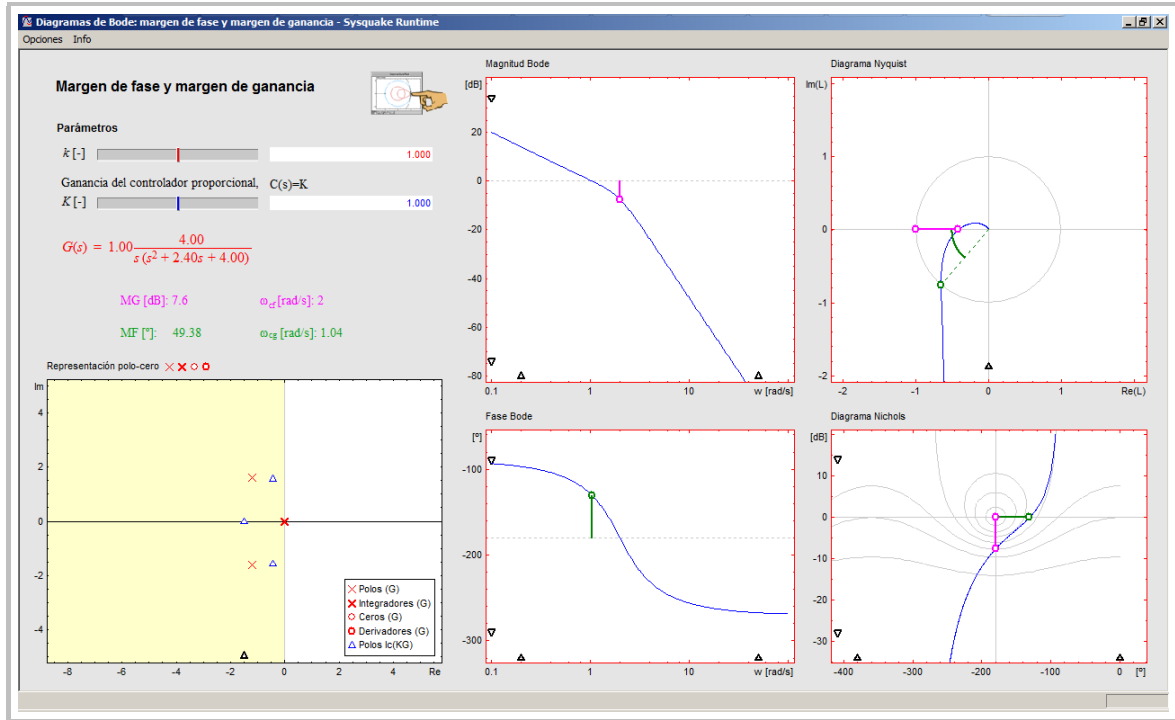
Para un sistema de fase no mínima donde $L(s)$ sea inestable, la condición de estabilidad no se satisface a menos que la gráfica $G(j\omega)$ rodee al punto $(-1, 0j)$. Por tanto, un sistema estable de fase no mínima tendrá márgenes de fase y ganancia negativos. Es importante indicar que los sistemas condicionalmente estables tienen dos o más frecuencias de cruce de fase y que algunos sistemas de orden superior pueden tener dos o más frecuencias de cruce de ganancia, tal como se muestra en la Figura 6.5. Para los sistemas estables que tengan dos o más frecuencias de cruce de ganancia, el margen de fase se mide en la frecuencia de cruce de ganancia más alta [31].

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Capítulo 9, sección 3, páginas 278-292, 2008.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN:84-205-4401-9. Capítulo 9, sección 4, páginas 516-522, 2005.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 0-8247-4038-6. Capítulo 7, sección 7, páginas 464-467, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 8, apartado 3 y Capítulo 7, sección 7, páginas 32-34, 210-213, 1993.

Aplicación

Herramienta interactiva: 6.3. márgenes



Margen de fase y margen de ganancia

En esta herramienta se analiza el concepto de margen de fase y margen de ganancia a través de ejemplos y en las distintas representaciones en el dominio de la frecuencia: Diagrama de Bode, Nyquist y Nichols. Aunque el tiempo de retardo tiene una influencia fundamental sobre estos márgenes de estabilidad relativa, en esta herramienta no se ha incorporado la opción de incluir tiempo de retardo en la función de transferencia que describe la dinámica de los sistemas estudiados, puesto que se ha desarrollado una herramienta específica para analizar las limitaciones del tiempo de retardo en los sistemas en lazo cerrado, que se explica en la siguiente sección.

La estructura dinámica de la función de transferencia se establece a través de la Representación polo-cero. Mediante el repositorio de polos y ceros situado junto al título de la gráfica (× × ○ ○), se pueden arrastrar los distintos elementos dinámicos sobre la gráfica y colocarlos en cualquier punto de plano s . Los integradores y derivadores lógicamente se situarán en el origen. Para extraer elementos basta con arrastrarlos con el ratón hacia el repositorio. Como se describirá más adelante, el menú Opciones permite inicializar la Representación polo-cero con distintas estructuras de funciones de transferencia. En la gráfica se dibujan también los polos de la función de transferencia del lazo cerrado Polos lc (KG), usando para ello un triángulo de color azul (△). Los ceros coinciden con los de la función de transferencia en lazo abierto. Una leyenda ubicada en la esquina inferior derecha de la gráfica representa los símbolos asociados a cada elemento dinámico.

Aplicación...

La ganancia estática k de $G(s)$ se puede modificar en la sección de **Parámetros**, junto a la del compensador proporcional K que se utiliza para ver la influencia de un término proporcional en la cadena directa del lazo de realimentación en los márgenes de estabilidad relativa del sistema en lazo cerrado. En ambos casos se han habilitado cuadros de texto y barras de desplazamiento.

Bajo esta representación se puede visualizar una representación simbólica de la función de transferencia $G(s)$ y los valores de:

- Margen de ganancia (MG) y frecuencia de cruce de fase asociada (ω_{cf}).
- Margen de fase (MF) y frecuencia de cruce de ganancia asociada (ω_{cg}).

El área derecha de la herramienta contiene las gráficas de las representaciones de la respuesta en frecuencia del sistema. En todas ellas, se representa en trazo continuo de color azul la respuesta en frecuencia del sistema $KG(s)$, identificándose los segmentos o arcos de ángulo que proporcionan el valor del margen de fase (MG) en color verde y los que delimitan el margen de ganancia (MG) en color magenta. Al no haber incluido el caso de sistemas con tiempo de retardo, la interactividad está únicamente asociada al margen de ganancia, pues se ha establecido una relación directa entre el mismo y la ganancia K del controlador proporcional. Por tanto, si en cualquiera de las representaciones frecuenciales se arrastra con el ratón el círculo de color magenta situado sobre la respuesta en frecuencia, automáticamente se modificará la ganancia K del compensador y los valores de los márgenes de estabilidad.

Todas las gráficas incorporan unos triángulos de color negro que se utilizan para cambiar las escalas en los ejes. Para cambiar el fondo de escala en el eje de abscisas hay que pulsar con el ratón a la derecha o la izquierda del símbolo. En los triángulos situados en el eje de ordenadas, hay que pulsar arriba y abajo de los mismos para el aumento o reducción de la escala.

El menú Opciones de esta herramienta incluye un listado con las doce funciones de transferencia $P_1(s)..P_{12}(s)$ descritas en la Tabla 1.2 del Capítulo 1, que facilitan al usuario el estudio de los márgenes de fase y ganancia de distintas estructuras de polos y ceros de la función de transferencia seleccionada. También se incluye la opción de incluir las funciones de transferencia en formatos (NUM,DEN) o ZPK.

Además de estas funciones, el citado menú incorpora la opción de elegir entre una Vista completa de todas las representaciones en el dominio de la frecuencia (Diagrama de Bode, Diagrama de Nyquist y Diagrama de Nichols), o bien sustituir el Diagrama de Nichols por la respuesta a escalón unitario en $t = 0$ en la referencia del sistema en lazo cerrado (opción Respuesta escalón):

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)},$$

no existiendo ningún elemento interactivo en esta gráfica.

Ejercicios

1. Vaya seleccionando uno a uno los ejemplos $P_1(s)$ hasta $P_{12}(s)$ incluidos en el menú Opciones de la herramienta. Para los valores de los parámetros que aparecen por omisión, dejando $k = 1$ y $K = 1$, calcule el MF y MG que tendrá el sistema realimentado unitariamente. Calcule el valor de K necesario para hacer inestable el sistema.
2. Usando el editor de polos y ceros, configure un sistema con $G(s) = k/s^n$. Para $n = 1...4$, indique los valores de su margen de fase y de ganancia. ¿Dependen esos valores de K ?
3. Sea el sistema:

$$L(s) = \frac{K(s^2 + 3s + 22)}{s(s+1)(s+2)}$$

Calcule los intervalos de K para los que el sistema es estable. Compare los resultados con los que alcanza con la herramienta [6.1. lugar_raíces](#).

4. Considerando que $L(s) = KG(s)$, para un valor de $K = 1$ calcule el valor del margen de fase y del margen de ganancia de los siguientes sistemas. ¿Qué sistema en lazo cerrado tiene mayor sobreoscilación? Indique el valor de K a partir del cual dichos sistemas se harían inestables:

$$L_1(s) = \frac{K}{(s+2)^2(s+1)} \quad L_2(s) = \frac{K}{(s+1)^4} \quad L_3(s) = \frac{K}{(s+1)(s+2)(s+3)(s+4)}$$

$$L_4(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)} \quad L_5(s) = \frac{K(s-1)}{s(s-2)(s+2)} \quad L_6(s) = \frac{K(s+1)^2}{s(s+2)^2}$$

5. Realice el mismo estudio del apartado anterior con las siguientes funciones de transferencia, calculando el intervalo de valores de K para los que el sistema en lazo cerrado es estable. Compare los resultados con los obtenidos en la ficha 6.2:

$$L_1(s) = \frac{K}{s-1} \quad L_2(s) = \frac{K}{s(s-2)} \quad L_3(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)} \quad L_4(s) = \frac{K(s-1)}{s(s+1)}$$

$$L_5(s) = \frac{K}{s(s+1)^2} \quad L_6(s) = \frac{K}{s(s^2+s+4)} \quad L_7(s) = \frac{K(s-1)}{(s+2)^2} \quad L_8(s) = \frac{K(s+2)}{s^2(s+4)}$$

$$L_9(s) = \frac{K(s+1)}{(s-1)(s+2)} \quad L_{10}(s) = \frac{K(s+3)^2}{s(s+0.5)^2} \quad L_{11}(s) = \frac{K}{(s+1)^3} \quad L_{12}(s) = \frac{K(s+1)}{s^2}$$

$$L_{13}(s) = \frac{K(s+1)}{s^3} \quad L_{14}(s) = \frac{K(s+1)^2}{s^3} \quad L_{15}(s) = \frac{K}{(s-1)(s+2)(s-3)}$$

6. Introduzca un sistema que tenga la función de transferencia:

$$L(s) = \frac{0.38(s^2 + 0.1s + 0.55)}{s(s+1)(s^2 + 0.06s + 0.5)} = \frac{0.38(s^2 + 0.1s + 0.55)}{(s^4 + 1.06s^3 + 0.56s^2 + 0.5s)}$$

procedente de la referencia [2], página 281. Calcule los márgenes de fase y de ganancia e indique si considera que el sistema tiene una buena estabilidad relativa. Muestre la respuesta a escalón del sistema en lazo cerrado. Es un ejemplo claro de sistema en el que se obtienen buenos valores de los márgenes de fase y de ganancia pero una baja estabilidad relativa, debido a que la curva del diagrama de Nyquist pasa muy cerca del punto $(-1, 0)$. ¿Puede determinar esta “baja” estabilidad relativa en el diagrama de Bode? Indique el valor de la ganancia K que produce el menor valor de estabilidad relativa.

6.4 Limitaciones impuestas por el tiempo de retardo en sistemas en lazo cerrado

Herramienta interactiva: [6.4. limitación_retardo](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Efecto del tiempo retardo en el lazo cerrado.
- Influencia del tiempo de retardo sobre la estabilidad.

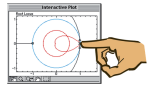
Teoría Los tiempos de retardo tienen una gran influencia en la estabilidad de los sistemas en lazo cerrado (generalmente negativa). A lo largo de este capítulo se han estudiado distintas técnicas de análisis de la estabilidad de sistemas realimentados, que toman como plano de representación tanto el diagrama de polos y ceros (método del lugar de las raíces) como los diagramas frecuenciales (criterio de estabilidad de Nyquist y márgenes de estabilidad relativos). Aunque se podría haber tratado en el apartado 6.3, se ha visto conveniente dedicar una ficha al análisis de estabilidad de sistemas en lazo cerrado con retardo, tomando como gráficos principales de representación el diagrama de Nyquist y las curvas de respuesta temporal de la entrada al sistema (señal de control) y la salida del mismo.

Un tiempo de retardo puro en forma de función de transferencia viene dado por $G(s) = e^{-t_r s}$. En el dominio frecuencial $G(j\omega) = e^{-j\omega t_r}$, que tiene módulo 1 y argumento $\angle(\omega t_r)$. Por tanto, los retardos puros no afectan a la curva de magnitud, pero introducen un desfase lineal con la frecuencia que tiende a inestabilizar el sistema. De hecho, para $\omega = 1/t_r$, un término de retardo puro introduce un desfase de -57.3° . Esta influencia, que a menudo no se tiene en cuenta en el diseño, puede provocar la inestabilidad en un sistema de control, al provocar márgenes de fase negativos.

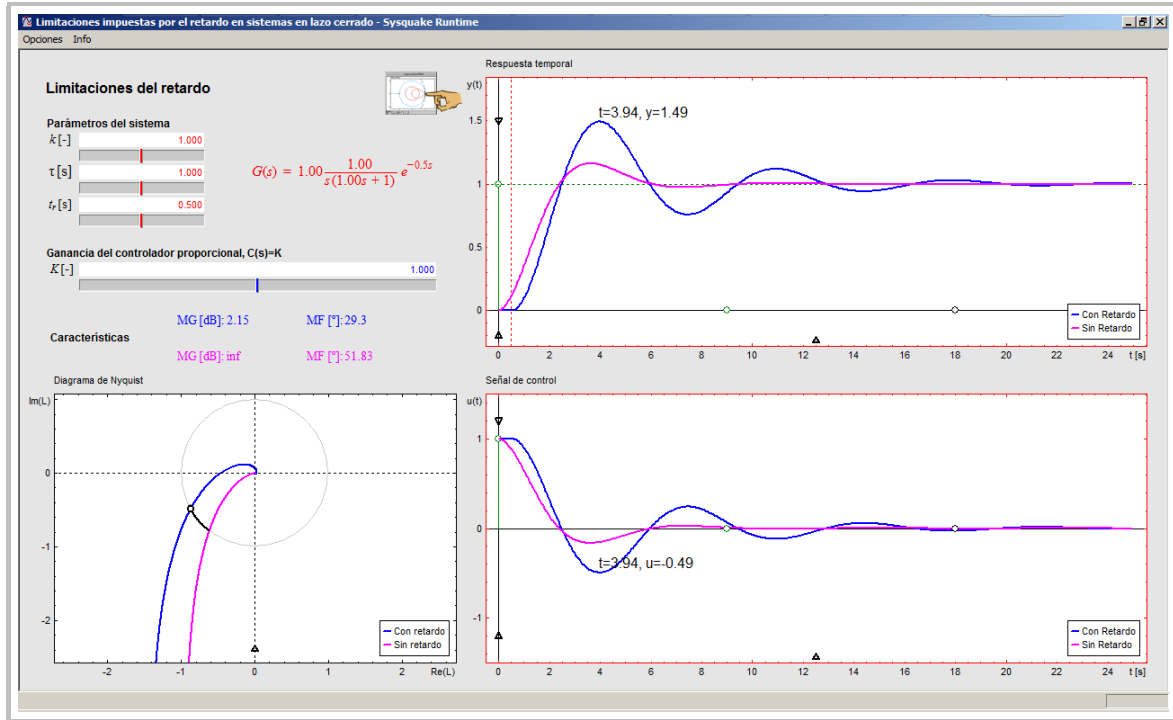
Bibliografía

- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN:84-205-4401-9. Capítulo 9, sección 7, páginas 530-534, 2005.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 4, sección 2, páginas 417-418, 2010.

Aplicación



Herramienta interactiva: 6.4. limitación_retardo



Limitaciones del retardo

En esta herramienta interactiva se utiliza una estructura fija de función de transferencia del sistema a analizar de la forma $G(s) = k \frac{1}{s(\tau s + 1)} e^{-t_r s}$, es decir, un sistema de segundo orden con un integrador y tiempo de retardo. El motivo de la elección es que constituye un sistema donde es muy fácil analizar de forma visual la influencia del tiempo de retardo sobre el lazo cerrado.

La parte superior de la herramienta incluye una sección donde se pueden introducir los **Parámetros del sistema** que, como se ha comentado, en este caso son la ganancia k , la constante de tiempo τ y el tiempo de retardo t_r de $G(s)$. Junto a los cuadros de texto y barras de desplazamiento que permiten modificar sus valores (codificados en color rojo), se visualiza la representación simbólica de la función de transferencia $G(s)$ en el mismo color.

Debajo de esta sección se incluye otra denominada **Ganancia del controlador proporcional, $C(s)=K$** . Esto es debido a que el análisis de la dinámica del lazo cerrado en presencia de retardo se va a realizar suponiendo que el sistema está realimentado unitariamente y la función de lazo es $L(s) = KG(s)$, donde K es la ganancia proporcional de un controlador $C(s)$. El valor de K se puede variar usando un cuadro de texto y una barra de desplazamiento representadas en color azul.

La sección de **Características**, situada debajo de la anterior, representa los valores numéricos del margen de fase (MF) y el margen de ganancia (MG) del sistema sin retardo (representado en magenta) y los correspondientes al sistema con tiempo de retardo (en color azul).

Aplicación...

La zona inferior izquierda de la herramienta está en este caso ocupada por el Diagrama de Nyquist de $L(s) = KG(s)$, donde se visualizan las respuestas en frecuencia del sistema sin retardo e incluyendo retardo, con los mismos colores que en la sección previa (la gráfica incluye una leyenda descriptiva). El único elemento interactivo en esta gráfica es un círculo de color negro \circ que al desplazarse modifica el valor del tiempo de retardo del sistema azul respecto al original sin retardo (magenta). Al desplazar ese punto se actualizan los valores de t_r en la sección de **Parámetros del sistema** y cambia su valor también en las respuestas temporales del sistema en lazo cerrado. El triángulo negro en el inferior de la gráfica facilita el cambio de escala cuando se pulsa con el ratón a izquierda o derecha del mismo.

La zona derecha de la herramienta está dedicada a las gráficas de la Respuesta temporal de los dos sistemas (con retardo y sin retardo), en la parte superior y la de la Señal de control en la parte inferior, incorporando también leyendas con los códigos de colores utilizados, así como triángulos asociados a los ejes de abscisas y ordenadas que permiten cambiar el fondo de escala (pulsando a derecha o izquierda en los del eje de abscisas y encima o debajo en los del eje de ordenadas).

En la curva de Respuesta temporal se ha incluido una línea vertical discontinua de color rojo, que al desplazarse a la derecha aumenta el valor del tiempo de retardo del sistema original, provocando la modificación de esta variable en las otras áreas de la herramienta ya explicadas previamente.

Sobre el eje de ordenadas hay un círculo verde, \circ , ligado a la línea horizontal discontinua del mismo color, cuya función es cambiar la amplitud del escalón en la referencia (desplazando verticalmente la línea o el círculo). De izquierda a derecha, sobre el eje de tiempos hay otros dos círculos (\circ , \circ), el primero de los cuales, al desplazarse verticalmente, determina la amplitud de la perturbación en forma de escalón en la carga (a la entrada del sistema), mientras que el segundo define la varianza de un ruido a la salida. En ambos casos, al desplazarse el círculo en la dirección vertical, hace visibles sendos círculos ligados al eje de tiempos, que se pueden desplazar horizontalmente para cambiar el instante en que se introduce la perturbación o el ruido, respectivamente. Cuando se coloca el ratón sobre estos círculos, la información asociada a los mismos (amplitud de la señal e instante de cambio) se visualizan en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

Cuando se posiciona el ratón sobre cualquier punto de las curvas en las gráficas, se hacen visibles unas etiquetas donde se muestra el instante y la variable (u o y) que representan a ese punto.

Ejercicios

1. Seleccione un valor de $t_r = 0$, $k = 1$, $\tau = 1$ y $K = 1$. Indique el valor del MF y MG para esta configuración de los parámetros. Aumente paulatinamente la ganancia proporcional K y determine el valor a partir del cual el sistema se hace inestable (puede comparar ese valor con el que obtendría haciendo uso del método del lugar de las raíces con la herramienta [6.1. lugar_raíces](#)). ¿Realmente existe ese valor?
2. Partiendo de la misma configuración que el ejercicio anterior y utilizando el círculo negro (\circ) que determina el corte de la gráfica de $KG(j\omega)$ con el círculo centrado en el origen que pasa por el punto $(-1, 0j)$, calcule el valor del tiempo de retardo a partir del cual el sistema se hace inestable en lazo cerrado. ¿Cuál es el valor del margen de fase y del margen de ganancia? ¿Se puede estabilizar el sistema de variando K ? Justifique la respuesta.
3. ¿Tiene t_r influencia sobre el margen de fase? Si t_r aumenta, ¿mejora o empeora el margen de fase?, ¿puede inestabilizarse el sistema?

7

Diseño de sistemas de control

Introducción

El control automático fundamenta sus bases esencialmente en el concepto de *realimentación*. Este concepto se concreta en una estructura de control en la cual el *controlador* se puede entender como un operador, que en función de la salida deseada (*referencia*) de la planta y la salida real medida, proporciona la *señal (acción) de control* a aplicar sobre el sistema.

En el Capítulo 6 se han abordado los conceptos básicos relacionados con los diagramas de bloques, lazos de realimentación y estabilidad del lazo cerrado, considerando que en la cadena directa únicamente se encuentra el sistema y una ganancia (controlador) proporcional. En este capítulo se van a tratar conceptos relacionados con técnicas de diseño de sistemas de control basadas tanto en el *dominio de la frecuencia* como en el *dominio del tiempo*, usando como *diagrama de bloques* básico el descrito en la Figura 6.1 del Capítulo 6.

El control automático de sistemas dinámicos tiene en general como objetivo que su evolución temporal siga unas pautas prefijadas por el diseñador, cuando se introduce a su entrada una determinada señal. Las señales de entrada al sistema pueden ser muy variadas, pero en el campo de la ingeniería de control se suelen usar ciertas entradas tipo en forma de impulso, escalón, rampa y parábola cuando se realiza un análisis en el dominio del tiempo y senoidales en el dominio de la frecuencia. Estas entradas se utilizan además para realizar comparaciones entre respuestas en lazo abierto de sistemas dinámicos o para analizar el cumplimiento de ciertas especificaciones de comportamiento de un determinado esquema de control.

Las técnicas basadas en el dominio del tiempo utilizan tradicionalmente *especificaciones* relacionadas con un comportamiento del *sistema en lazo cerrado* asimilable al de un *sistema de primero segundo orden*:

- Relacionadas con los *errores en estado estacionario*, a través de las *constantes de error estático* K_p , K_v y K_a que se definen en la Sección 7.1.
- Respuesta transitoria deseada, determinado generalmente por la posición de los *polos dominantes* en lazo cerrado. Si se desea imponer una dinámica correspondiente a un *sistema sobreamortiguado*, las especificaciones se suelen expresar en términos de constantes de tiempo (τ) o tiempos de subida (t_s). Si el sistema en lazo cerrado es *subamortiguado*, tradicionalmente las especificaciones se plantean en términos de *amortiguamiento (sobreooscilación máxima admitida)*, relacionada con el factor de amortiguamiento relativo (ζ) y de tiempos característicos de respuesta (*tiempo de subida* t_s , *tiempo de pico* t_p y *tiempo de establecimiento* t_e , que permiten obtener la *frecuencia natural no amortiguada* ω_n una vez conocido ζ). En ambos casos, lo que implícitamente se está haciendo es imponer la localización deseada de los polos dominantes del sistema en lazo cerrado.

Por otra parte, en los métodos clásicos de diseño basados en la *respuesta en frecuencia*, habitualmente se especifica el comportamiento de la *respuesta transitoria* de una forma indirecta, pues se hace en términos de:

- *Margen de fase (MF)*, *margen de ganancia (MG)* y *pico de resonancia (M_r)*: Estos parámetros ofrecen una estimación razonable del amortiguamiento del sistema.
- *Frecuencia de cruce de ganancia (ω_{cg})*, *frecuencia de resonancia (ω_r)* y *ancho de banda (AB)*: Dan una estimación de la velocidad de la respuesta transitoria.
- Constantes de error estático (K_p , K_v y K_a): Proporcionan la precisión en *estado estacionario*.

Aunque la correlación entre la respuesta transitoria y la respuesta frecuencial es aproximada, las especificaciones en el dominio de del tiempo se suelen cumplir adecuadamente en los métodos clásicos de diseño en el dominio de la frecuencia.

7.1 Errores en estado estacionario en sistemas de control con realimentación unitaria

Herramienta interactiva: 7.1. estado_estacionario

Conceptos analizados en la ficha

- Entrada en escalón, rampa y parábola unitarias.
- Error en estado o régimen estacionario.
- Tipo de un sistema.
- Constantes de error en estado estacionario.

Teoría En esta ficha se comienzan a tratar conceptos relacionados con el diseño de *sistemas en lazo cerrado con realimentación unitaria*. En concreto, se estudiarán *errores en estado estacionario* (o régimen estacionario) producidos por la incapacidad del sistema de seguir determinadas *señales de entrada de prueba* que se utilizan a menudo para el análisis de sistemas en lazo cerrado, como son el *escalón*, la *rampa* y la *parábola*. Cualquier entrada suele venir dada como combinación de las anteriores. Por error en estado estacionario en un sistema realimentado se entiende el error que existe entre la *referencia* y la *salida* cuando el sistema llega a un estado que no varía en el tiempo [9].

Como se verá a continuación, que un sistema realimentado unitariamente presente un error en estado estacionario para una entrada determinada depende del *tipo* de la *función de transferencia de la cadena directa* del sistema.

Considérese un sistema genérico descrito por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{k \prod_{\ell=1}^q (\beta_{\ell} s + 1) \prod_{\ell=1}^r \left(\left(\frac{s}{\omega_{n_{\ell}}} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_{\ell}}{\omega_{n_{\ell}}} \right) s + 1 \right)}{(s)^{\aleph} \prod_{i=1}^p (\tau_i s + 1) \prod_{i=1}^h \left(\left(\frac{s}{\omega_{n_i}} \right)^2 + \left(\frac{2\zeta_i}{\omega_{n_i}} \right) s + 1 \right)} \quad (7.1)$$

Dicho sistema incluye en su denominador el término s^{\aleph} , que representa un polo de multiplicidad \aleph en el origen (\aleph *integradores*). Un sistema se denomina de *tipo* ℓ si $\aleph = \ell$ (un sistema será de tipo 0, tipo 1 o tipo 2 si $\aleph=0$, $\aleph=1$ ó $\aleph=2$ respectivamente). A \aleph se le suele denominar también *número de tipo*. Nótese que no hay que confundir el concepto de tipo con el concepto de *orden* del sistema (este último viene dado por el grado del polinomio del denominador o *polinomio característico* del sistema).

A medida que se incrementa el tipo de un sistema aumenta la precisión del mismo en lazo cerrado, pero agrava el problema de la *estabilidad* (siempre es necesario encontrar una solución de compromiso entre precisión y *estabilidad relativa*).

Si se considera el sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria¹ representado en la Figura 7.1, la relación entre el *error* $e(t)$ ($E(s)$) y la *referencia* $r(t)$ ($R(s)$) viene dada por:

$$E(s) = \frac{1}{1 + KG(s)} R(s) \rightarrow e_{ee} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + KG(s)} \quad (7.2)$$

donde la expresión del *error en estado estacionario* e_{ee} se ha obtenido de la aplicación del *teorema del valor final* de la *transformada de Laplace*.

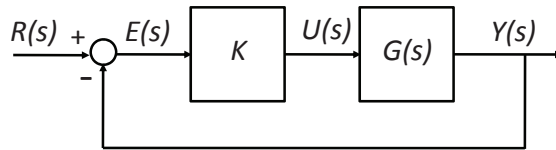


Figura 7.1 Sistema en lazo cerrado con realimentación unitaria

En el ámbito del análisis de los errores en estado estacionario de los sistemas realimentados unitariamente se denomina *error de posición* (e_{ee_p}) al error en estado estacionario de seguimiento de la referencia cuando ésta tiene forma de escalón, se usa el término *error de velocidad* (e_{ee_v}) para expresar el error en estado estacionario cuando la referencia es una rampa y *error de aceleración* (e_{ee_a}) cuando es una parábola. En los casos en que el sistema en lazo cerrado sea estable, se pueden definir las denominadas *constantes de error en estado estacionario* como sigue.

La *constante de error en estado estacionario en posición* (o constante de error de posición estática) K_p se define como $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} KG(s) = KG(0)$. Para el sistema representado en la figura, el error en estado estacionario (e_{ee_p}) para una entrada en escalón unitario viene dado por:

$$e_{ee_p} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s}{1 + KG(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1 + KG(0)} = \frac{1}{1 + K_p} \quad (7.3)$$

Nótese que para un sistema de tipo 0 cuya función de transferencia se represente en forma normalizada de constantes de tiempo, $K_p = Kk$ y por tanto $e_{ee_p} = 1/(1 + Kk)$ y para un sistema tipo 1 o superior $K_p = \infty$ ($e_{ee_p} = 0$). Esto implica que la respuesta de un sistema realimentado unitariamente cuando se introduce una referencia en forma de escalón tendrá un error en estado estacionario si no existe un integrador en la cadena directa (en el controlador o en la planta, cuyo producto se representa aquí mediante la función $KG(s)$ porque se está considerando únicamente una *acción proporcional* de control). A medida que aumenta la ganancia estática de la cadena directa, disminuye el error en estado estacionario, pero será difícil en algunos casos obtener una estabilidad relativa razonable y las señales de control alcanzarán valores no realizables físicamente. Si se desea que el error en estado estacionario sea nulo cuando la entrada tiene forma de escalón, el tipo del sistema debe ser 1 o mayor.

La *constante de error en estado estacionario en velocidad* (o constante de error de velocidad estática) K_v se define como $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sKG(s)$ para el sistema de la Figura 7.1. Siguiendo el mismo procedimiento anterior, el error en estado estacionario para una entrada en rampa unitaria de pendiente uno $R(s) = 1/s^2$ vendrá dado por $e_{ee_v} = 1/K_v$. Se emplea el término *error de velocidad* para expresar el error en estado estacionario para una entrada en rampa (se trata de un error en la posición debido a una entrada en rampa). Para un sistema tipo 0, $K_v = 0$ y por tanto $e_{ee_v} = \infty$. Para un sistema tipo 1, $K_v = KG(0)$ y $e_{ee_v} = 1/Kk$. Si el tipo es superior a 2, $K_v = \infty$ y $e_{ee_v} = 0$.

La *constante de error en estado estacionario en aceleración* (o constante de error de aceleración estática) K_a se define como $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2KG(s)$. Se puede seguir el mismo desarrollo que en los dos casos anteriores, alcanzándose como resumen los resultados que se muestran en la Tabla 7.1. Como se puede observar, los sistemas tipo 2 no tienen error en estado estacionario cuando la entrada es un escalón o una rampa, presentando un error constante cuando la entrada es una parábola. Los sistemas tipo 0 y 1 son incapaces de seguir una entrada en parábola en estado estacionario.

¹No se trata en esta ficha el caso de realimentación no unitaria, que se puede estudiar por ejemplo en la referencia [9], sección 5.8, páginas 265-267.

	Entrada escalón unitario $r(t) = 1; R(s) = \frac{1}{s}$	Entrada rampa unitaria $r(t) = t; R(s) = \frac{1}{s^2}$	Entrada parábola unitaria $r(t) = \frac{1}{2}t^2; R(s) = \frac{1}{s^3}$
Sistema tipo 0	$\frac{1}{1 + Kk}$	∞	∞
Sistema tipo 1	0	$\frac{1}{Kk}$	∞
Sistema tipo 2	0	0	$\frac{1}{Kk}$

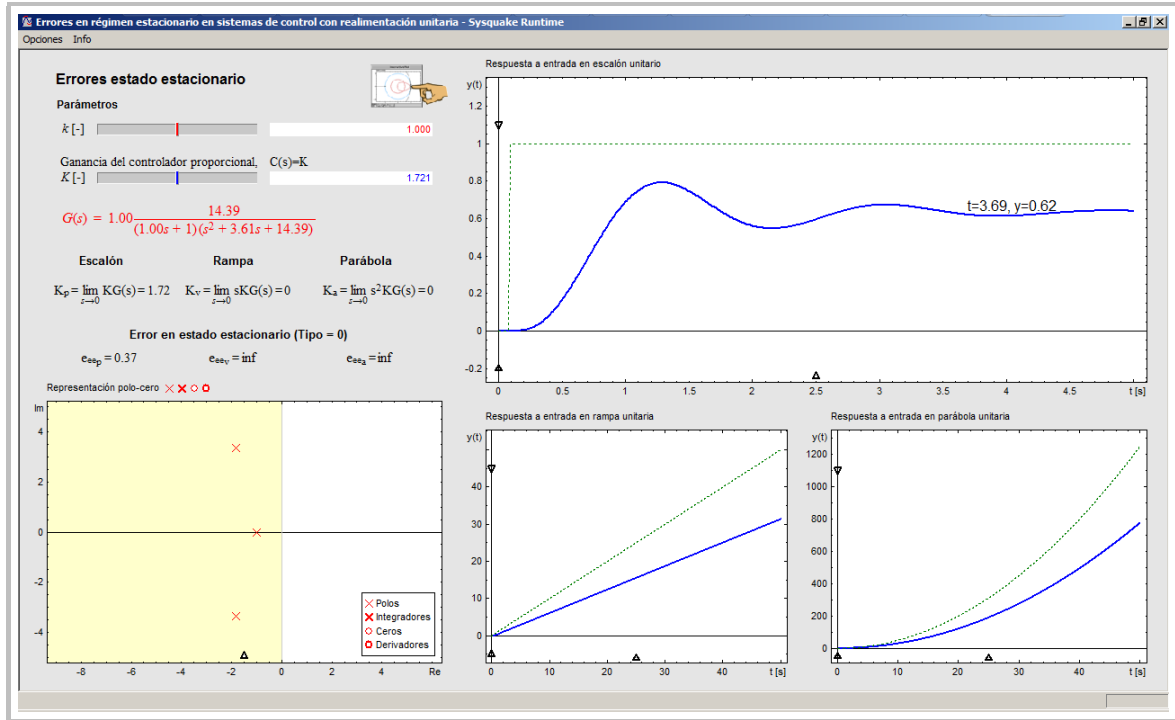
Tabla 7.1 Errores en régimen permanente a entradas típicas

Bibliografía

- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima Edición. Pearson Prentice Hall. ISBN: 84-205-4401-9. Capítulo 5, sección 8, páginas 265-267, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Sexta Edición. Pearson. ISBN: 978-0-13-500150-9. Capítulo 4, sección 2, páginas 196-200, 2010.
- [15] Golnaraghi, F. y B. C. Kuo. Automatic control systems. Novena edición. Marcel Dekker Inc., ISBN: 978-0470-04896-2. Capítulo 5, sección 4, páginas 258-272, 242, 2010.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 5, sección 8, páginas 225-230, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 1, sección 6, apartado 3, páginas 24-26, 1993.

Aplicación

Herramienta interactiva: 7.1. estado_estacionario



Errores estado estacionario

El objetivo principal de esta ficha es analizar los errores en estado estacionario de sistemas de control realimentados unitariamente cuando se introducen distintas entradas de prueba en la referencia. La aplicación está dividida en tres áreas principales:

El área superior izquierda, como es habitual, está reservada para información textual, relacionada en este caso con los parámetros del sistema en lazo abierto y las constantes de error. De arriba hacia abajo, la primera información que se presenta es la ganancia estática de la función de transferencia en lazo abierto $G(s)$, modificable tanto a través de un cuadro de texto como de una barra de desplazamiento. Bajo estos valores se sitúa la representación simbólica de la función de transferencia en color rojo. También está accesible un cuadro de texto y una barra de desplazamiento para facilitar la modificación del valor de la constante K del controlador proporcional representado en la Figura 7.1, existiendo por tanto dos vías (k y K) para aumentar o reducir los valores de error en régimen permanente cuando éstos sean distintos de cero e infinito.

El resto de este área se ocupa con las fórmulas y los resultados de evaluación de las mismas de las constantes K_p , K_v y K_a , indicándose en todo momento el tipo del sistema, la entrada correspondiente y los errores de posición (e_{ee_p}), velocidad (e_{ee_v}) y aceleración (e_{ee_a}).

Aplicación

La zona inferior izquierda la ocupa la Representación polo-cero, donde se posicionan los polos (\times), ceros (\circ), integradores (\times) y derivadores (\circ) del sistema en lazo abierto cuyo comportamiento en lazo cerrado con realimentación unitaria en estado estacionario se está analizando. En dicho diagrama se pueden arrastrar todos los elementos dinámicos relacionados, teniendo especial importancia en esta ficha los integradores, que definen el tipo del sistema. Cuando se coloca el ratón sobre cualquier elemento dinámico, su posición se indica en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

La parte derecha de la herramienta está dedicada al análisis gráfico de las respuestas en lazo cerrado a escalón, rampa y parábola unitarias (que se representan mediante líneas punteadas de color verde). Cuando se posiciona el ratón sobre las curvas de entrada y salida, se hace visible una etiqueta que proporciona los valores del tiempo y la variable ($r(t)$, $y(t)$) asociada a ese punto.

Todas las gráficas cuentan con triángulos de color negro que facilitan el cambio de escala pulsando a derecha o izquierda en los situados en el eje de ordenadas y por encima o por debajo de ellos en los del eje de ordenadas.

El menú Opciones incorpora en este caso las doce funciones de transferencia que se usan como base de ejemplos en distintas aplicaciones (ver Tabla 1.2). Esas funciones de transferencia simplemente proporcionan distintas estructuras de sistemas, que se pueden variar mediante desplazamiento, adición o sustracción de elementos dinámicos sobre la gráfica de Representación polo-cero. También se incluye la opción de incluir las funciones de transferencia en formatos (NUM,DEN) o ZPK.

Ejercicios

1. Seleccione la función de transferencia $P_2(s)$ del menú Opciones. Considere que $K = 1$. Indique los valores que se obtienen de K_p , K_v y K_a , así como de e_{ee_p} , e_{ee_v} y e_{ee_a} . Repita el análisis para $K=5$ y $K=10$, anotando los resultados. Comente los resultados. Para un valor de $K=5$ y $k = 1$, repita el análisis para $\tau = 5$ y $\tau=0.1$ s. Comente los resultados. ¿Para qué valor de K se obtiene un error de posición prácticamente nulo? ¿Se podría por tanto utilizar siempre un valor alto de K para eliminar los errores en estado estacionario? Analice los posibles inconvenientes de esa elección.
2. Repita el análisis realizado en el ejercicio anterior seleccionando consecutivamente todas las funciones de transferencia de tipo cero del menú Opciones. Modifique los valores de la ganancia K y de los elementos dinámicos (constantes de tiempo ceros, factores de amortiguamiento, ...).
3. Utilizando la función de transferencia $P_{11}(s)$ del menú Opciones, indique los valores que se obtienen de K_p , K_v y K_a , así como de e_{ee_p} , e_{ee_v} y e_{ee_a} . Repita el análisis para $K=5$ y $K=10$, anotando y comentando los resultados, e indicando los valores de sobreoscilación, tiempo de subida y tiempo de pico que se obtienen en cada caso en la respuesta a escalón. ¿Qué ocurre cuando $K = 5$ si aleja el polo real del eje imaginario? Justifique los resultados. Cuando el polo real está situado en $s = -2$, calcule el intervalo de valores de K para los que el sistema es estable y aquéllos en los que es inestable. ¿Se trata de un sistema condicionalmente estable? En los casos en que muestra comportamiento inestable, ¿cómo justifica que el error en régimen permanente a entrada en escalón unitario siga siendo finito?
4. Seleccione la función de transferencia $P_1(s)$ del menú Opciones (por omisión es un integrador). Indique los valores que se obtienen de K_p , K_v y K_a , así como de e_{ee_p} , e_{ee_v} y e_{ee_a} . ¿Qué influencia tiene un aumento en la ganancia K ?

5. Seleccione la función de transferencia $P_{10}(s)$ del menú Opciones. Para valores de $K = 0.1$, $K = 1$ y $K = 10$ indique los valores que se obtienen de K_p , K_v y K_a , así como de e_{ee_p} , e_{ee_v} y e_{ee_a} . Comente cómo se ve afectada la respuesta transitoria en lazo cerrado en cada caso. ¿Para qué valor de K se obtiene un error de velocidad prácticamente nulo? ¿Se podría por tanto utilizar siempre un valor alto de k para eliminar los errores en estado estacionario? Comente los posibles inconvenientes de esa elección.
6. Seleccione la función de transferencia $P_3(s)$ del menú Opciones. Añada un integrador haciendo uso del editor de polos y ceros. Para un valor de $\beta = 1$ s y $K = 5$ indique los valores que se obtienen de K_p , K_v y K_a , así como de e_{ee_p} , e_{ee_v} y e_{ee_a} . Repita el análisis para $K = 1$ y $K = 10$, anotando los resultados. Calcule de forma aproximada los valores de sobreoscilación, tiempo de pico y error en estado estacionario que se obtienen en la gráfica de respuesta a escalón. Comente los resultados y la influencia de K sobre los mismos. Para un valor de $K = 5$, repita el análisis para $\beta = 5$ y $\beta = 0.1$. Comente los resultados. Calcule de forma aproximada los valores de sobreoscilación, tiempo de pico y error en estado estacionario que se obtienen en la gráfica de respuesta a escalón. Comente los resultados y la influencia de β sobre los mismos e intente dar una interpretación.

7.2 Redes de avance y retraso de fase

Herramienta interactiva: [7.2. concepto_avance_retraso](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Redes de avance y retraso de fase.
- Desfases máximo y mínimo que proporcionan las redes de avance y retraso de fase.

Teoría En esta ficha se van a estudiar las características de controladores simples y comunes formados por un cero y un polo en el semiplano izquierdo del plano s y denominados redes de avance o retraso de fase. Sólo se analizará su comportamiento en lazo abierto, que de forma indirecta fue tratado en las fichas de respuesta temporal y frecuencial de un sistema de primer orden con un cero (secciones 3.3 y 4.4 respectivamente). El efecto que producen cuando se incluyen en la cadena directa de un lazo de realimentación se estudiará en secciones posteriores de este capítulo, en el ámbito de los métodos de diseño de sistemas de control en el dominio frecuencial, si bien es fundamental que previamente se asimilen los conceptos introducidos en esta ficha.

La función de transferencia que describe a esta clase de controladores es, en sus distintas representaciones, la que se muestra en la Tabla 7.2.

Si el cero se encuentra situado más cerca del eje imaginario que el polo ($p_c < z_c < 0$, $0 < \tau < \beta$), el controlador se denomina *red de avance de fase*. Si el polo se encuentra situado antes del cero ($z_c < p_c < 0$, $0 < \beta < \tau$) se denomina *red de retraso de fase*. En redes de avance de fase α se denomina factor de atenuación (pues su valor está en el intervalo $0 < \alpha < 1$), y en las redes de retraso de fase se utiliza con un valor $\alpha > 1$ sin recibir una denominación concreta. Es un factor cómodo (distancia geométrica) porque establece, en función de su intervalo, la estructura en forma de red de avance o retraso de fase. En este texto se utiliza la forma normalizada en constantes de tiempo de la red (con $\beta > 0$ y $\tau > 0$), sombreada en la Tabla 7.2, existiendo una relación directa entre sus parámetros y los de las otras representaciones: $K_c = K\beta/\tau$, $p_c = -1/\tau$, $z_c = -1/\beta$, $\alpha = \tau/\beta = z_c/p_c$.

La Figura 7.2 contiene los diagramas polares y diagramas de Bode de redes de avance y retraso de fase, junto con las fórmulas que indican la máxima o mínima contribución de fase (ϕ_m) que aportan, así como la frecuencia correspondiente (ω_m).

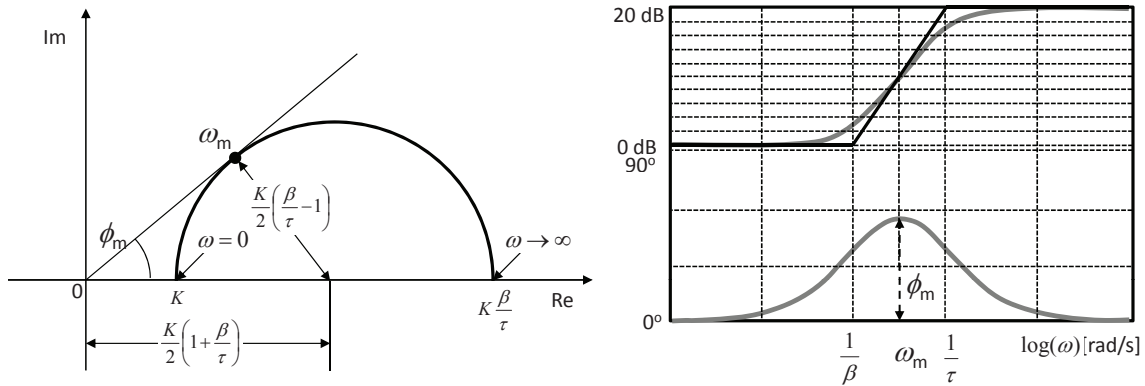
La decisión de usar una red de avance o una de retraso de fase depende de las especificaciones de diseño. Cuando se usa un controlador por avance o retraso de fase se está aumentando en uno el orden del sistema (a menos que se produzca una cancelación entre el cero del controlador y un polo de la función de transferencia del sistema en lazo abierto o viceversa).

Todos los controladores afectan a la estabilidad, error en estado estacionario y ancho de banda del sistema en lazo cerrado. Los controladores de avance de fase habitualmente aumentan la frecuencia de

Representación	Polo-cero	Constantes de tiempo
Estándar	$C(s) = K_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$	$C(s) = K \frac{\beta s + 1}{\tau s + 1}$
Con factor de atenuación	$C(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{\beta}}{s + \frac{1}{\alpha\beta}}$	$C(s) = K_c \alpha \frac{\beta s + 1}{\alpha\beta s + 1}$

Tabla 7.2 Distintas representaciones de redes de avance y retraso de fase

Red de avance de fase



$$\text{sen}(\phi_m) = \frac{\frac{\beta}{\tau} - 1}{\frac{\beta}{\tau} + 1} = \frac{\beta - \tau}{\beta + \tau}$$

$$\log(\omega_m) = \frac{1}{2} \left(\log\left(\frac{1}{\beta}\right) + \log\left(\frac{1}{\tau}\right) \right) \rightarrow \omega_m = \frac{1}{\sqrt{\tau\beta}}$$

Red de retraso de fase

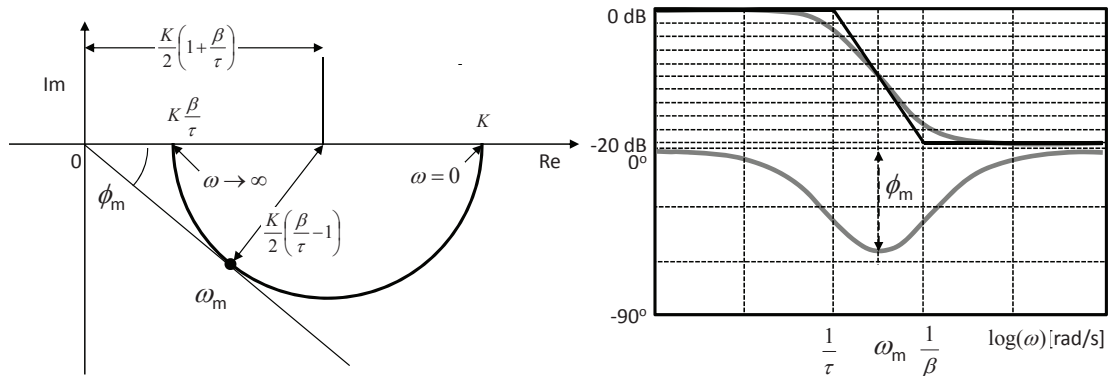


Figura 7.2 Diagramas polares y de Bode de redes de avance y retraso de fase

cruce de ganancia ω_{cg} . Esto tiene el efecto de disminuir el tiempo de establecimiento en la respuesta a escalón (aumenta el amortiguamiento del sistema). Aunque esto suele ser casi siempre deseable, el aumento de ω_{cg} conlleva el aumento del ancho de banda del sistema en lazo cerrado, que puede resultar en la amplificación de ruidos de altas frecuencias.

El efecto de los controladores de retraso de fase es el contrario. Suelen reducir el error en estado estacionario y el ancho de banda del sistema en lazo cerrado.

Bibliografía

- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, secciones 10-13, páginas 491-513, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 7, sección 4, apartado 4, páginas 185-194, 1993.

Aplicación

Herramienta interactiva: [7.2. concepto_avance_retraso](#)

Redes de avance y retraso de fase

Parámetros

$K[-]$: 1.000

$\tau[s]$: 2.218

$\beta[s]$: 0.333

$C(s) = 1.00 \frac{(0.33s + 1)}{(2.22s + 1)}$

Características

Ganancia [dB]: mínima -16.46 máxima 0

Fase [°]: mínima -47.62 máxima 0

Representación polo-cero Mostrar múltiples sistemas

Magnitud Bode [dB]

Diagrama Nyquist Im(G)

Fase Bode [°]

Diagrama Nichols [dB]

Redes de avance y retraso de fase

El área superior izquierda de la herramienta se utiliza para definir los **Parámetros** que definen al compensador (K , τ y β) y la representación simbólica de su función de transferencia. Los parámetros se han limitado al caso de fase mínima (son todos positivos). Justo bajo esta zona se presentan las **Características** de ganancia y fase mínima y máxima de la red para la configuración de parámetros seleccionada en todo momento.

En el área inferior izquierda está la Representación polo-cero, que incluye el polo y el cero de la red de compensación analizada. Sobre la gráfica se sitúa la opción de Mostrar múltiples sistemas. Si se activa, se incluyen en el diagrama nuevos pares polo-cero situados en distintas posiciones del eje real negativo, que facilitan el análisis comparativo. Estos pares se representan con distintos colores, guardando correspondencia con los colores de las gráficas de respuesta frecuencial y temporal que se dibujan en el área derecha de la herramienta. Cuando se selecciona con el ratón un elemento (polo o cero) de la gráfica, automáticamente adquiere la propiedad de sistema activo y se representa en color negro con trazo grueso. Se actualizan simultáneamente sus valores representativos en el área de **Parámetros**. Posicionando el ratón sobre los elementos interactivos (polos o ceros), se indica su posición en la esquina inferior izquierda de la herramienta. La inclusión simultánea de múltiples sistemas se puede seleccionar también desde el menú Opciones de la esquina superior izquierda de la herramienta. Se puede escoger una única Red de retraso, Algunas redes de retraso, una Red de avance, Algunas redes de avance o varias Redes de retraso vs avance.

Aplicación...

El área derecha de la herramienta está reservada para los distintos diagramas de respuesta frecuencial de los compensadores. Por omisión aparece la Vista completa (Magnitud Bode, Fase Bode, Diagrama Nyquist y Diagrama Nichols), si bien a través del menú Opciones es posible sustituir el diagrama de Nichols por una gráfica de respuesta Respuesta a escalón en lazo abierto de la red (donde se puede comprobar que al ser tanto el numerador como el denominador de grado uno, responde instantáneamente al escalón unitario introducido en el instante $t = 0$).

Los diagramas de Bode de magnitud y fase incluyen las representaciones asintóticas del sistema activo, que se han tratado en la Sección 4.2. En el caso de la fase, se puede seleccionar una de las siguientes alternativas: No Escalón Lineal Óptima.

Los diagramas de Nyquist y Nichols incluyen en este caso unas zonas sombreadas que representan los lugares geométricos de existencia de redes de avance o retraso de fase para los intervalos positivos de sus parámetros.

Sobre el eje de frecuencia se dibujan un aspa (\times) y un círculo (\circ) en las frecuencias esquina del polo y el cero de la red de compensación. Estos dos elementos interactivos se pueden desplazar horizontalmente, produciendo un cambio en el correspondiente parámetro del controlador y en la posición de su polo o cero. En la misma horizontal se representa otro elemento interactivo (desplazable a izquierda y derecha), un rombo de color verde (\diamond), que indica la frecuencia de diseño. Si se desplaza en el diagrama de Bode, se puede ver cómo varía su posición en los diagramas de Nyquist y Nichols, donde la frecuencia es una variable implícita. En dichos diagramas, este elemento interactivo permite seleccionar un punto de diseño asociado a la frecuencia que representa, en cualquier punto del área sombreada que representa el lugar geométrico de existencia de redes de avance o retraso de fase.

Los diagramas de Bode incluyen un elemento interactivo adicional representado por el símbolo que determina el punto del diagrama de máxima (o mínima) fase ϕ_m y también el de máxima (o mínima) amplitud (atenuación o amplificación), cuyos valores numéricos se visualizan en el área de **Características**. Estos símbolos son interactivos y, puesto que existe una relación entre los parámetros del controlador (τ y β) y los puntos de máxima o mínima fase (a través de ϕ_m y ω_m), desplazando los símbolos cambian los parámetros del controlador.

Los triángulos negros dibujados dentro de las gráficas facilitan el cambio de fondo de escala. Para ello hay que pulsar con el ratón a la derecha o izquierda de los situados en el eje de abscisas y en la parte superior o inferior de los que hay en el eje de ordenadas, como se explicó en la Sección 1.6.

Ejercicios

1. Determine utilizando la herramienta la función de transferencia de una red de retraso de fase que no atenúe las bajas frecuencias, cuya frecuencia esquina inferior sea $\omega_{e1} = 1$ rad/s y que introduzca un desfase máximo de 30° . Indique los valores de K , τ , β , ϕ_m y ω_m . Compare los diagramas de Nyquist y Nichols con los de la Figura 7.2 y determine sobre ellos ω_m .
2. Repita el ejercicio anterior con una red de avance de fase que no amplifique las bajas frecuencias, tenga su frecuencia esquina inferior en $\omega_{e1} = 1$ rad/s y proporcione una fase máxima de 40° .
3. Seleccione la opción Redes de avance vs retraso del menú Opciones. De los compensadores que aparecen por omisión, determine el que produce un mayor avance de fase a frecuencias más bajas. Indique sus parámetros característicos y justifique la respuesta.
4. Seleccione la opción Redes de avance vs retraso del menú Opciones. De los compensadores que aparecen por omisión, determine el que produce una mayor atenuación de magnitud. Indique sus parámetros característicos y justifique la respuesta.

7.3 Control Proporcional, Integral y Derivativo (PID)

Herramienta interactiva: 7.3. concepto_PID

Conceptos analizados en la ficha

- Características del control proporcional (P).
- Características del control integral (I).
- Características del control derivativo (D).
- Control PID.

Teoría Un controlador automático por realimentación compara el valor de la salida del sistema con la referencia, determina el error y produce una acción de control que intentará reducir el error a cero, o a un valor muy pequeño. Los sistemas presentan tres características básicas que deben ser consideradas al controlarlos:

- Cambios en la variable controlada debido a cambios en la referencia, perturbaciones o ruido.
- Tiempo necesario para que la variable de salida del sistema alcance un nuevo estado de equilibrio al ocurrir un cambio en la referencia o en las perturbaciones.
- Estabilidad del sistema en lazo cerrado.

Dependiendo de cómo se consideren estos tres aspectos habrá que utilizar una estructura de control determinada. Los controladores *Proporcional-Integral-Derivativo* (PID) son los que tienen una mayor implantación en el ámbito industrial. Según una estimación de los profesores Åström y Hägglund [1], el 95 % de los lazos de control en la industria son del tipo PID, y fundamentalmente PI. Tiene una especial relevancia el proceso denominado de *sintonización* mediante el cual se obtienen los valores de los parámetros característicos del controlador PID, partiendo de unas determinadas especificaciones de comportamiento. Es pues fundamental entender el efecto que sus tres componentes principales produce en un lazo de realimentación.

Control Proporcional (P): Un controlador proporcional genera una señal de control proporcional al error. Actúa como un amplificador de ganancia K . Su acción se representa por:

$$u(t) = Ke(t) \quad (7.4)$$

donde K es la ganancia proporcional, que es la cantidad por la que se multiplica la señal de error $e(t)$ para obtener la señal de control $u(t)$. Considerando condiciones iniciales nulas, se puede obtener la función de transferencia del controlador proporcional, que como se puede observar es de tipo 0:

$$U(s) = KE(s) \rightarrow C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \quad (7.5)$$

Generalmente, si se desea modificar la referencia de un sistema de control proporcional, no se puede llevar el error a cero, sino que se suele producir un error en estado estacionario denominado desplazamiento, o error de *offset*, consistente en la desviación permanente de la variable controlada respecto a su referencia al alcanzar el estado estacionario. Éste es uno de los principales inconvenientes de los controladores proporcionales. El error de estado estacionario puede reducirse aumentando la ganancia

K (véase la Sección 7.1). Además, un aumento de K proporciona respuestas más rápidas, aunque puede también llevar a valores elevados de la señal de control que no son implementables en la práctica. Como se puede comprobar, el controlador proporcional no aumenta el orden del sistema. Una variante del controlador para reducir o cancelar el error en estado estacionario es incluir un término de prealimentación [2]:

$$u(t) = Ke(t) + u_p \quad (7.6)$$

donde u_p se ajusta para proporcionar el valor deseado de error en estado estacionario. Si la referencia es constante r , una elección típica es $u_p = r/G(0) = K_r r$, que permitirá alcanzar dicha referencia siempre que no haya perturbaciones. Esta elección requiere un conocimiento “exacto” de la dinámica del proceso (al menos a bajas frecuencias). En la práctica, el parámetro u_p , denominado *reset* y *offset*, suele ajustarse manualmente [2].

Control Integral (I): En un controlador que emplea una *acción integral*, la señal de control se modifica a una velocidad proporcional a la señal de error; es decir, si la señal de error es grande, la señal de control se incrementa con gran rapidez; si es pequeña, la señal de control se incrementa con lentitud. Si se consideran condiciones iniciales nulas, este proceso puede representarse matemáticamente por:

$$\frac{du(t)}{dt} = K_i e(t) \quad \text{es decir} \quad u(t) = K_i \int_0^t e(\xi) d\xi \quad (7.7)$$

de donde se puede obtener la función de transferencia del controlador integral, que como se puede observar es de tipo 1:

$$U(s) = K_i \frac{E(s)}{s} \rightarrow C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K_i}{s} \quad (7.8)$$

denominándose *ganancia integral* a K_i . Por la propia definición de integral, son sistemas con “memoria”, ya que la salida u en un instante t dependerá del comportamiento anterior desde 0 hasta t . Si se considera una situación de estado estacionario con $u = u_{ee}$ y $e = e_{ee}$, se debería cumplir que:

$$u_{ee} = K_i e_{ee} t$$

que sólo es posible si $K_i = 0$ o $e_{ee} = 0$ [2]. Por tanto, se puede deducir que con la acción integral el error será cero si se alcanza una situación de estado estacionario. En el dominio de la frecuencia, un controlador integral tiene ganancia infinita en la frecuencia cero y por tanto, la función de transferencia de lazo cerrado tendrá ganancia estática unidad y no existirá error en estado estacionario cuando la referencia sea un escalón. En cierta medida, la acción integral se puede interpretar como un método para generar el término u_p en un controlador proporcional de forma automática [2].

Las características básicas de un controlador integral son:

- Cuando la salida del controlador es constante, el error en estado estacionario del sistema en lazo cerrado será cero si el sistema es estable.
- Cuando la salida del controlador varía a una velocidad constante, el error en estado estacionario debe tener un valor constante. Hasta el momento en que se produce el error, el valor de la integral es constante ($u(t) = u_0$). Cuando el error es constante, la integral crece con el tiempo a una velocidad constante y por tanto la salida del controlador aumenta también a una velocidad constante.

Como se puede observar, siempre que exista error, la acción integral hará cambiar la salida del controlador para corregirlo, por lo que este controlador tiende a cancelar los errores en estado estacionario (nótese que este controlador aporta un integrador a la cadena directa del lazo de control, aumentando

en uno el tipo del sistema, como se trata en la Sección 7.1). Esta es la principal ventaja de este tipo de controlador, porque su utilización tiende a producir respuestas oscilatorias y además aumenta en uno el orden del sistema. De hecho, no se suele utilizar por sí solo en la práctica y suele estar combinado con las acciones proporcional y derivativa, tal como se describe a continuación.

Control Proporcional-Integral (PI): Como se ha analizado en los párrafos previos, la acción de control proporcional genera un error en estado estacionario. Por otra parte, aunque la acción integral anula el error por sí misma, puede provocar comportamientos oscilatorios o respuestas muy lentas (si no se admiten comportamientos oscilatorios). Por estas razones se combinan las dos acciones obteniéndose un controlador Proporcional-Integral o PI, que presenta las ventajas de cada uno de ellos. Considerando condiciones iniciales nulas, se representa por:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\xi) d\xi \right) = Ke(t) + K_i \int_0^t e(\xi) d\xi \quad (7.9)$$

donde T_i se denomina *tiempo integral*, que representa en este caso el tiempo que necesita la acción integral para suministrar una señal igual a que da la acción proporcional.

La función de transferencia de un controlador PI viene dada por:

$$U(s) = K \left(E(s) + \frac{1}{T_i} \frac{E(s)}{s} \right) \rightarrow C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) = K \frac{(T_i s + 1)}{T_i s} = K + \frac{K_i}{s} \quad (7.10)$$

Con un controlador PI se consigue evitar el error en estado estacionario, pero con una velocidad mayor que con un controlador I, con sólo una acción integral. A mayor ganancia K del controlador PI, más rápido será el sistema, pero podrán aparecer más oscilaciones. El controlador PI introduce en la cadena directa un integrador y un cero, aumentando por tanto el orden del sistema y su complejidad.

Control Derivativo (D): En el control derivativo, la salida del controlador es proporcional a la relación de cambio con respecto al tiempo de la señal de error:

$$u(t) = K_d \frac{de(t)}{dt} \quad (7.11)$$

Al parámetro K_d se le denomina ganancia derivativa. La función de transferencia de un controlador derivativo viene dada por $C(s) = U(s)/E(s) = K_d s$ (derivador puro).

Este tipo de controladores no responde a las señales de error en estado estacionario, ya que su derivada es cero. Por esta razón no se utilizan individualmente, sino que hay que combinarlos con alguna otra acción de control. Además, no es un elemento causal y en la práctica se implementa como una pseudo-derivada, como se comenta en el siguiente apartado.

El efecto de la acción de control derivativo es anticipar los cambios de error, y proporcionar una respuesta más rápida a esos cambios. La velocidad rápida de respuesta inherente al control derivativo permite al sistema salvar el tiempo de retardo en los procesos rápidos y estabilizarse en un corto periodo de tiempo, especialmente cuando el error cambia constantemente.

Control Proporcional-Derivativo (PD): Cuando se combina un controlador proporcional con uno derivativo, resultan una acción de control y una función de transferencia descritas por:

$$u(t) = K \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) = Ke(t) + K_d \frac{de(t)}{dt} \rightarrow C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K(1 + T_d s) = K + K_d s \quad (7.12)$$

La salida del controlador puede variar cuando hay un error cambiando constantemente. Cuando hay un cambio en la señal de referencia al lazo de control, se produce un cambio inicial rápido en la salida del controlador a causa de la acción derivativa, seguido de un cambio gradual debido a la acción proporcional. El *tiempo derivativo* T_d , representa el tiempo en que la acción derivativa se anticipa al efecto de la acción proporcional. En teoría, la acción derivativa tiene un efecto positivo estabilizador sobre la dinámica del sistema de control, haciendo que se amortigüen las oscilaciones en las respuestas, o bien, que se pueda elevar la ganancia proporcional del controlador y con ello la velocidad, sin que se incrementen las oscilaciones.

El controlador PD se puede expresar como [2]:

$$u(t) = K \left(e(t) + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) = K \hat{e}(t + T_d)$$

donde $\hat{e}(t + T_d)$ se puede interpretar como la predicción del error en el instante $t + T_d$ usando una extrapolación lineal.

Hay que hacer notar que se trata de un controlador tipo 0, y por tanto no será capaz de eliminar los errores en estado estacionario (las consideraciones sobre errores en estado estacionario hechas para controladores P y D previamente son aplicables también aquí).

El mayor inconveniente de los controladores tipo D y PD es que la acción derivativa puede amplificar los ruidos que se introducen en el sistema a través del lazo de realimentación, provocando comportamientos oscilatorios de alta frecuencia en la señal de control y, por tanto, en la salida del proceso.

Además, no es un elemento causal y sólo se suele realizar a través de una pseudo-derivada, de forma que la derivada ideal se filtra por un sistema de primer orden con una constante de tiempo igual a T_d/N_d . La implementación suele hacerse de la siguiente manera:

$$C(s) = K(1 + T_d s) \approx K \left(1 + \frac{T_d s}{\frac{T_d}{N_d} s + 1} \right)$$

Si $N_d = 1$, se está aproximando la derivada para bajas frecuencias ($|j\omega| < T_d$) [2].

En esta ficha, como lo que se pretende es introducir los conceptos fundamentales asociados a los controladores PID no se ha implementado ese filtro. Opciones alternativas son incluir un filtro $F(s)$ en la referencia (típicamente con la estructura de un sistema de primer orden) o que el término derivativo del controlador actúe en función de la derivada de la salida del proceso, en lugar de usar la derivada del error (la derivada del error y la de la salida sólo difieren en el instante de cambio de la referencia).

Control Proporcional-Integral-Derivativo (PID): Si se combinan las tres acciones de control descritas en los apartados previos, se obtiene el controlador PID, que contribuye a eliminar los errores en estado estacionario y a reducir la tendencia a las oscilaciones del sistema en lazo cerrado, siempre que se seleccionen adecuadamente sus parámetros característicos. Se representa por la siguiente ecuación:

$$u(t) = K \left(e(t) + \frac{1}{T_i} \int_0^t e(\xi) d\xi + T_d \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (7.13)$$

y por tanto su función de transferencia viene dada por:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) \quad (7.14)$$

Este control es el más general, y con toda probabilidad es el tipo de controlador más utilizado, ya que permite una óptima explotación de las características de las tres acciones de control. Se puede considerar

como un controlador proporcional, que dispone de un control integral para eliminar el error en estado estacionario y un control derivativo para mejorar la estabilidad y aumentar la rapidez de la respuesta. En esta combinación:

- El control proporcional da forma a la curva de respuesta de la variable controlada. Produce más salida cuanto mayor sea el error.
- El control integral disminuye el error. Produce más salida cuanto más tiempo perdure el error.
- El control derivativo disminuye el tiempo durante el que cambia el error, prediciendo, con antelación el valor del cambio del error, y, frecuentemente, reduce el error ejecutando por adelantado las correcciones oportunas. Proporciona más salida cuanto más rápidamente se produce el error (adelanto de la respuesta).

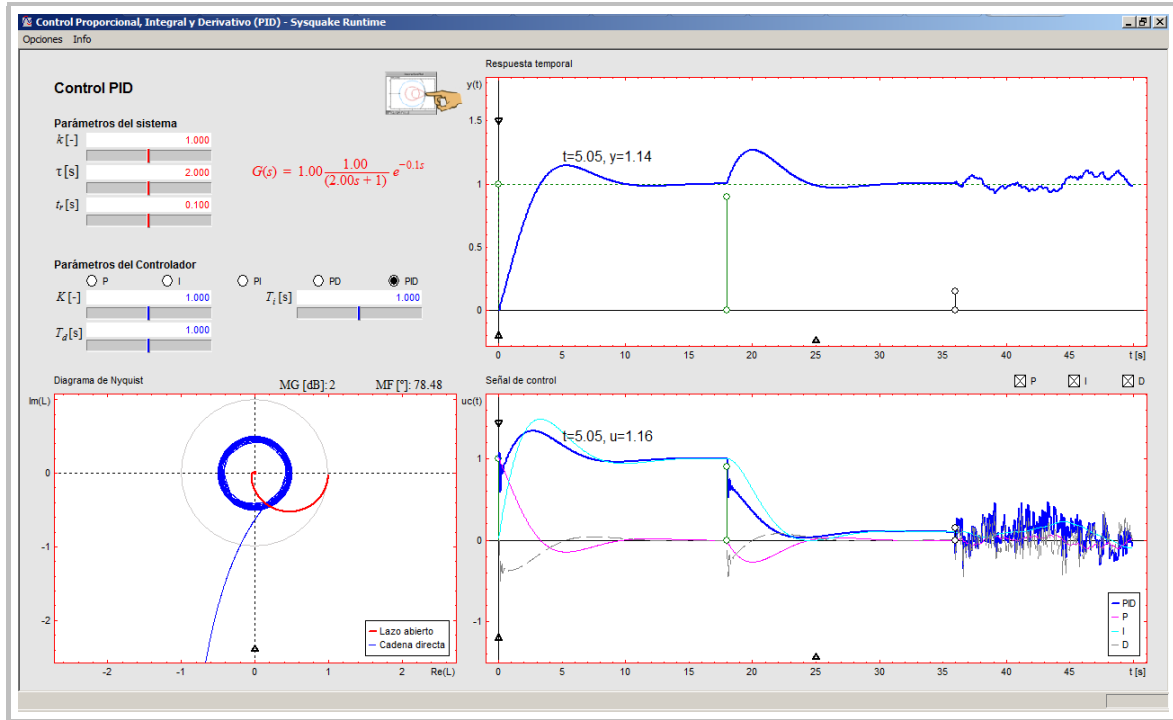
El controlador PID teórico está formado por dos ceros y un integrador (polo en el origen). La implementación práctica se suele hacer utilizando un filtro en la acción derivada para conseguir que el controlador sea un elemento causal. El ajuste de parámetros de un controlador para conseguir una respuesta adecuada de un sistema de control en lazo cerrado se puede realizar teóricamente o experimentalmente, registrando en este último caso la respuesta dinámica cuando se producen cambios de la referencia o perturbaciones transitorias. Como se ha comentado, este proceso se le denomina *sintonización* del controlador. Si el controlador no está bien ajustado, el lazo cerrado puede llegar a ser inestable, es decir, puede producir salidas no acotadas cuando las entradas son acotadas y por tanto no lograr los objetivos de control. Existen múltiples métodos de sintonización de controladores PID, algunos de los cuales se analizarán en las secciones 7.9 (control PI por el método de asignación de polos), 7.10 (control PI usando el método de cancelación de polos) y 7.11 (control PID usando las reglas de sintonización de Ziegler y Nichols).

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Capítulo 10, páginas 293-306, 2008.
- [1] Åström, K. J. y T. Hägglund. Control PID avanzado. Pearson - Prentice Hall, ISBN:978-84-8322-511-0. 2009.
- [4] Barrientos, A., R. Sanz, F. Matía y E. Gambao. Control de sistemas continuos. Problemas resueltos. Mc Graw Hill, ISBN: 84-481-0605-9. Capítulo 9, sección 1, páginas 332-334, 1996.
- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 14, ejercicio 14.1, página 391, 2009.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima Edición. Pearson Prentice Hall. ISBN: 84-205-4401-9. Problema 4.5, páginas 236-237. Problema 4.6., página 241, 2005.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 7, sección 3, páginas 171-177, 1993.

Aplicación

Herramienta interactiva: 7.3. concepto_PID



Control PID

La figura superior muestra la herramienta utilizada para analizar los efectos de las tres acciones de control que implementa un controlador PID. En este caso, se distinguen tres zonas principales.

El área superior izquierda de la aplicación está dedicada a la introducción de los **Parámetros del sistema**, cuya estructura se selecciona a través del menú Opciones. Como el objetivo de esta ficha es asimilar los conceptos asociados a los controladores PID, sólo se han introducido tres estructuras de modelos dinámicos: un integrador múltiple con retardo (Ejemplo 1, función $P_{1r}(s)$ de la Tabla 1.2), un sistema de primer orden con tiempo de retardo (Ejemplo 2, $P_{2r}(s)$), que es la opción que aparece por omisión al arrancar la herramienta y un sistema de segundo orden sin tiempo de retardo (Ejemplo 3, correspondiente a $P_{11}(s)$ sin el polo real). En todos los casos, al seleccionar la estructura del sistema, se despliegan los cuadros de texto y barras de desplazamiento que facilitan la introducción o modificación de sus valores. En el caso del integrador múltiple, además de la ganancia y el tiempo de retardo, se puede seleccionar su orden n . En los otros casos se muestran los parámetros característicos de sistemas de primer orden con tiempo de retardo (k , τ , t_r) y de segundo orden (k , ζ y ω_n). Siempre se visualiza una representación simbólica de la función de transferencia del sistema.

Aplicación...

Debajo de esta zona se seleccionan la estructura y los **Parámetros del controlador**. En primer lugar, se ha configurado una línea con una serie de botones circulares de selección excluyente que determinan la estructura del controlador (P, I, PI, PD o PID) y por tanto los parámetros del controlador seleccionado que se pueden modificar a través de cuadros de texto o barras de desplazamiento: K (P, PI, PD, PID), T_i (I, PI, PID) y T_d (PD, PID). Los valores de T_i y T_d deben ser positivos.

El área inferior izquierda de la herramienta presenta en este caso un Diagrama de Nyquist tanto del sistema en lazo abierto $G(s)$ como de la función de transferencia del lazo $L(s) = C(s)G(s)$ (que coincide con la cadena directa $Q(s)$). Se ha considerado conveniente incluir este diagrama para que se pueda analizar el efecto de controladores tipo PID en el comportamiento del lazo cerrado tanto en el dominio del tiempo como en el de la frecuencia. Sobre la gráfica se muestran los valores del margen de ganancia (MG) y margen de fase (MF) del sistema compensado. El triángulo (Δ) inferior de la gráfica facilita el cambio de escala cuando se pincha con el ratón a su derecha o a su izquierda.

El área derecha de la herramienta contiene las gráficas de Respuesta temporal y Señal de control. Ambas gráficas disponen de triángulos de cambio de escala en los ejes de abscisas (hay que pulsar a la derecha o a la izquierda de los mismos para cambiar de escala) y ordenadas (el cambio de escala se realiza pulsando sobre o bajo los triángulos). También incorporan la posibilidad de cambiar la amplitud del escalón en la referencia en el instante $t = 0$ (accediendo al círculo o a la línea horizontal verde discontinua $\circ \cdots$). Existen dos círculos sobre el eje de abscisas que si se desplazan horizontalmente, permiten cambiar el instante en el que se introduce la señal de perturbación o ruido. Si el que hay en el centro de la gráfica (\circ) se arrastra verticalmente, se modifica la amplitud del escalón de la perturbación de carga a la entrada del sistema. Si se desplaza verticalmente el situado más a la derecha (\circ), cambia la varianza del ruido. Cuando se coloca el puntero del ratón sobre cualquiera de estos círculos, la información asociada a los mismos (amplitud e instante de activación) se visualiza en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

La gráfica de la Señal de control presenta una particularidad reseñable. Sobre la misma, existen unos cuadros de selección que proporcionan la posibilidad de visualizar de forma individual las aportaciones a la señal de control de las distintas componentes P, I y D del controlador seleccionado (según sean de aplicación). Cada acción de control utiliza un color que se detalla en una leyenda de la gráfica.

Tanto en la gráfica de la señal de salida como en la de entrada, cuando se coloca el puntero del ratón sobre las mismas, se activan etiquetas que contienen las coordenadas de tiempo (t) y las variables (y , u) asociadas a ese punto.

Ejercicios

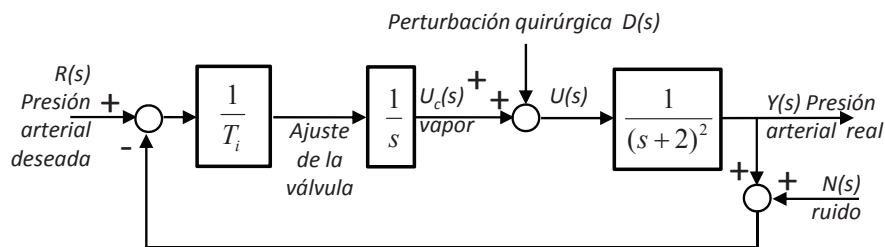
1. Seleccione del menú Opciones el primer ejemplo, correspondiente a $P_{1r}(s) = \frac{k}{s^n} e^{-t_r s}$ con $k = 1$, $n = 1$ y $t_r = 0$ s. Lleve a cero la amplitud de la perturbación y la varianza del ruido.
 - a) Para un controlador tipo P:
 - 1) De acuerdo con el diagrama de Nyquist de la cadena directa, ¿es posible obtener una respuesta inestable para algún valor de K ?

- 2) ¿Se podría aumentar infinitamente la ganancia para conseguir un tiempo de subida $t_s \rightarrow 0$? Justifique la respuesta.
 - 3) Indique el valor de la ganancia con el que se obtiene un tiempo de subida de aproximadamente 6 segundos.
 - 4) ¿Cuál es el margen de fase y el margen de ganancia del sistema compensado?, ¿dependen sus valores de K ?
 - 5) Si el controlador es proporcional (tipo 0), ¿cómo es que se obtiene una respuesta a escalón en la referencia con error en régimen permanente nulo? Si se introduce una perturbación en la carga a la entrada del sistema de amplitud 1, ¿se alcanza error en régimen permanente nulo? Justifique la respuesta.
 - 6) Introduzca un ruido de varianza 0.05, ¿qué amplitud tiene la varianza de la salida?
 - 7) ¿Qué ocurre si se cambia el signo de K ?
 - 8) Para K calculado en el ejercicio 1.a.3), ¿qué ocurre si ahora se selecciona $n = 2$? ($G(s) = 1/s^n$, doble integrador) ¿Es posible conseguir una respuesta no oscilatoria para algún valor de K ? Justifique la respuesta haciendo uso del análisis del lugar de las raíces (puede utilizar la herramienta **6.1. lugar_raíces**) ¿Y si $n > 2$?
 - 9) Para el caso $n = 1$ y el valor de K obtenido en el ejercicio 1.a.3), introduzca ahora un valor de $t_r = 0.5$ s ¿Se ve muy afectada la respuesta temporal?, ¿y los márgenes de fase y ganancia? Responda a las mismas preguntas con $t_r = 1$ s. Determine el valor de t_r que hace que el sistema alcance una oscilación mantenida para una entrada unitaria en escalón en la referencia (valor de t_r para el cual el diagrama de Nyquist del sistema compensado atraviesa el punto crítico (-1,0)). ¿Cuál es el valor del periodo de la oscilación? Para $t_r = 1$, ¿cuál es el valor de K que hace que el sistema en lazo cerrado entre en una oscilación mantenida?
- b) Para un controlador tipo PD:
- 1) Seleccione $G(s) = \frac{1}{s}$ y $K = 1$. Partiendo del valor $T_d = 1$ s, vaya aumentando paulatinamente su valor y analizando lo que ocurre con la respuesta. A continuación, lleve de nuevo $T_d = 1$ y disminuya paulatinamente su valor hasta $T_d = 0.2$ s. ¿En qué caso considera que se obtiene una mejor respuesta en lazo cerrado? ¿Cómo es que reduciendo T_d mejora la rapidez de la respuesta?. Justifique este resultado (se recomienda realizar un análisis en el lugar de las raíces, ficha 6.1).
 - 2) Realice el mismo apartado anterior tomando $n = 2$ (doble integrador).
 - 3) Para $G(s) = \frac{e^{-t_r s}}{s}$, $K = 1$ y $T_d = 0.2$, comience a aumentar el tiempo del retardo e indique el valor para el que se obtiene una oscilación mantenida en la salida. Modifique ahora los valores de K y T_d para alcanzar un comportamiento en lazo cerrado que, una vez transcurrido el tiempo de retardo, sea parecido al que se alcanzaba con la configuración inicial de parámetros y $t_r = 0$ s.
 - 4) Analice el efecto de una perturbación de amplitud 1 en el error en estado estacionario y de un ruido a la salida de varianza 0.05 en la señal de control.
- c) Para un controlador tipo PI y PID:
- 1) Justifique si es posible mejorar el comportamiento en lazo cerrado para este sistema con un controlador tipo PI o PID.
 - 2) Para $G(s) = \frac{e^{-t_r s}}{s}$, $K = 1$, obtenga el valor de T_i para el que se obtiene una misma sobreoscilación cuando se introduce un escalón unitario en la referencia y un escalón unitario en la perturbación de carga. Considere ahora $t_r = 0.5$ s. Modifique los valores de K y T_i

para obtener perfiles de respuesta parecidos a los alcanzados para el sistema sin tiempo de retardo. ¿Es posible? ¿Y con un controlador PID? Analice las aportaciones particulares de la acción proporcional, de la integral y de la derivada en la curva de la señal de control.

2. Seleccione del menú Opciones el segundo ejemplo, correspondiente a $P_{2r}(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)} e^{-t_r s}$ con $k = 0.5$, $\tau = 5$ s y $t_r = 3$ s. Lleve a uno la amplitud de la perturbación y a 0.05 la varianza del ruido y realice las siguientes actividades:

- a) Haciendo uso de la herramienta, justifique si es posible obtener una respuesta sobreamortiguada en lazo cerrado con error en estado estacionario nulo usando un controlador proporcional. ¿Y con un controlador PI? ¿Y con un PD? ¿Y con un PID? Encuentre un conjunto de parámetros del controlador PID que consigan un tiempo de establecimiento inferior a 15 segundos tras un cambio en escalón de amplitud unidad tanto en la referencia como en la perturbación.
- b) Introduzca los valores de los parámetros $k = 0.5$, $\tau = 5$ s y $t_r = 3$ s. Seleccione un controlador PD. Por el método de prueba y error, intente obtener un comportamiento en lazo cerrado que no presente sobreoscilación y tal que el tiempo de establecimiento, una vez transcurrido el tiempo de retardo, sea inferior a 3 s. Indique los valores de su margen de fase y margen de ganancia. Introduzca una perturbación en la carga de amplitud unidad. ¿Presenta el sistema en lazo cerrado error en régimen permanente? En caso afirmativo indique su valor. Vuelva a cero la perturbación en la carga e introduzca una varianza de ruido de amplitud 0.05. ¿Cuál es la máxima desviación de la salida respecto a su valor previo de estado estacionario? ¿Cuál ha sido el motivo de ese comportamiento no deseado? Comente la respuesta.
- c) Considere un sistema que controla la presión media arterial durante la anestesia descrito en la referencia [9], páginas 236-237 (ligeramente modificado). Se supone que el nivel de la presión arterial mantiene una relación con la cantidad de anestesia durante una operación quirúrgica. La siguiente figura representa un diagrama de bloques del sistema, donde la acción de la cirugía se representa a través de la perturbación $D(s)$. Determine un valor adecuado de T_i que proporcione un resultado satisfactorio cuando en $t = 0$ s se produce un cambio en la presión arterial deseada en forma de escalón unitario, en $t = 20$ s se produce una perturbación quirúrgica en forma de escalón unitario y en $t = 40$ s el sensor que mide la presión arterial introduce en el lazo de control un ruido de varianza aproximadamente igual a 0.05.



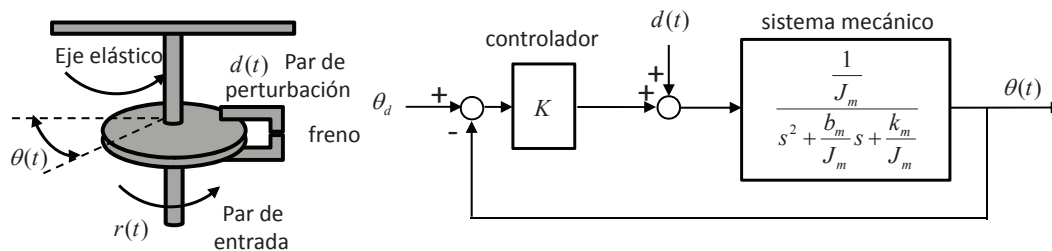
3. Seleccione del menú Opciones el tercer ejemplo, correspondiente a:

$$P_{11b}(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

con $k = 1$, $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 1$ rad/s. Lleve a uno la amplitud de la perturbación y la varianza del ruido. Utilizando la herramienta, intente obtener por el método de prueba y error un controlador

que proporcione un sistema en lazo cerrado sobreamortiguado, sin error en estado estacionario cuando se aplica un cambio en escalón en la referencia y con un margen de fase de al menos 90° . Justifique la elección de la estructura del controlador usando el método del lugar de las raíces. Para los parámetros obtenidos, indique si el sistema se podría recuperar si se introduce una perturbación de carga en forma de escalón de amplitud 1 a la entrada del sistema. Comente también si el controlador funcionaría bien en presencia de ruido en la salida de varianza 0.05.

4. Considere el sistema mecánico de torsión de la siguiente figura, que viene descrito en la referencia [9], página 241, consistente en un sistema mecánico de torsión. El par debido a la torsión del eje es $-k_m\theta$, el de amortiguamiento debido al dispositivo de freno es $-b_m\dot{\theta}$, el par de perturbación es $d(t)$ y el de entrada es $r(t)$. El momento de inercia del sistema mecánico es J_m .



La función de transferencia del sistema en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{b_m}{J_m}s + \frac{k_m}{J_m}}$$

En la figura se muestra también un lazo de control proporcional. Para el siguiente conjunto de parámetros $k_m = 5$, $b_m = 0.9$ y $J_m = 1$ y suponiendo que el ángulo deseado es $\theta_d = 0^\circ$.

- Seleccione del menú Opciones el tercer ejemplo, correspondiente a $P_{11}(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ e introduzca los valores de los parámetros.
 - Determine la respuesta en lazo cerrado con una ganancia del controlador $K = 50$, cuando se introduce una perturbación en forma de escalón unitario en $d(t)$.
 - ¿Qué mejoras se obtienen respecto a la respuesta en lazo abierto?
5. Para el sistema dado por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Diseñe un controlador P tal que la sobreoscilación de la respuesta a un escalón unitario en la referencia sea del 5%, el tiempo de subida aproximadamente 2 s y el error en estado estacionario inferior al 50%. Comente el efecto que tiene sobre la salida una perturbación de carga en forma de escalón unitario a la entrada del sistema (referencia [4], páginas 332-334).

7.4 Diseño de controladores de retraso de fase en el dominio frecuencial

Herramienta interactiva: 7.4. f_diseño_retraso

Conceptos analizados en la ficha

- Especificaciones en el diseño frecuencial de controladores de retraso de fase.
- Diseño de controladores de retraso de fase en el dominio de la frecuencia.

Teoría Un enfoque común del diseño con el diagrama de Bode consiste en descomponer el ajuste en dos fases. Inicialmente se busca cumplir las especificaciones de estado estacionario, ajustando la ganancia en lazo abierto. Posteriormente, se representan las curvas de magnitud y fase en lazo abierto sin compensar. Si no se satisfacen las otras especificaciones (en general de margen de fase MF), se determina un controlador adecuado que modifique la función de transferencia en lazo abierto hasta cumplir las especificaciones de lazo cerrado (compromiso entre precisión en estado estacionario y estabilidad relativa).

Tal y como se comentó en la Sección 7.2, las redes de retraso de fase reducen la ganancia del sistema y añaden desfase, factores que a priori no parecen muy positivos en un lazo de control. Sin embargo, estos controladores son útiles en aquellos casos en los que se desee reducir el error en régimen estacionario manteniendo unas ciertas especificaciones de estabilidad relativa (generalmente ligadas al margen de fase) y con una consiguiente disminución del ancho de banda del sistema en lazo cerrado.

Se va a utilizar una representación del controlador de retraso de fase en forma de constantes de tiempo ($\tau > \beta$):

$$C(s) = K \frac{\beta s + 1}{\tau s + 1} = KC_{\tau\beta}(s) = K_c \frac{s - z_c}{s - p_c}$$

El procedimiento habitual de diseño de redes de retraso de fase en el diagrama de Bode es aproximado y se basa en los siguientes pasos:

1. Obtener la constante proporcional del controlador (K) de forma directa a partir de la especificación de error en estado estacionario. Por ejemplo, si $G(s)$ es tipo cero, la especificación será en forma de constante de error de posición K_p que debe cumplir el sistema compensado. Por tanto, se debe cumplir $K_p = \lim_{s \rightarrow 0} C(s)G(s) = Kk \rightarrow K = K_p/k$.
2. Se comprueba si con ese aumento de ganancia el sistema $KG(j\omega)$ cumple las otras especificaciones del problema (generalmente el margen de fase). Si se cumple, indicará que con un controlador proporcional es posible cumplir todas las especificaciones.
3. Si el aumento de ganancia proporcionado por K hace que no se satisfaga la especificación de margen de fase, hay que realizar una reducción de ganancia que lleve la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} a un valor en el que se verifique el margen de fase deseado, para ello se introducirá el compensador siguiendo los siguientes pasos:

- Se busca la frecuencia en que la planta presenta la fase $-180^\circ + MF_{\text{deseado}} + MS$, es decir:

$$\angle G(j\omega_{cg1}) = -180^\circ + MF_{\text{deseado}} + MS$$

con el objetivo de fijar el margen de fase en la frecuencia ω_{cg1} . MS es el denominado *margen de seguridad*, típicamente entre 5° y 12° , que se usa para compensar el desfase que introduce el propio controlador de retraso de fase.

- Se busca la ganancia que presenta la $KG(s)$ en dicha frecuencia:

$$RG = |KG(j\omega_{cg1})|$$

donde $1/RG$ corresponde a la atenuación que debe aplicar el compensador en ω_{cg1} .

- Cálculo de los parámetros del compensador (β, τ).
 - La Figura 7.3 muestra la evolución de la ganancia del compensador en función de la frecuencia. Para las frecuencias situadas a la derecha de $\frac{1}{\beta}$, esta ganancia es aproximadamente $\alpha = \frac{\beta}{\tau}$ (nótese que $RG > 1$ y $\alpha < 1$ por tratarse de una red de retraso de fase), por lo tanto haremos que $\alpha = \frac{1}{RG}$ y conseguimos que el compensador presente la atenuación deseada.
 - La atenuación deseada ha fijado la distancia geométrica entre el polo y el cero del compensador. Se fija a continuación el valor de β para que la frecuencia de interés, ω_{cg1} , quede suficientemente a la derecha de $\frac{1}{\beta}$. Por ello suele tomarse:

$$\frac{1}{\beta} = 10\omega_{cg1} \rightarrow \beta = \frac{1}{10\omega_{cg1}}$$

- Finalmente $\tau = \beta\alpha = \beta \frac{1}{RG} = \frac{1}{10\omega_{cg1}RG}$.
- Dado que el compensador obtenido no presentará exactamente ganancia $\frac{1}{RG}$ ni fase MS en la frecuencia ω_{cg1} es necesario comprobar el correcto funcionamiento del sistema. Para ello se busca la frecuencia, ω_{cg} , en que el sistema compensado presenta ganancia unitaria, es decir:

$$1 = |C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg})|.$$

Esta será la frecuencia en que el margen de fase estará definido realmente. Éste será:

$$MF = 180 + \angle C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg}).$$

En el caso en que $MF > MF_{deseado}$, se cumplirán las especificaciones y el diseño será correcto. En caso contrario será necesario buscar otros mecanismos de diseño.

- Es importante comprobar que $\omega_{cg} \approx \omega_{cg1}$, pues será una muestra más que el proceso ha sido correcto.
- Finalmente siempre es conveniente realizar alguna simulación con el fin de verificar el comportamiento del sistema en el campo temporal.

Como se observa en la Figura 7.3, un compensador de retraso de fase tiene una componente de filtro paso bajo. Este tipo de compensación permite tener una ganancia alta a bajas frecuencias (y por tanto una mejora en el error de estado estacionario) y reducir la ganancia en el intervalo de frecuencias en el que debe mejorarse el margen de fase, reduciendo por tanto el ancho de banda del sistema y provocando una respuesta transitoria más lenta.

En este compensador se explota fundamentalmente la atenuación que en la curva de magnitud se produce a altas frecuencias, en vez del desfase (que no sirve para conseguir los objetivos del control).

Los compensadores por retraso de fase tienden a integrar la señal de entrada (actúan de forma parecida a un control PI).

Aplicación...

En esta ficha, la Representación polo-cero, además de facilitar la inclusión de los elementos dinámicos del sistema (polos \times , ceros \circ , integradores \times y derivadores \circ), representa en color azul el cero \circ y el polo \times de la red de retraso de fase, cuya posición viene determinada por el algoritmo que se ejecuta en la herramienta (la posición se calcula automáticamente en función de las especificaciones del problema). La leyenda situada en la parte inferior derecha de la gráfica determina los símbolos representativos de estos elementos. Una (G) entre paréntesis indica que esos elementos pertenecen al sistema y una (C) que pertenecen al controlador.

Un aspecto muy interesante de esta representación es que a medida que se cambia la configuración dinámica del sistema arrastrando dentro de la gráfica elementos dinámicos desde el repositorio ($\times \times \circ \circ$) que se localiza junto al título de la gráfica, o sacándolos hacia el repositorio, automáticamente la estructura de la red de retraso de fase se acomoda al tipo del sistema seleccionado, teniendo en cuenta la existencia de solución para las especificaciones adoptadas. Si con una simple ganancia proporcional se pueden alcanzar esas especificaciones, el controlador $C(s)$ se representa como un controlador proporcional. En caso contrario adoptará la estructura completa de red de retraso de fase. El funcionamiento en detalle del editor de polos y ceros fue tratado en la Sección 3.5.

En la zona derecha de la herramienta se dibujan las distintas representaciones del sistema en el dominio de la frecuencia. Desde el menú Opciones situado en la esquina superior izquierda de la herramienta, se puede seleccionar la representación en Diagrama de Bode, Diagrama de Nyquist, Diagrama de Nichols y la Vista completa, que muestra simultáneamente todos los diagramas.

Cuando se selecciona el Diagrama de Bode, sobre él se dibujan una serie de líneas:

- La línea de color rojo es la respuesta en frecuencia del sistema compensado únicamente en ganancia $KG(s)$.
- La línea de color azul representa la respuesta en frecuencia del sistema compensado $C(s)G(s)$. Cuando por las condiciones impuestas por las especificaciones el controlador se configura como una ganancia, las curvas roja y azul se superponen.
- La línea de color verde en este diagrama muestra la respuesta en frecuencia del controlador de retraso de fase (mostrada únicamente en este diagrama).
- La línea discontinua de color gris en la curva de magnitud representa la línea de 0 dB y en la curva de fase la línea de -180° .

Además de las líneas descritas, en las gráficas aparecen otros elementos interactivos:

- Tanto en la gráfica de Magnitud Bode como en la de Fase Bode, se ubican sobre el eje de abscisas un aspa y un círculo de color azul (\times , \circ) asociados a la posición del polo y del cero de la red de retraso de fase. Estos dos elementos no se pueden desplazar en la horizontal porque su valor viene dado por el algoritmo. Al poner el ratón sobre los mismos, en la esquina inferior izquierda de la herramienta se representa la posición del polo p_c y el cero z_c correspondientes.
- Sobre la gráficas de Bode se dibuja una línea negra vertical en la frecuencia de diseño (frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg}), que corta la respuesta en frecuencia del controlador C en un punto representado por el símbolo \diamond , que está ligado a la frecuencia de cruce de ganancia e indirectamente al margen de seguridad MS que se utiliza en los cálculos de la fase que aporta la red (en esa frecuencia de cruce la red aporta un pequeño desfase).

Aplicación...

- En la curva de Fase Bode se representan dos segmentos verticales acabados en un círculo sobre la curva de respuesta frecuencial del sistema compensado. El que se representa en color **celeste** indica la especificación de margen de fase deseado (modificable tanto desde el área de **Especificaciones** como arrastrando a derecha e izquierda en esta gráfica). La modificación de esta especificación conlleva el cálculo de un nuevo controlador. El segmento de color **verde** indica el margen de fase real del sistema compensado únicamente con la ganancia proporcional $KG(s)$ (que es el que se utiliza para establecer la nueva especificación de MF), que lógicamente no es interactivo porque su valor viene fijado por los cálculos realizados por el algoritmo de control.

En el Diagrama de Nyquist y en el de Diagrama de Nichols, se utiliza el mismo código de colores para las funciones $-KG(s)$ y $-C(s)G(s)$ y se dibujan también los segmentos terminados en círculos que delimitan el margen de fase deseado y el real, así como el símbolo \diamond ligado a la frecuencia de cruce de ganancia y al factor α de la red.

Finalmente, en la zona inferior derecha de la herramienta se dibuja la Respuesta temporal tanto del sistema compensado $C(s)G(s)$ en color **azul** como la del sistema compensado únicamente con la ganancia K ($KG(s)$) dibujado en color **rojo**. De izquierda a derecha, el primer círculo de color **verde** ubicado sobre la línea discontinua que marca la referencia, permite cambiar la amplitud de la misma. El segundo círculo también de color **verde** se desdobra al pulsar sobre él, utilizándose el superior para cambiar la amplitud de la perturbación en forma de escalón en la carga a la entrada del sistema y el inferior para modificar el instante en que se introduce la perturbación. A la derecha de éste hay otra pareja de círculos negros, cuya función es cambiar la varianza del ruido a la salida y el instante en que se aplica esa señal. Cuando se coloca el ratón sobre estos círculos, en la esquina inferior izquierda de la herramienta se visualizan los valores que se están modificando (tiempos o amplitudes).

Todas las gráficas contienen triángulos negros para facilitar el cambio de escala, pulsando con el ratón a derecha o izquierda de los situados en el eje de abscisas o en la parte superior o inferior de los situados en el eje de ordenadas.

El menú Opciones incluye un conjunto de ejemplos prácticos, además de la posibilidad de introducir funciones de transferencia genéricas en formatos tipo (NUM,DEN) o ZPK. El Ejemplo 1 plantea el control de un sistema de primer orden con tiempo de retardo. El Ejemplo 2 introduce un doble integrador, como ejemplo de partida de un sistema que no se puede controlar con una red de este tipo. El Ejemplo 3 trata del control de un sistema de segundo orden con un integrador.

Ejercicios

1. Considere un sistema descrito por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(0.5s+1)}$$

Las especificaciones del lazo cerrado de este sistema, descrito en [31] (página 505), son:

- a) La constante de error estático de velocidad debe ser $K_v = 5 \text{ s}^{-1}$.
- b) El margen de fase debe ser de al menos 40° .

Diseñe un controlador que permita cumplir las especificaciones y compruebe los resultados usando la herramienta.

2. Seleccione el Ejemplo 1 del menú Opciones de la herramienta, correspondiente a un sistema con un tiempo de retraso t_r mayor que la constante de tiempo del sistema τ :

$$G(s) = \frac{2}{s+1} e^{-2s}$$

Compruebe cómo el sistema compensado únicamente con la ganancia proporcional K es inestable, mientras que la red consigue estabilizar al sistema en lazo cerrado a través de una reducción de la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} del sistema. Encuentre la red de retraso de fase con la que se consigue una frecuencia de cruce de ganancia $\omega_{cg} = 1 \text{ rad/s}$. ¿Cuál es el valor del MF ?

3. Escoja el Ejemplo 2 del menú Opciones de la herramienta, correspondiente a un doble integrador $G(s) = 0.1/s^2$ (sistema tipo 2). ¿Se puede aplicar el método descrito a este caso? Justifique la respuesta (puede serle de ayuda un análisis en el lugar de las raíces).
4. Seleccione el Ejemplo 3 del menú Opciones de la herramienta, correspondiente a un sistema con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{0.1}{s(s+1)}$$

Justifique por qué el polo p_c y el cero z_c del controlador se encuentran tan cercanos al eje imaginario. ¿Por qué el comportamiento temporal es peor que el que se alcanza compensando el sistema únicamente con K ? ¿Qué margen de fase habría que poner como especificación para que las respuestas temporales fueran similares? ¿A partir de qué valor de MF basta con utilizar un controlador proporcional K ?

5. Diseñe una red de retraso de fase para el sistema

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

para que $K_v = 20$ y el margen de fase sea de 45° (referencia [9], páginas 609-610). Interprete los resultados.

7.5 Diseño de controladores de avance de fase en el dominio frecuencial

Herramienta interactiva: [7.5. f_diseño_avance](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Especificaciones en el diseño frecuencial de controladores de avance de fase.
- Diseño de controladores de avance de fase en el dominio de la frecuencia.

Teoría Esta ficha está dedicada al diseño de redes de avance de fase en el dominio de la frecuencia. La función de transferencia que representa a este compensador es:

$$C(s) = K \frac{\beta s + 1}{\tau s + 1} = KC_{\tau\beta}(s) = K \frac{\beta s + 1}{\alpha \beta s + 1}, \quad \alpha = \frac{\tau}{\beta}$$

Como ocurría en el caso del diseño basado en el diagrama de Bode de redes de retraso de fase, se siguen una serie de pasos para el diseño del controlador.

1. En primer lugar se escoge la ganancia K que satisfaga los condicionantes de error en régimen estacionario (en forma de las constantes de error K_p , K_v o K_a).
2. Se comprueba si el sistema compensado con esa ganancia ($KG(s)$) cumple las otras especificaciones de comportamiento transitorio o estabilidad relativa para la nueva frecuencia de cruce ω_{cg1} . Si no los cumple, se calcula la fase positiva que es necesario aportar en esa frecuencia de cruce para cumplir la especificación de margen de fase. Esa fase la aportará el polo y el cero de la red (función $C_{\tau\beta}(s)$) buscando que sea su máximo ϕ_m . La fase introducida por la red de avance es:

$$\angle C_{\tau\beta}(j\omega) = \arctan(\beta\omega) - \arctan(\tau\omega)$$

Como se ha indicado, para cumplir la especificación de margen de fase, se busca que en $\omega = \omega_{cg1}$ el compensador introduzca fase adicional. La frecuencia a la cual el controlador introduce máxima fase puede encontrarse derivando respecto a la frecuencia la ecuación anterior. Se obtiene que $\omega_m = 1/\sqrt{\beta\tau}$ (resultado ya mostrado en la Figura 7.2). Es conveniente que se haga coincidir $\omega_{cg1} = \omega_m$, para que la máxima fase se introduzca en la frecuencia de cruce de $KG(j\omega)$. La máxima fase que puede introducir el controlador es por tanto $\angle C_{\tau\beta}(j\omega_m) = \angle C_{\tau\beta}(j\omega_{cg1}) = \phi_m$. Aplicando trigonometría (ver Figura 7.2) se pueden obtener las relaciones:

$$\text{sen}(\phi_m) = \frac{\beta - \tau}{\beta + \tau} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}$$

La amplificación de ganancia AG adicional que introduce la red (teniendo en cuenta la pendiente positiva de 20 dB/década a partir de $\omega = 1/\beta$, ver Figura 7.5) en dB, en $\omega = \omega_m$ es:

$$AG = |C_{\tau\beta}(j\omega_m)|_{dB} = 10 \log \left(\frac{\beta}{\tau} \right) = 10 \log \left(\frac{1}{\alpha} \right)$$

La red de avance de fase no va a proporcionar su máxima fase ϕ_m en ω_{cg1} , ya que se está cambiando ligeramente la frecuencia de cruce debido a la citada amplificación de ganancia AG , que provoca que la frecuencia de cruce real ω_{cg} sea ligeramente mayor que ω_{cg1} . Dado que el compensador aporta esa ganancia, lo que se hace es aplicar el compensador en una frecuencia en la que el

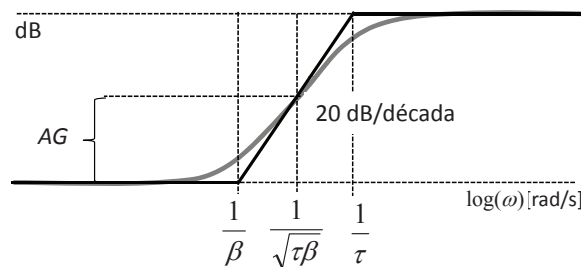


Figura 7.5 Cálculo de la ampliación de ganancia AG

sistema tiene una ganancia inversa a la que aporta la red. Como en la nueva frecuencia de corte la fase del sistema no es exactamente igual a la que tiene en ω_{cg1} , se suman unos pocos grados a la especificación de margen de fase en el diseño (MS , conocido como margen de seguridad, generalmente entre 5° y 12°). Por tanto, $\phi_m = MF_{deseado} + MS - 180^\circ - \angle KG(j\omega_{cg1})$, donde $MF_{deseado}$ es el margen de fase dado por las especificaciones.

- Si se denota $\alpha = \tau / \beta$, calcular:

$$\alpha = \frac{1 - \text{sen}(\phi_m)}{1 + \text{sen}(\phi_m)} = \frac{\tau}{\beta} \quad (7.15)$$

- Encontrar la frecuencia a la cual:

$$KG(j\omega_{cg}) = -10 \log\left(\frac{1}{\alpha}\right) = -10 \log\left(\frac{\beta}{\tau}\right)$$

que es la magnitud que va a introducir la red. Esta frecuencia va a ser la frecuencia de cruce ω_{cg} del sistema compensado.

- Se pueden por tanto obtener los valores de τ y β de (7.15) y de

$$\frac{1}{\sqrt{\tau\beta}} = \omega_m = \omega_{cg} \quad (7.16)$$

- Dibujar el diagrama de Bode de $C(j\omega)G(j\omega)$ para confirmar el diseño. Si no se consigue compensar el sistema puede que las especificaciones sean muy exigentes y haya que recurrir a otros métodos de diseño.

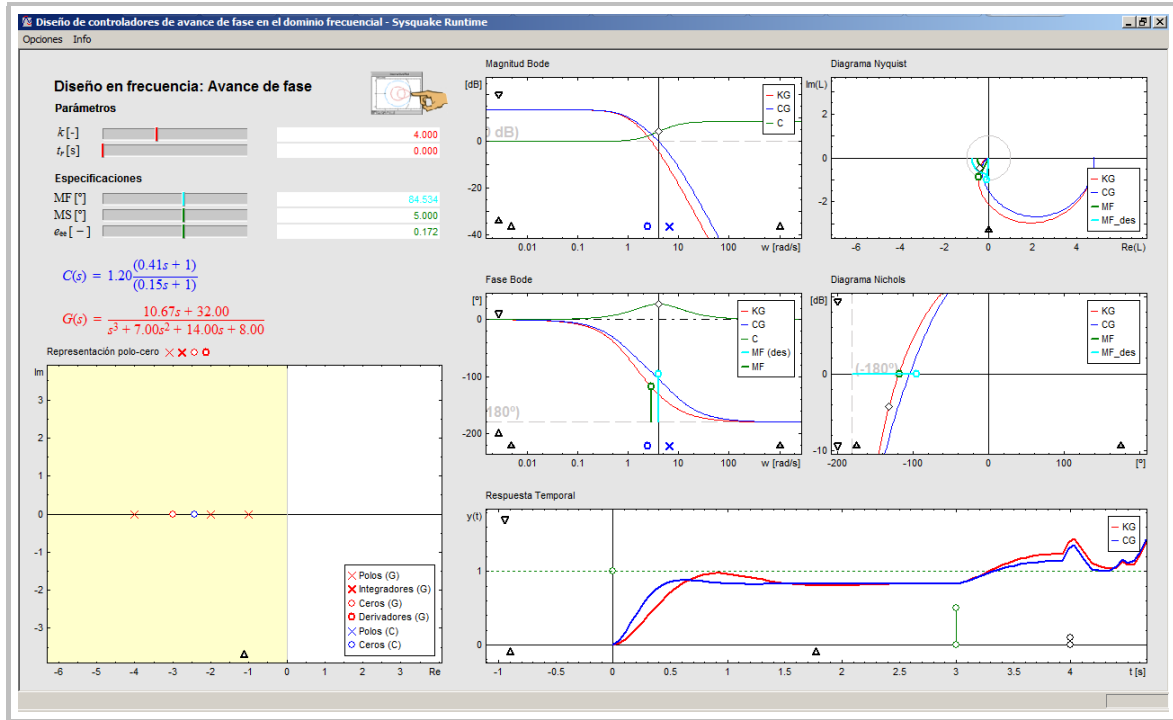
Las redes de avance de fase se usan para mejorar los márgenes de estabilidad. Con ellas se consigue además una frecuencia de corte más alta que la que se puede conseguir con redes de retraso de fase, lo que provoca una respuesta más rápida del sistema en lazo cerrado, pero con el inconveniente de su sensibilidad a ruido de alta frecuencia.

Bibliografía

- [4] Barrientos, A., R. Sanz, F. Matía y E. Gambao. Control de sistemas continuos. Problemas resueltos. Mc Graw Hill, ISBN: 84-481-0605-9. Capítulo 9, sección 9, páginas 362-369, 1996.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN:84-205-4401-9. Capítulo 10, sección 4, páginas 589-595, Problema 10.4, página 657, 2005.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 7, sección 12, páginas 493-502, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 7, sección 4, apartado 4, páginas 185-194, 1993.

Aplicación

Herramienta interactiva: 7.5. f_diseño_avance



Diseño en frecuencia: Avance de fase

Esta herramienta interactiva es muy similar a la [7.4. f_diseño_retrazo](#) en cuanto a su distribución y elementos interactivos, aunque el diseño busca otros objetivos.

El área superior izquierda incluye dos **Parámetros** de las funciones de transferencia $G(s)$ no configurables desde otras partes de la herramienta, como son la ganancia estática k y el tiempo de retardo t_r , cuyos valores se pueden cambiar a través de los cuadros de texto y las barras de desplazamiento de color **rojo**. A continuación se encuentra la sección de **Especificaciones**, que como se ha visto en el resumen de teoría contiene una especificación sobre error en estado estacionario e_{ee} , el margen de fase deseado MF y el margen de seguridad MS que se suma a ϕ_m para compensar el aumento en la frecuencia de corte que produce el cero de la red.

Bajo los cuadros de texto y barras de desplazamiento asociados a las especificaciones, se dibuja en color **rojo** la representación simbólica de la función de transferencia $G(s)$ y en **azul** la del controlador de avance de fase $C(s)$.

Es importante destacar que la especificación de error en régimen estacionario e_{ee} está ligada al tipo del sistema. Si $G(s)$ es tipo 0, e_{ee} será una especificación de error en régimen estacionario cuando la referencia es un escalón unitario. Del mismo modo, si $G(s)$ es tipo 1, la especificación se referirá a error en régimen estacionario cuando la entrada es una rampa, y así sucesivamente.

Aplicación...

La gráfica de Representación polo-cero incorpora en este caso los elementos dinámicos de $G(s)$, representados en color rojo (polos, integradores, ceros y derivadores), y el polo y el cero de la red de avance de fase en color azul. La leyenda incluida en la parte inferior derecha de la gráfica facilita la determinación de cada uno de estos elementos. Junto al título de la gráfica se encuentra localizado el repositorio de elementos dinámicos ($\times \times \circ \circ$), que pueden arrastrarse con el ratón dentro de la ventana para aumentar el orden del sistema que se está representando. También se pueden arrastrar desde dentro hacia el repositorio para eliminar algún elemento dinámico.

En la parte superior derecha de la herramienta cabe la opción de representar el Diagrama de Bode, el Diagrama de Nyquist, el Diagrama de Nichols o todos a la vez. La elección de la representación se realiza a través del menú Opciones situado en la esquina superior izquierda de la herramienta. En todas estas gráficas se representa en color rojo la respuesta frecuencial del sistema compensado únicamente con ganancia $KG(s)$, en color azul la respuesta en frecuencia del sistema compensado $C(s)G(s)$ y en color verde la respuesta en frecuencia del compensador $C(s)$ (sólo en el Diagrama de Bode). Todas las gráficas incluyen leyendas aclaratorias. En estas curvas se incluyen también dos segmentos (o arcos en el caso del Diagrama de Nyquist) que tienen en su extremo un círculo y que representan el margen de fase del sistema $KG(s)$ (en color verde) y el margen de fase deseado (en color celeste). Este último es interactivo, de modo que desde las gráficas se puede modificar la especificación de MF .

En el Diagrama de Bode se indican las líneas de 0 dB y de -180° en trazo de color gris discontinuo. En el eje de frecuencias se representa un aspa (\times) y un círculo (\circ) no interactivos que determinan la posición del polo p_c y del cero z_c del compensador respectivamente. Al colocar el ratón sobre ellos, se muestra su valor en la esquina inferior izquierda de la herramienta. El símbolo \diamond está ligado a la frecuencia de corte $\omega_{cg} = \omega_m$ del sistema compensado $C(s)G(s)$ (y por tanto al punto de máxima fase ϕ_m y amplificación de ganancia AG , directamente relacionados con el parámetro α de la red).

En el Diagrama de Nyquist se puede ver cómo el símbolo \diamond se desplaza sobre la curva de frecuencia desde el círculo que pasa por el punto crítico $(-1, 0j)$ hasta el origen (que corresponde con valores de α entre 1 y 0). En el Diagrama de Nichols la interpretación es similar.

Todas las gráficas cuentan con triángulos ubicados en el eje de abscisas, que facilitan el cambio de escala cuando se pulsa con el ratón a la derecha o izquierda de los mismos. En el caso de los situados en el eje de ordenadas, hay que pulsar encima o debajo de los mismos.

El menú Opciones incluye un conjunto de ejemplos prácticos, además de la posibilidad de introducir funciones de transferencia genéricas en formatos tipo (NUM,DEN) o ZPK. El Ejemplo 1 plantea el control de un sistema de primer orden con tiempo de retardo. El Ejemplo 2 introduce un doble integrador. El Ejemplo 3 trata del control de un sistema de segundo orden con un integrador.

Ejercicios

1. Suponga un sistema con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{4}{s(s+2)}$$

Se desea diseñar un compensador para que la constante de error estático de velocidad sea $K_v = 20 \text{ s}^{-1}$, el margen de fase de al menos 50° y el margen de ganancia como mínimo de 10 dB (ejemplo de

la referencia [31], página 496). Calcule haciendo uso de la herramienta los parámetros K , τ y β del controlador. Compruebe que para sistemas tipo 1 como el de este ejercicio, el valor de la constante de error estático de velocidad K_v es el valor de la frecuencia en la intersección de la extensión de la línea de pendiente inicial de -20 db/década con la línea de 0 dB.

2. Seleccione el Ejemplo 1 del menú de Opciones situado en la esquina superior izquierda de la herramienta. Analice lo que ocurre cuando intenta imponer una especificación con un MF superior al inicial. ¿Cómo justifica el comportamiento que observa en lazo cerrado?
3. Escoja el Ejemplo 2 del menú de Opciones, correspondiente a un doble integrador sin tiempo de retardo. Justifique si ese sistema se puede estabilizar utilizando únicamente un controlador proporcional K . ¿Cuál es su margen de fase? ¿Se podrá estabilizar utilizando una red de avance de fase? Se recomienda realizar un análisis tanto con la herramienta interactiva descrita en esta sección como usando el lugar de las raíces para responder a estas preguntas. Comente la estructura y los parámetros de la red de avance de fase que se obtienen aplicando este método. ¿A qué otro controlador conocido se asemeja? ¿Cuál es el valor del tiempo de retardo del sistema que haría que el sistema en lazo cerrado se inestabilice?
4. Utilice el Ejemplo 3 del menú de Opciones. Indique los valores de los parámetros del controlador con los que se consigue un $MF = 75^\circ$.
5. Diseñe una red de avance de fase para que el sistema dado por:

$$G(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 0.1)(s^2 + 10s + 29)}$$

tenga un error en régimen permanente cuando la referencia es un escalón del 1% y un margen de fase de 60° (referencia [4], páginas 362-369).

6. Se considera un sistema con una función de transferencia $G(s) = 1/s(s + 2)$. Diseñe una red de avance de fase para que el error en régimen estacionario cuando la referencia es una rampa sea inferior al 5% y el margen de fase sea al menos de 45° (referencia [9], páginas 592-595).

7.6 Diseño de controladores de avance y retraso de fase en el dominio frecuencial

Herramienta interactiva: [7.6. f_diseño_avance_retraso](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Diseño de controladores de avance y retraso de fase en el dominio de la frecuencia.

Teoría Los métodos frecuenciales toman como especificaciones el cumplimiento de un cierto error en estado estacionario e_{ee} y un determinado margen de fase MF . Existe la posibilidad de añadir un grado de libertad adicional como especificación (ω_{cg}), pudiéndose desarrollar un método matemático que permita alcanzar tres especificaciones (dado que el controlador tiene tres parámetros K , β y τ), en caso de que exista solución.

Se supone por tanto que en lo que sigue la ganancia proporcional del controlador se ha calculado previamente basándose en especificaciones de estado estacionario.

Si se toma la formulación del controlador en forma de constantes de tiempo y se particulariza para la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} , imponiendo que para dicha frecuencia de cruce el sistema compensado tenga un margen de fase MF , se tiene que:

$$C(j\omega_{cg})G(j\omega_{cg}) = K \frac{(j\omega_{cg}\beta + 1)}{(j\omega_{cg}\tau + 1)} \rho_G e^{j\phi_G} = 1e^{j(-180^\circ + MF)}$$

$$\frac{j\omega_{cg}\beta + 1}{j\omega_{cg}\tau + 1} = \frac{1}{K\rho_G} e^{j(MF - 180^\circ - \phi_G)} = \frac{1}{K\rho_G} (-\cos(MF - \phi_G) - j \sin(MF - \phi_G)) \quad (7.17)$$

donde ρ_G y ϕ_G son la magnitud (que no está expresada en dB) y la fase de $G(j\omega)$ en $\omega = \omega_{cg}$. Nótese que se han utilizado la notación exponencial y la notación polar para representar la condición de margen de fase (se impone la condición de que en la frecuencia de cruce de ganancia del sistema compensado la magnitud es 1 y el margen de fase es igual a MF , que es conocido de las especificaciones).

Separando la ecuación (7.17) en sus partes real e imaginaria, se puede resolver un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas:

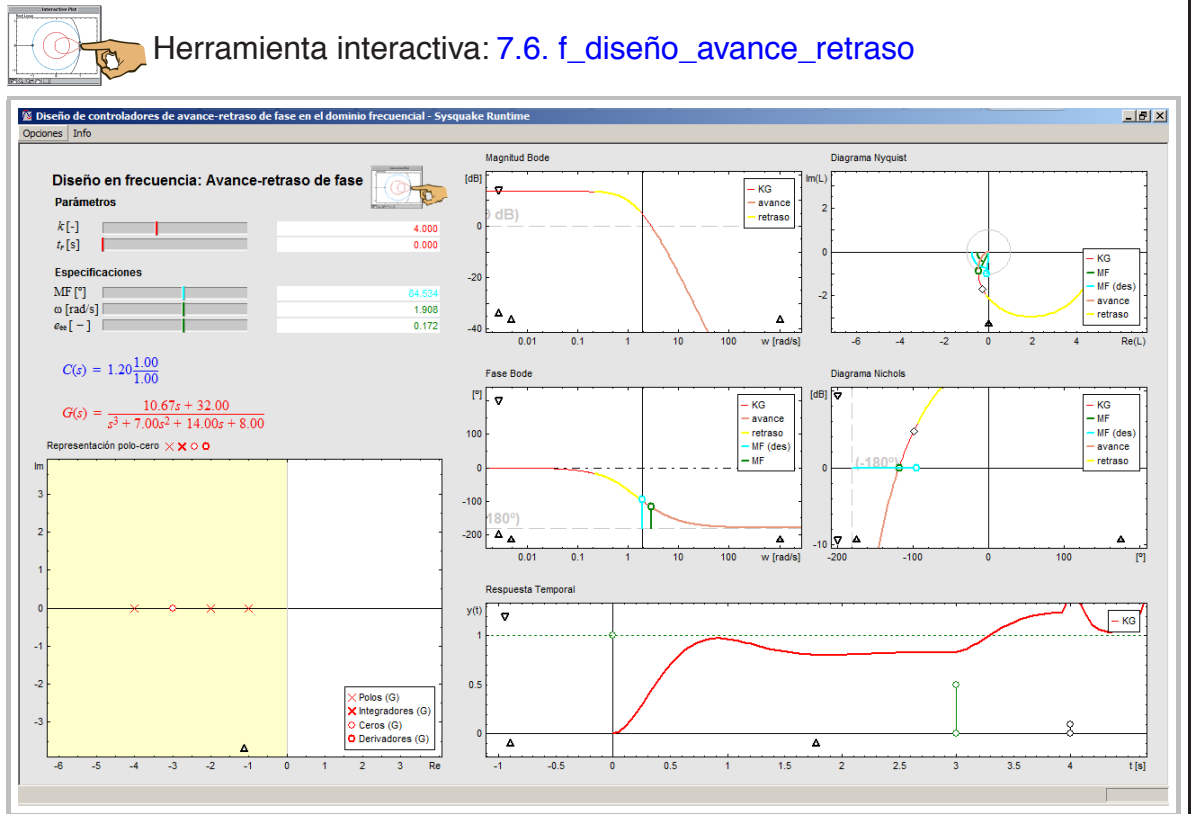
$$\beta = \frac{1 + K\rho_G \cos(MF - \phi_G)}{-\omega_{cg}K\rho_G \sin(MF - \phi_G)} \quad \tau = \frac{\cos(MF - \phi_G) + K\rho_G}{\omega_{cg} \sin(MF - \phi_G)} \quad (7.18)$$

Para usar estas ecuaciones es necesario determinar antes K de las especificaciones de estado estacionario y dibujar el diagrama de Bode para $KG(j\omega)$. De dicho diagrama se determina ρ_G y ϕ_G en $\omega = \omega_{cg}$ (lógicamente este ω_{cg} es una especificación relacionada con la rapidez de respuesta y se suele determinar como una estimación de la frecuencia natural del sistema en lazo cerrado, que se obtiene de las especificaciones del transitorio suponiendo que el comportamiento del sistema en lazo cerrado va a ser de segundo orden subamortiguado). Es importante recordar que K y ρ_G son la magnitud real (no expresadas en dB). Si los valores obtenidos de τ y β son negativos, quiere decir que las especificaciones son muy exigentes y no se pueden cumplir con esa estructura del controlador, por lo que habrá que relajarlas o bien utilizar otra estrategia de control.

Bibliografía

- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 7, sección 4, apartado 5, páginas 189-192, 1993.

Aplicación



Diseño en frecuencia: Avance y retraso de fase

El área superior izquierda de la herramienta facilita la modificación (a través de cuadros de texto y barras de desplazamiento) tanto de **Parámetros** del sistema (su ganancia estática k y el tiempo de retardo t_r) como de las **Especificaciones** del problema (margen de fase MF , frecuencia de cruce ω_{cg} y error en estado estacionario e_{ss}). Se representa también bajo estas secciones la función de transferencia simbólica del sistema $G(s)$ y la del controlador $C(s)$. El error en estado estacionario al que hace referencia esta especificación es:

- De posición, cuando la referencia es un escalón unitario, si $G(s)$ es tipo 0.
- De velocidad, cuando la referencia es una rampa unitaria, si el sistema es tipo 1.
- De aceleración, cuando la referencia es una parábola unitaria, si el sistema es tipo 2.

Los elementos dinámicos de $G(s)$ (polos, integradores, ceros y derivadores - ×, ×, ○, ○) se introducen y modifican a través del editor de polos y ceros asociado a la Representación polo-cero, arrastrando elementos del repositorio que hay junto al título de la figura. Estos elementos dinámicos se pueden colocar en cualquier posición del plano complejo simplemente arrastrándolos con el ratón a esa posición (lógicamente, los polos y ceros complejos conjugados deben ir por parejas, en caso contrario no se permite el desplazamiento).

Aplicación...

Se pueden eliminar los elementos interactivos simplemente arrastrándolos de nuevo hacia el repositorio de la gráfica. El polo y el cero del compensador se dibujan en color **azul**, como se indica en la leyenda situada en la parte inferior derecha de la representación del plano s .

El área superior derecha de la herramienta incluye las distintas representaciones frecuenciales de $L(j\omega) = C(j\omega)G(j\omega)$: Diagrama de Bode, Diagrama de Nyquist y Diagrama de Nichols, pudiendo seleccionarse cada uno de ellos como vista única o representarse simultáneamente, según la elección que se haga en el menú Opciones situado en la esquina superior izquierda de la herramienta.

En todos los casos se utiliza una línea de color **rojo** para dibujar la respuesta en frecuencia de $KG(s)$, el color **azul** para $C(s)G(s)$ y el color **verde** para $C(s)$ (únicamente en el diagrama de Bode). Como novedades en esta ficha, sobre las curvas de las representaciones gráficas del sistema $KG(s)$ se superponen trazos de color amarillo (—) para indicar el intervalo de frecuencias de diseño en las que el controlador que permite cumplir las especificaciones es una red de retraso de fase. Del mismo modo, se representan en color marrón (—) los segmentos de la respuesta temporal de $KG(s)$ situados en frecuencias donde la solución al problema es una red de avance de fase. Los trazos que quedan en color **rojo** indican que la solución al problema con las especificaciones dadas es un controlador proporcional con ganancia K . Las gráficas incluyen leyendas explicativas de la gama de colores utilizada.

El margen de fase del sistema $KG(s)$ se representa mediante un segmento de color **verde**, terminado en un círculo del mismo color situado sobre la respuesta en frecuencia. El margen de fase deseado, MF (des), se representa mediante un segmento de color **celeste**, también finalizado en un círculo del mismo color que se puede desplazar para cambiar esta especificación (modificando automáticamente al resto de elementos interactivos de la herramienta que se ven afectados por este valor).

En los diagramas frecuenciales se muestra también un símbolo \diamond representativo de la frecuencia de corte de diseño. En el Diagrama de Bode, ese elemento se sitúa en el cruce de una línea vertical negra interactiva que permite modificar la frecuencia de cruce ω_{cg} del sistema compensado con las curvas de frecuencia del compensador. En el Diagrama de Nyquist y el Diagrama de Nichols el símbolo \diamond se sitúa sobre la gráfica de $KG(j\omega)$ y facilita el cambio de la frecuencia de diseño ω_{cg} , que en estos diagramas es una variable implícita.

El Diagrama de Bode contiene en el eje de frecuencias un aspa (\times) y un círculo (\circ) asociados respectivamente con el polo p_c y el cero z_c de la red. Su posición se calcula automáticamente por el algoritmo y por tanto no se trata de elementos interactivos.

En la gráfica de Respuesta temporal se utiliza el color **rojo** para representar la salida del sistema en lazo cerrado cuando $L(s) = KG(s)$ y el color **azul** para $L(s) = C(s)G(s)$. Al igual que en otras herramientas, la línea discontinua horizontal de color **verde** y el círculo situado al comienzo de la misma (\circ) se pueden utilizar para cambiar la amplitud del escalón en la referencia. A mitad de la gráfica, sobre el eje de tiempos, se sitúa un segmento de trazo fino de color **verde** con dos círculos. El círculo superior se puede cambiar en dirección vertical, e indica la amplitud del escalón en la perturbación de carga a la entrada del sistema. El inferior posibilita el cambio del instante en que se introduce la perturbación. Del mismo modo, los círculos de color negro situados a la derecha de los anteriores facilitan la modificación de la varianza del ruido de salida y del instante en que se activa dicha señal.

En todas las gráficas se incluyen triángulos de color negro que se utilizan para cambiar el fondo de escala de las gráficas, pulsando con el ratón a la derecha o izquierda de los situados en el eje de abscisas y en la parte superior o inferior de los ubicados en el eje de ordenadas.

El menú Opciones incluye un conjunto de ejemplos prácticos, además de la posibilidad de introducir funciones de transferencia genéricas en formatos tipo (NUM,DEN) o ZPK. El Ejemplo 1 plantea el control de un sistema de primer orden con tiempo de retardo. El Ejemplo 2 introduce un doble integrador. El Ejemplo 3 trata del control de un sistema de segundo orden con un integrador.

Ejercicios

1. Cuando arranca la herramienta, por omisión se escoge un sistema de tercer orden con un cero y sin retraso, con unas especificaciones de $MF = 84.5^\circ$, $\omega_{cg} = 1.9 \text{ rad/s}$ y $e_{ee} = 0.172$. Como el sistema es tipo cero, dicho error se refiere a un cambio en forma de escalón unitario en la referencia. Determine los intervalos de frecuencias de corte de ganancia ω_{cg} donde la solución al problema es un controlador proporcional, una red de retraso de fase o un compensador de avance de fase.
2. Repita el ejercicio considerando una especificación de $e_{ee} = 0.1$ y ganancia estática $k = 1$ en el sistema. Introduzca una perturbación de carga a la entrada de amplitud 1 en $t = 3 \text{ s}$ y un ruido de varianza 0.05 en $t = 6 \text{ s}$, escalando adecuadamente la gráfica de respuesta temporal. Indique desde su punto de vista cuál es el controlador de todos los que cumplen las especificaciones que representa la mejor solución de compromiso en cuanto a buen seguimiento de la referencia, rechazo de la perturbación y baja sensibilidad al ruido.
3. Repita los dos ejercicios anteriores cuando se considera que el sistema además tiene un tiempo de retardo $t_r = 0.2 \text{ s}$.
4. Considere el sistema descrito por la función de transferencia (referencia [35], página 191):

$$G(s) = \frac{400}{s(s^2 + 30s + 200)}$$

Se dan las siguientes especificaciones de funcionamiento:

- a) Error en estado estacionario cuando la referencia es una rampa unitaria inferior a 10 %.
- b) Frecuencia de cruce de ganancia igual a $\omega_{cg} = 14 \text{ rad/s}$.
- c) Margen de fase $MF = 45^\circ$.

Calcule un compensador por avance o retraso de fase que permita cumplir esas especificaciones.

7.7 Diseño de controladores de retraso de fase en el lugar de las raíces

Herramienta interactiva: [7.7. lr_diseño_retraso](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Especificaciones en el diseño basado en el lugar de las raíces de controladores de retraso de fase.
- Diseño de controladores de retraso de fase basado en el lugar de las raíces.

Teoría El objetivo principal del diseño de redes de retraso de fase usando el lugar de las raíces es reducir el error en estado estacionario preservando unas ciertas características en la respuesta temporal, teniendo en cuenta que, como se analizó en la Sección 7.4 reducen el valor de la frecuencia de cruce de ganancia ω_{cg} .

Se suelen diseñar utilizando cualquiera de las dos expresiones siguientes del controlador, si bien es más apropiado usar la representación polo-cero:

$$C(s) = K_c \frac{s - z_c}{s - p_c} \Big|_{p_c \approx z_c} = K \frac{\beta s + 1}{\tau s + 1} \quad K_c = K \frac{\beta}{\tau}, \quad z_c = -\frac{1}{\beta}, \quad p_c = -\frac{1}{\tau}$$

El método de diseño basado en el lugar de las raíces se suele utilizar en sistemas que satisfacen de antemano las especificaciones de estabilidad y comportamiento transitorio, pero tienen un error en estado estacionario superior al deseado. Los pasos que generalmente se siguen a la hora de diseñar un compensador de retraso de fase son los siguientes:

1. Se determina un punto s_1 (raíz compleja) del lugar de las raíces de $K_c G(s)$ que satisfaga las especificaciones de comportamiento dinámico. Obsérvese que por la condición de módulo del lugar de las raíces $K_c = 1/|G(s_1)|$, por lo que el valor de K_c se obtiene de aplicar esta condición.
2. Se determina la ganancia de baja frecuencia del compensador que se requiere para cumplir las especificaciones de error en estado estacionario (constantes de error estático K_p , K_v ó K_a según sea el tipo del sistema sin compensar).
3. Si el valor de K_c obtenido en el punto 1 no es suficiente para cumplir la especificación de error en estado estacionario, se determinan el polo y el cero del compensador de retraso de fase que producen el incremento necesario en la constante de error estático sin modificar apreciablemente los lugares de las raíces originales. En este esquema se coloca el polo de la red (p_c) muy cerca del eje imaginario, y el cero muy cerca del polo, para que el desfase que introduce la red no afecte al comportamiento dinámico (nunca debe ser mayor de 5°) y apenas se modifique el lugar de las raíces respecto al del sistema $K_c G(s)$. De este modo, los polos en lazo cerrado del sistema compensado sólo se alejarán ligeramente de sus situaciones originales. Por tanto, la característica de respuesta transitoria cambiará muy poco. Con esa elección se cumplirá que:

$$\frac{|s_1 - p_c|}{|G(s_1)||s_1 - z_c|} \approx \frac{1}{|G(s_1)|} = K_c \rightarrow |C(s_1)| \approx K_c$$

La relación entre el valor de la ganancia requerido en las especificaciones y la ganancia del sistema no compensado es la razón entre la distancia del cero al origen y la del polo. En régimen estacionario la ganancia del compensador es $K_c(z_c/p_c)$, por lo que si K_c había sido calculado para que el lugar de las raíces de $K_c G(s)$ pase por s_1 , la forma de aumentar la ganancia es a través del cociente z_c/p_c . Por tanto, si se ha fijado arbitrariamente p_c (siempre en un valor entre 0 y -1 para conseguir cocientes z_c/p_c suficientemente grandes), se obtiene z_c .

El efecto negativo que esta elección tiene sobre el comportamiento del sistema en lazo cerrado es que existirá un polo del sistema en lazo cerrado muy cerca del origen, cuya influencia se verá atenuada por el cero de la red, que seguirá siendo un cero del sistema en lazo cerrado.

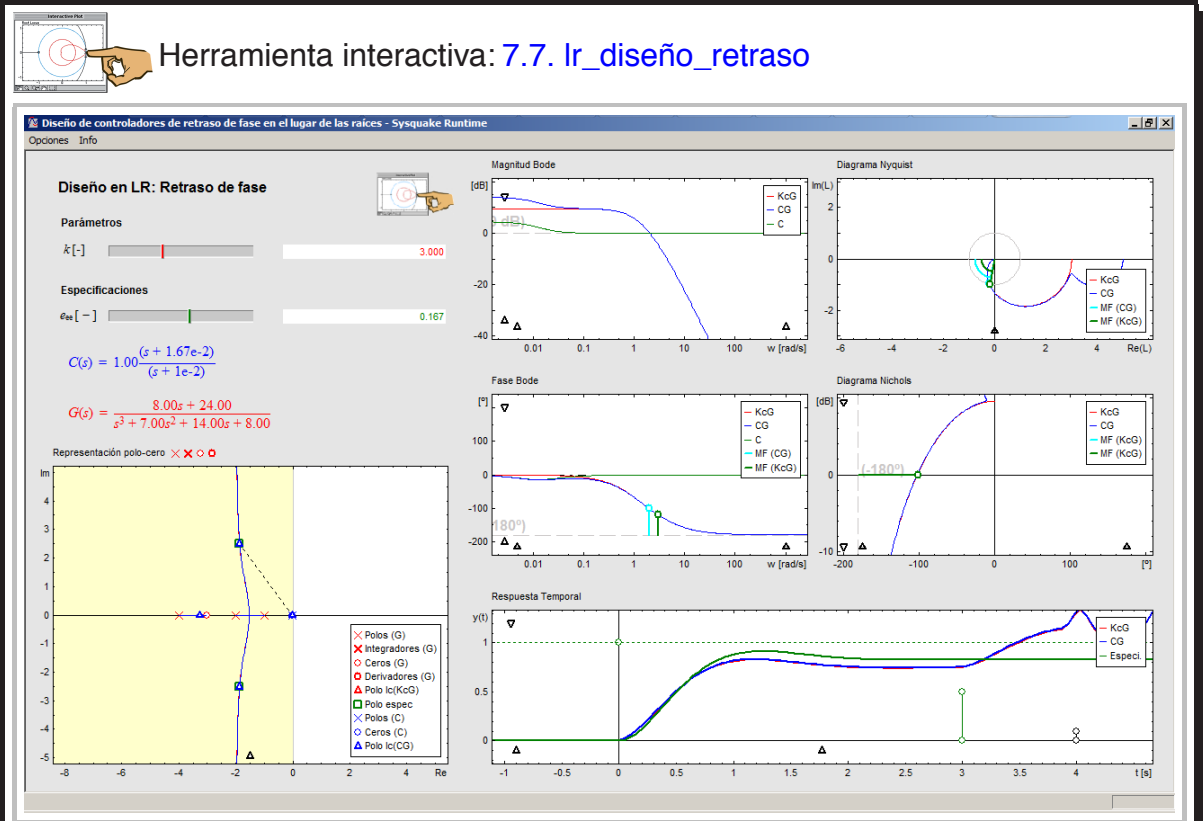
Intuitivamente, se puede entender que si en el límite se selecciona el polo de la red igual a cero ($p_c = 0$), se está añadiendo un integrador al sistema, aumentando el tipo y reduciendo los errores en estado estacionario.

El empleo efectivo del controlador de retraso de fase para mejorar el amortiguamiento requiere colocar el polo y el cero muy cercanos. Para sistemas tipo 0 y tipo 1 la combinación debe estar situada cercana al origen en el plano s . El control de retraso de fase no debe aplicarse a sistemas tipo 2 [26].

Bibliografía

- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN:84-205-4401-9. Capítulo 10, sección 7, páginas 604-608, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Pearson. ISBN:978-0-13-500150-9. Capítulo 5, sección 4, páginas 272-273, 2010.
- [26] Kuo, B. C. Sistemas de control automático. Prentice Hall, ISBN: 968-880-723-0. Capítulo 10, sección 6, páginas 743-759, 1996.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 7, sección 5, apartado 3, páginas 194-205, 1993.

Aplicación



Diseño en LR: Retraso de fase

A la vista del método de diseño explicado en el resumen de teoría, en esta herramienta sólo hay que dar la función de transferencia $G(s)$ y la especificación de error en estado estacionario, pues se utiliza la posición relativa del polo y el cero de la red para ajustar dicha especificación. La ganancia estática de $G(s)$ se introduce en la sección de **Parámetros** situada en el área superior izquierda de la herramienta, mientras que los polos y los ceros se configuran en la gráfica de Representación polo-cero. La especificación de error en estado estacionario e_{ss} se establece en la sección de **Especificaciones**. En estos casos se usan cuadros de texto y barras de desplazamiento para la introducción y modificación de valores. Junto a estas secciones se visualizan representaciones simbólicas de $G(s)$ y $C(s)$.

La mencionada Representación polo-cero se sitúa en el área inferior izquierda de la herramienta. En ella se pueden insertar polos (×), ceros (○), integradores (×) y derivadores (○). Los polos y los ceros situados en el plano s se pueden desplazar con el ratón a cualquier posición del eje real (los reales) o a cualquier posición del plano s (los complejos conjugados). Para eliminar algún elemento dinámico de la función de transferencia $G(s)$ basta con arrastrarlo de nuevo hacia el repositorio. El polo (×) y el cero (○) de la red de adelanto o retardo de fase se dibujan en (azul), color que también se usa para indicar la posición de los polos del lazo cerrado originados por el compensador $C(s)$ y denominados (△) Polo lc(CG). Los ceros de lazo cerrado no se representan porque coinciden con los de la función de lazo $L(s) = C(s)G(s)$.

Aplicación...

Los polos dominantes del lazo cerrado proporcionados por las especificaciones del problema se representan por el símbolo (\square) Polo espec. Estos polos son interactivos y permiten imponer la localización deseada de los polos complejos conjugados del lazo cerrado (s_1, s_1^*) de forma sencilla e intuitiva. Cuando se desplazan su posición se refresca en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

El área superior derecha de la herramienta está dedicada a las distintas representaciones frecuenciales seleccionables desde el menú Opciones, desplegable desde la esquina superior izquierda y al que se hará referencia más adelante. Las gráficas frecuenciales incluyen en color **rojo** la curva del sistema $K_c G(s)$, en **azul** la del sistema compensado $C(s)G(s)$ y en **verde** (sólo en el Diagrama de Bode) la del compensador $C(s)$. El margen de fase de $K_c G(s)$ se identifica a través de un segmento (o un arco en el Diagrama de Nyquist) de color **verde** terminado en un círculo del mismo color sobre la curva. El margen de fase de $C(s)G(s)$ también se dibuja mediante un segmento (o un arco) acabado en un círculo sobre la curva frecuencial, en este caso de color **celeste**. Sobre las gráficas se superponen etiquetas explicativas de los códigos de colores utilizados.

En la zona inferior derecha de la herramienta se dibujan las respuestas temporales del lazo cerrado cuando se produce un escalón en la referencia en $t = 0$ para el sistema compensado sólo en ganancia $K_c G(s)$ (en **rojo**) y el sistema compensado con el controlador $C(s)G(s)$ (en **azul**). La línea discontinua horizontal de color **verde** y el círculo situado al comienzo de la misma (\circ) sirven para modificar la amplitud del escalón en la referencia. El segmento de trazo fino de color **verde** con dos círculos situado en la zona central de la gráfica sobre el eje de tiempos facilita el cambio de la amplitud del escalón de perturbación a la entrada del sistema (círculo superior) y el cambio del instante en que se produce la perturbación (círculo inferior). Los círculos de color negro situados a la derecha de los anteriores son elementos interactivos a través de los cuales se puede imponer una determinada amplitud de la varianza del ruido de salida (círculo superior) y el instante en que se activa dicha señal (círculo inferior).

En todas las gráficas se incluyen triángulos de color negro que se utilizan para cambiar el fondo de escala de las gráficas, pulsando con el ratón a la derecha o izquierda de los situados en el eje de abscisas y en la parte superior o inferior de los ubicados en el eje de ordenadas.

El menú Opciones está separado en tres grupos. El primero de ellos, ya comentado, permite seleccionar el tipo de diagrama frecuencial que se quiere representar en el área superior derecha de la herramienta (Diagrama de Bode, Diagrama de Nyquist, Diagrama de Nichols, Vista completa). El siguiente grupo está compuesto por tres opciones:

- Triángulo: Cuando se marca esta opción se incluyen en la representación del lugar de las raíces dos segmentos discontinuos de color negro que unen el polo y el cero de la red de retraso de fase con el polo dominante del lazo cerrado seleccionado para el diseño (s_1).
- LGR original: Cuando se activa esta opción, se superpone al lugar de las raíces del sistema compensado $C(s)G(s)$ el del sistema original compensado únicamente con K_c ($K_c G(s)$).
- Escalón espec: Se habilita la opción de visualizar la respuesta teórica que tendría un sistema de segundo orden cuyos polos estén ubicados en la posición seleccionada en la Representación polo-cero y el error en estado estacionario impuesto en las especificaciones. Esta opción sirve para comparar la respuesta temporal del lazo cerrado obtenida con la que teóricamente se debería alcanzar si el sistema en lazo cerrado fuera de segundo orden.

Aplicación...

Finalmente, viene un grupo con ejemplos prácticos, incluyendo la posibilidad de introducir funciones de transferencia genéricas en formatos tipo (NUM,DEN) o ZPK.

Ejercicios

1. Considere un sistema definido por:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+5)}$$

Las especificaciones de funcionamiento (referencia [35], página 195) son:

- Factor de amortiguamiento relativo de los polos dominantes de lazo cerrado $\zeta = 0.707$.
- Error en estado estacionario a entrada en rampa unitaria menor del 5%.

Diseñe con la herramienta una red de retraso de fase que permita cumplir esas especificaciones.

- Partiendo del ejemplo que se muestra al arrancar la herramienta, justifique usando el diagrama de Nyquist la diferencia que aparece entre la curva roja (correspondiente a $K_c G(s)$) y la azul ($C(s)G(s)$). ¿Por qué no influye apenas esa diferencia en la respuesta temporal de ambos sistemas? Reduzca paulatinamente el valor de la especificación en estado estacionario e_{ee} hasta el valor a partir del cual algún punto de la respuesta temporal del sistema compensado sobrepasaría la referencia en escalón de amplitud 1. Indique los cambios que se han producido en la gráfica del lugar de las raíces.
- Reinicie la herramienta y vuelva a considerar el estado inicial del ejemplo contemplado en el apartado anterior. Desplace los cuadros que representan la localización deseada de los dos polos dominantes del sistema en lazo cerrado. ¿Por qué llega un momento en que desaparece la respuesta en frecuencia del sistema $C(s)G(s)$? Justifique la respuesta.
- Seleccione el Ejemplo 3 del menú Opciones. Indique el valor de error de régimen permanente e_{ee} por debajo del cual no se puede usar una red de compensación con los parámetros que se muestran por omisión al seleccionar este ejemplo.
- Considere un sistema dado por:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$$

Diseñe una red de retraso de fase que proporcione un factor de amortiguamiento relativo de las raíces complejas dominantes de 0.45 y una constante de error de velocidad igual a 20 (referencia [9], páginas 606-607).

7.8 Diseño de controladores de avance de fase en el lugar de las raíces

Herramienta interactiva: [7.8. lr_diseño_avance](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Especificaciones en el diseño basado en el lugar de las raíces de controladores de avance de fase.
- Diseño de controladores de avance de fase basado en el lugar de las raíces.

Teoría En el diseño de redes de avance de fase basado en el lugar de las raíces, en función de la técnica utilizada, se usan representaciones de la función de transferencia del sistema y del controlador tanto en formato polo-cero como de constantes de tiempo (para simplificar y sin pérdida de generalidad, sólo se muestra la fórmula con polos y ceros reales):

$$G(s) = \kappa \frac{\prod_{j=1}^m (s - z_j)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)} = k \frac{\prod_{j=1}^m (\beta_j s + 1)}{\prod_{i=1}^n (\tau_i s + 1)}, \quad k = \kappa \frac{\prod_{j=1}^m (-z_j)}{\prod_{i=1}^n (-p_i)}, \quad \kappa = k \frac{\prod_{j=1}^m \beta_j}{\prod_{i=1}^n \tau_i}, \quad z_j = -\frac{1}{\beta_j}, \quad p_i = -\frac{1}{\tau_i}$$

$$C(s) = K_c \frac{s - z_c}{s - p_c} = K \frac{\beta s + 1}{\tau s + 1} \quad K = K_c \frac{z_c}{p_c}, \quad K_c = K \frac{\beta}{\tau}, \quad z_c = -\frac{1}{\beta}, \quad p_c = -\frac{1}{\tau}$$

La idea que subyace en el método de diseño de redes de avance de fase utilizando el lugar de las raíces es reorganizar dicho lugar añadiendo un polo y un cero (los del compensador) a los del sistema en lazo abierto para conseguir que el lugar geométrico pase por un punto determinado del plano complejo seleccionado a partir de las especificaciones (ese punto suele ser un polo dominante deseado del sistema en lazo cerrado). En muchos casos, esas especificaciones vienen dadas en términos de cantidades en el dominio del tiempo (sobreooscilación, tiempo de subida, tiempo de pico, ...) que proporcionan la frecuencia natural no amortiguada ω_n y el factor de amortiguamiento relativo ζ de los dos polos dominantes del lazo cerrado.

Existen diversos métodos de diseño basados en el lugar de las raíces. Los pasos comunes son:

1. Determinar a partir de las especificaciones de régimen transitorio, la localización de los polos complejos conjugados dominantes (s_1, s_1^*) del sistema en lazo cerrado.
2. Se comprueba usando el lugar de las raíces del sistema original (sin compensar), si simplemente ajustando la ganancia (usando una ganancia K de un control proporcional) se pueden situar los polos en lazo cerrado en la posición deseada en el plano s . Si no es posible, hay que calcular el ángulo que debe proporcionar el compensador de avance de fase para que el lugar de las raíces pase por s_1 (ese ángulo vendrá proporcionado por la relación entre z_c y p_c (o de forma equivalente, entre β y τ).
3. Situar el cero del controlador.
4. Determinar la localización del polo del controlador haciendo uso de la propiedad de que para que el punto s_1 en el plano complejo pertenezca al lugar de las raíces debe satisfacerse la condición de ángulo con $\phi_z = \angle(s_1 - z_c)$ y $\phi_p = \angle(s_1 - p_c)$:

$$\angle C(s_1)G(s_1) = \pm 180^\circ \rightarrow \underbrace{\sum_{\ell=1}^m \angle(s_1 - z_\ell) - \sum_{i=1}^n \angle(s_1 - p_i)}_{\varphi} + \underbrace{\phi_z - \phi_p}_{\phi_c} = \pm 180^\circ$$

5. Se comprueba si con la ganancia K_c se satisfacen los requisitos de estado estacionario. Si no es así, hay que cambiar s_1 y rehacer el diseño.
6. Cerrar el lazo y comprobar que se cumplen las especificaciones. Si los polos en lazo cerrado seleccionados resultan no ser dominantes, será necesario modificar su posición y repetir el procedimiento.

Los pasos anteriores pueden modificarse si se incluyen también especificaciones en estado estacionario, como se verá en lo que sigue. Como el controlador tiene tres grados de libertad (K_c , z_c y p_c) y de las condiciones del lugar de las raíces (módulo y ángulo) sólo se pueden obtener dos de ellos, se han desarrollado diversos métodos para determinar el tercer parámetro. Los tres más extendidos se basan en aproximaciones geométricas. Usar el cero del compensador para cancelar un polo de $G(s)$ o tener en cuenta especificaciones de error en estado estacionario a través de las constantes de error K_p , K_v y K_a .

Dorf y Bishop [9] recomiendan que el cero se coloque directamente debajo del punto s_1 que satisface las especificaciones y pertenece al lugar. Ogata [31] y D’Azzo y colaboradores [8] describen otro método basado en consideraciones geométricas (método de la bisectriz), que busca obtener el mayor valor posible para $\alpha = \tau/\beta = z_c/p_c$, que se corresponde con un mayor valor de K_v y por tanto un menor error en régimen estacionario.

Procedimiento de equidistribución

El método de equidistribución es una variante simplificada del método de la bisectriz explicado en [31]. Con este procedimiento se pretende lo siguiente:

- Dada una pareja de polos complejos conjugados (s_1, s_1^*) , se desea que éstos sean polos dominantes del sistema de lazo cerrado. Dichos polos vienen determinados por las especificaciones del problema, típicamente a través del coeficiente de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n .
- Se busca que la contribución a la condición de ángulo del polo y el cero sea la misma, es decir, que el triángulo que forma s_1 , z_c y p_c sobre el plano complejo sea un triángulo isósceles (tenga dos lados de la misma longitud y por tanto los ángulos que se oponen a estos lados tengan el mismo valor).

Para llevar a cabo el proceso de diseño, hay que tener en cuenta que el controlador presenta tres grados de libertad: K_c , z_c y p_c . Para obtener los valores de los parámetros que permiten cumplir las especificaciones del problema, se definen tres ecuaciones que deben cumplir:

- *Condición de argumento:*

$$\underbrace{\sum_{\ell=1}^m \angle(s_1 - z_\ell) - \sum_{i=1}^n \angle(s_1 - p_i)}_{\varphi} + \underbrace{\angle s_1 - z_c}_{\phi_z} - \underbrace{\angle s_1 - p_c}_{\phi_p} = \pm 180^\circ \quad (7.19)$$

- *Condición de magnitud:*

$$K_c \frac{|s_1 - z_c|}{|s_1 - p_c|} \kappa \frac{\prod_{\ell=1}^m |s_1 - z_\ell|}{\prod_{i=1}^n |s_1 - p_i|} = 1, \quad K_c > 0 \quad (7.20)$$

- *Condición de equidistribución:*

$$\phi_p = 180^\circ - \phi_z \quad (7.21)$$

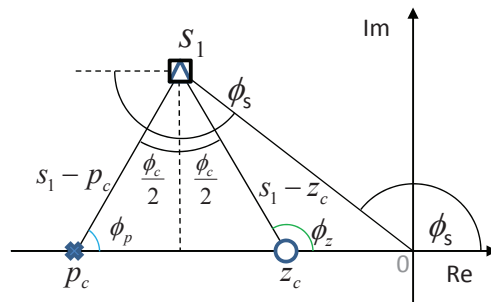


Figura 7.6 Procedimiento geométrico de diseño de red de avance en lugar de las raíces: Equidistribución

Dado que se dispone de 3 ecuaciones y 3 incógnitas, el problema de diseño queda totalmente determinado, siempre que exista solución.

Procedimiento de cancelación de polo dominante

En este método, se escoge el cero del compensador de forma que cancele al polo más dominante del sistema controlado (excluyendo como es normal los integradores). Lógicamente no se puede realizar una cancelación de los polos inestables. Esa cancelación se consigue situando el cero en la misma posición que el polo dominante de $G(s)$ en el plano s . El polo del compensador se situará de forma que cumpla las condiciones del lugar de las raíces en el polo deseado en lazo cerrado s_1 (se obtiene la posición del polo de la red a partir de las condiciones de ángulo $\angle(s_1 - p_c) = -180^\circ + \varphi + \angle(s_1 - z_c)$). El polo que se cancela depende del tipo del sistema. Para un sistema tipo 1 se escoge el polo más dominante, mientras que para un sistema tipo 0 se suele escoger el segundo polo más dominante [8]. El valor de K_c se obtiene de la condición de magnitud del lugar de las raíces:

$$K_c = \frac{1}{\left| \frac{s - z_c}{s - p_c} G(s) \right|_{s=s_1}}$$

Usando este método se consigue que no aumente el orden del sistema en lazo cerrado respecto al del lazo abierto, así como la complejidad de la respuesta. En sistemas de bajo orden (2) se puede además colocar todos los polos del lazo cerrado en una posición deseada.

Procedimiento que fija el error en estado estacionario

Este procedimiento permite fijar el comportamiento deseado en lazo cerrado, si bien se aumenta el orden del sistema y se obtienen respuestas en lazo cerrado más complejas. El problema admite solución analítica, a través de la resolución de tres ecuaciones acopladas con tres incógnitas:

1. Condición de argumento:

$$\underbrace{\sum_{j=1}^m \angle(s_1 - z_j) - \sum_{i=1}^n \angle(s_1 - p_i)}_{\varphi} + \underbrace{\phi_z - \phi_p}_{\phi_c} = 180^\circ$$

$$z_c = \frac{\tan(\phi_c)(\text{Re}(s_1)^2 + \text{Im}(s_1)^2 - \text{Re}(s_1)p_c) + \text{Im}(s_1)p_c}{\tan(\phi_c)(\text{Re}(s_1) - p_c) + \text{Im}(s_1)}$$

2. Condición de módulo: $|C(s_1, z_c)G(s_1)| = 1$.
3. Condición de estado estacionario. Por ejemplo, para un sistema que sea tipo 1, se debería imponer:

$$\lim_{s \rightarrow 0} sC(s, z_c)G(s) = K_v$$

Existe un método analítico alternativo que usa la expresión del controlador en forma de constantes de tiempo que se explica a continuación:

1. En primer lugar, se determina el valor de K utilizando las especificaciones de error en estado estacionario.
2. De las especificaciones de comportamiento transitorio, que en general se expresan en forma de sobreoscilación y algún tiempo característico, se pueden obtener los parámetros que describen el denominador de la función de transferencia de un sistema de segundo orden (ζ y ω_n). Esos dos parámetros determinan la posición de dos polos en lazo cerrado (s_1 y s_1^*) que se considerarán los polos dominantes del sistema y por tanto hay que imponer que el lugar de las raíces pase por ellos.
3. Para que el sistema compensado pertenezca al lugar de las raíces debe cumplir:

$$C(s_1)G(s_1) = K \frac{s_1\beta + 1}{s_1\tau + 1} \rho_G e^{j\phi_G} = 1e^{j180^\circ}$$

donde $G(s_1) = \rho_G e^{j\phi_G}$. Como K es conocido, sólo hay que resolver esa ecuación con β y τ como incógnitas. Si s_1 se representa en forma polar: $s_1 = \rho_s e^{j\phi_s}$, entonces:

$$\rho_s e^{j\phi_s} \beta + 1 = \left(\frac{1e^{j180^\circ}}{\rho_G e^{j\phi_G} K} \right) (\rho_s e^{j\phi_s} \tau + 1)$$

Esta ecuación puede separarse en parte real e imaginaria, resultando dos ecuaciones con dos incógnitas. El resultado de las ecuaciones proporciona:

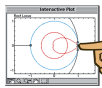
$$\beta = \frac{\text{sen}(\phi_s) - K\rho_G \text{sen}(\phi_G - \phi_s)}{K\rho_G \rho_s \text{sen}(\phi_G)} \quad \tau = -\frac{K\rho_G \text{sen}(\phi_s) + \text{sen}(\phi_G + \phi_s)}{\rho_s \text{sen}(\phi_G)}$$

Esta técnica sólo es válida si τ y β son positivos. Además, para que sea una red de avance deben cumplir $\tau < \beta$. Si no se cumple esa condición, será una indicación de que se están imponiendo especificaciones que no se pueden cumplir con ese controlador.

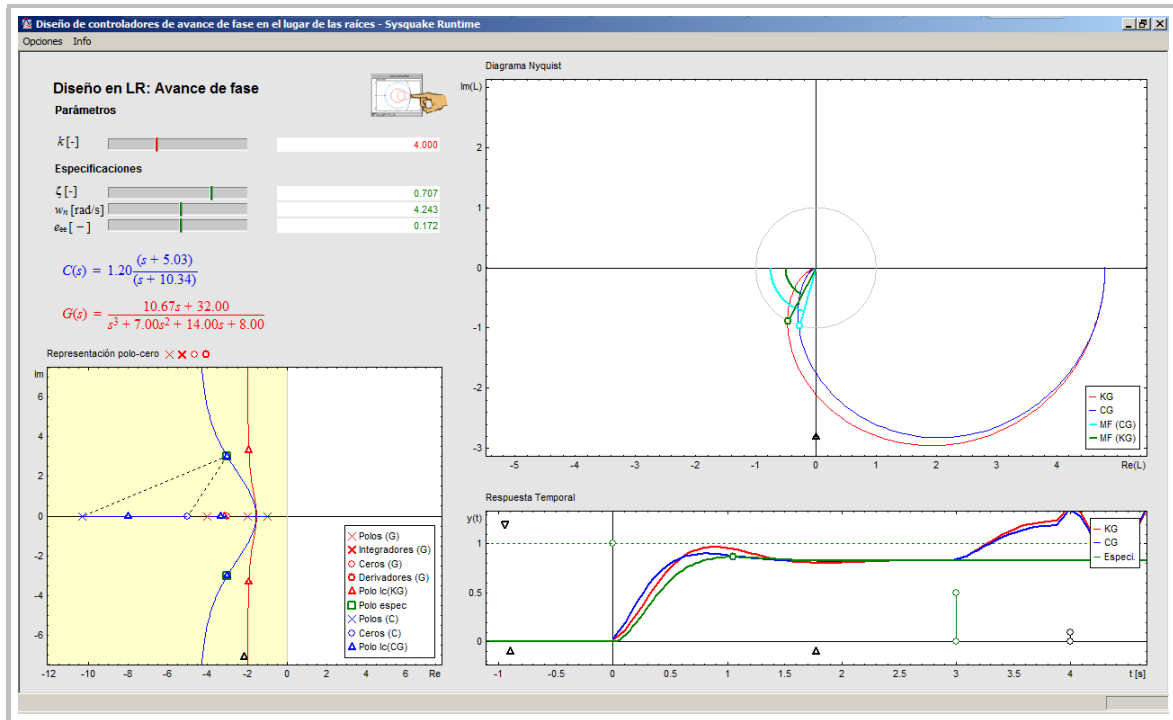
Bibliografía

- [8] D'Azzo, J. J., C. H. Houpis y S. Sheldon. Linear control system analysis and design with Matlab. Marcel Dekker Inc., ISBN: 0-8247-4038-6. Capítulo 10, secciones 10 y 11, páginas 408-415, 2003.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN:84-205-4401-9. Capítulo 10, sección 5, páginas 595-601, 2005.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Pearson. ISBN:978-0-13-500150-9. Capítulo 5, sección 4, páginas 267-272; ejemplo 5.11, página 269, 2010.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 6, sección 6, páginas 311-321, 2010.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 7, sección 4, apartados 1 a 3, páginas 177-185, 1993.

Aplicación



Herramienta interactiva: [7.8. lr_diseño_avance](#)



Diseño en LR: Avance de fase

El menú Opciones de la herramienta, situado en la esquina superior izquierda de la misma, es bastante rico en contenidos:

- El primer grupo de opciones posibilita elegir entre distintas representaciones gráficas en el dominio frecuencial (que ocupan la parte superior derecha de la herramienta): Diagrama de Bode, Diagrama de Nyquist, Diagrama de Nichols y Vista completa, que incluye simultáneamente las tres representaciones anteriores.
- El segundo grupo de opciones permite seleccionar cada uno de los tres algoritmos de cálculo de la red de avance de fase explicados en el resumen de teoría:
 - Precisión: Implementa el método exacto en el que se imponen como especificaciones el error en estado estacionario y los polos dominantes en lazo cerrado (a través del factor de amortiguamiento relativo ζ y frecuencia natural no amortiguada ω_n asociados a los mismos).
 - Equidistribución: Utiliza el método geométrico explicado en primer lugar que utiliza como especificaciones únicamente ζ y ω_n .
 - Cancelación: Calcula la red de avance de fase por el método de cancelación, usando el cero de la red para cancelar un polo dominante del sistema.

Aplicación...

- El tercer grupo de opciones está relacionado con opciones gráficas. Cuando se activa la opción Triángulo, sobre el diagrama de Representación polo-cero en el que se dibuja el lugar de las raíces, se incluyen dos líneas discontinuas de color negro que unen el polo p_c y el cero z_c de la red con el polo del lazo cerrado usado como especificación (s_1). Si se selecciona la opción LGR original, se dibuja en color rojo el lugar geométrico de las raíces del sistema original sólo compensado en ganancia $KG(s)$, siendo K la ganancia estática del compensador. Finalmente, la activación de la opción Escalón espec, añade a la curva de respuesta temporal del sistema en lazo cerrado la que proporciona un sistema de segundo orden que cumpla las especificaciones establecidas (con los polos en s_1 y s_1^* dados por las especificaciones). Esta curva se representa en color verde.
- El último grupo de opciones está dedicado a la introducción de ejemplos:
 - Ejemplo 1: Utiliza un sistema de primer orden. Se trata de un caso en el que realmente los métodos explicados no proporcionan un resultado satisfactorio con la configuración que aparece por omisión (es fácil de comprobar con un análisis del lugar de las raíces). Permite al usuario analizar escenarios de posibles especificaciones para las que exista solución.
 - Ejemplo 2: Utiliza como función de transferencia un doble integrador. Es un ejemplo muy rico en contenidos conceptuales para analizar la aplicabilidad de los métodos explicados.
 - Ejemplo 3: Es el ejemplo más ilustrativo y el que suelen incluir muchos textos clásicos de control, donde el sistema a controlar es de segundo orden con un integrador.

Finalmente, se ponen a disposición del usuario dos opciones que facilitan la inclusión de funciones de transferencia genéricas en formatos (NUM,DEN) o ZPK.

El área superior izquierda de la herramienta (**Parámetros**) contiene en este caso la ganancia estática k del sistema que se desea controlar, cuyo valor por omisión se puede modificar haciendo uso de un cuadro de texto o una barra de desplazamiento. No se considera tiempo de retardo (en este texto no se han explicado las variantes del método del lugar de las raíces para sistemas con tiempo de retardo). Los polos y los ceros se determinan en la Representación polo-cero, que se explica más adelante.

A continuación de esta sección se encuentra la de **Especificaciones**. Para todos los métodos de diseño se incluye la posibilidad de modificar, a través de cuadros de texto o barras de desplazamiento, el valor del factor de amortiguamiento relativo ζ y de la frecuencia natural no amortiguada ω_n que determinan el comportamiento deseado en lazo cerrado (y por tanto la posición de s_1). Si el método seleccionado es el de Precisión, a las especificaciones previas se añade la de error en estado estacionario (e_{ee}), cuyo significado dependerá del tipo de la función $G(s)$. Si $G(s)$ es tipo 0, $e_{ee} = e_{ee_p}$ (error a seguimiento de referencia en forma de escalón). Si $G(s)$ es tipo 1, $e_{ee} = e_{ee_v}$, y así sucesivamente. Debajo de las especificaciones se visualiza una representación simbólica de la función $G(s)$ y del compensador $C(s)$.

La zona inferior izquierda de la herramienta contiene la Representación polo-cero. En esta representación se visualiza el lugar de las raíces del sistema compensado $C(s)G(s)$ y del sistema $KG(s)$ (si se ha seleccionado la opción LGR original en el menú Opciones). Como es habitual, esta representación incorpora un repositorio de polos y ceros junto al título de la gráfica $\times \times \circ \circ$ que facilita el cambio de la estructura del modelo del sistema, simplemente arrastrando elementos dentro de la gráfica y posicionándolos en la localización deseada. Cualquier polo o cero se puede desplazar haciendo uso del ratón y se pueden extraer los elementos dinámicos arrastrándolos hacia el repositorio.

Aplicación...

El polo (\times) y el cero (\circ) de la red no son interactivos, pues su posición en el eje real negativo del plano s se obtiene de los cálculos que se realizan internamente usando los tres algoritmos implementados. Los polos en lazo cerrado (Polo lc) se representan mediante el símbolo (Δ) y no son interactivos. Los polos determinados por las especificaciones del problema (Polo espec) se dibujan usando el símbolo \square , siendo estos últimos interactivos para facilitar la imposición de distintas especificaciones (su posición está ligada a los valores de ζ y ω_n , que se actualizan de forma automática).

En el área superior derecha de la herramienta se visualizan las distintas representaciones de la respuesta frecuencial del sistema, en función de la elección que se haya realizado en el menú Opciones. Al arrancar la herramienta, por omisión se muestra el Diagrama de Nyquist. En trazo continuo de color azul se dibuja la respuesta en frecuencia del sistema compensado $C(s)G(s)$, representándose en color celeste el correspondiente margen de fase (MF). En rojo se dibuja la del sistema no compensado y el margen de fase asociado en color verde. Los mismos comentarios son aplicables al Diagrama de Nichols. El Diagrama de Bode incorpora la misma información, incluyendo además la respuesta en frecuencia del controlador $C(s)$ dibujada en trazo verde continuo. Las líneas de 0 dB y -180° se marcan en color gris.

La Respuesta temporal del sistema en lazo cerrado cuya función de lazo es $L(s) = C(s)G(s)$ se dibuja en línea de color azul y la del sistema en lazo cerrado con $L(s) = KG(s)$ en color rojo. Como se ha comentado previamente, existe la posibilidad de seleccionar en el menú Opciones la representación de la respuesta temporal determinada por las especificaciones (un sistema de segundo orden con ζ y ω_n deseadas y con el mismo error en estado estacionario que el sistema compensado). Esta curva se dibuja en color verde.

En todas las gráficas anteriores se incluye una leyenda donde se especifican los códigos de colores y trazos usados para cada curva.

Los triángulos negros situados en las gráficas posibilitan el cambio del fondo de escala, pulsando con el ratón a la derecha o a la izquierda de los situados en el eje de abscisas o en la parte superior o inferior de los ubicados en el eje de ordenadas.

Ejercicios

1. Considere el modelo de la posición de un motor de corriente continua dado por (referencia [31], página 313)

$$G(s) = \frac{10}{s(s+1)}$$

Diseñe un controlador de avance de fase de forma que los polos de lazo cerrado dominantes tengan un factor de amortiguamiento $\zeta = 0.5$ y la frecuencia natural no amortiguada sea de $\omega_n = 3$ rad/s.

2. Seleccione el Ejemplo 1 del menú Opciones. Justifique por qué ninguno de los métodos explicados en el resumen de teoría proporciona un resultado satisfactorio con este tipo de especificaciones. Justifique la respuesta.
3. Seleccione el Ejemplo 2 del menú Opciones. Justifique por qué no se puede aplicar el método de Cancelación a este caso. Indique qué estructura debería tener el controlador por avance de fase

para poder aplicar el método de Equidistribución. ¿Qué valor deben tener en este caso ϕ_z y ϕ_p ? ¿Dónde se coloca el cero de la red?

4. Utilice el Ejemplo 3 del menú Opciones. Si se considera la configuración que muestra por omisión la herramienta, justifique por qué el método de Precisión proporciona el mismo resultado que el de Cancelación. ¿Cómo tiene que modificar la especificación de error en estado estacionario en el método de Precisión para obtener el mismo resultado que con el método de Equidistribución? Diseñe un controlador de avance de fase para que el sistema en lazo cerrado tenga una sobreoscilación del 5% y un tiempo de pico de 1 s. Justifique si es posible cumplir esas especificaciones e indique el valor de la constante de error K_v que se obtiene.
5. Considere un sistema dado por $G(s) = 1/s^2$. Diseñe un compensador por avance de fase para que el tiempo de establecimiento del 2% sea menor o igual a 4 segundos y la sobreoscilación sea inferior al 35% (referencia [9], páginas 597-599).
6. Diseñe un compensador por avance de fase para el sistema dado por la función de transferencia (referencia [13], página 269):

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

de forma que la sobreoscilación sea inferior al 20% y el tiempo de subida igual o inferior a 0.3 s.

7.9 Control PI de sistemas de primer orden sin tiempo de retardo por el método de asignación de polos

Herramienta interactiva: 7.9. PI_asignación

Conceptos analizados en la ficha

- Especificaciones en el diseño basado en asignación de polos de controladores PI.
- Diseño de controladores PI por el método de asignación de polos para sistemas de primer orden sin retardo.

Teoría En esta sección se trata el caso más sencillo de aplicación de un método general de asignación de polos, pues se considera que tiene un alto componente didáctico. Como su propio nombre indica, el método se basa en trasladar las especificaciones del transitorio a una posición deseada de los polos del sistema en lazo cerrado. En el caso sencillo tratado en este apartado, se considerará que se va a controlar un sistema de primer orden sin tiempo de retardo con un controlador PI para obtener un sistema en lazo cerrado de segundo orden cuyos polos estén ubicados en localizaciones del semiplano izquierdo que produzcan una respuesta transitoria deseada en términos de sobreoscilación (factor de amortiguamiento relativo) y un tiempo característico (tiempo de subida, tiempo de pico o tiempo de establecimiento). Esto es equivalente a que el polinomio característico del sistema en lazo cerrado venga dado por $J(s) = s^2 + 2\zeta_{lc}\omega_{n_{lc}}s + \omega_{n_{lc}}^2$, cuyas raíces son $s_1 = -\zeta_{lc}\omega_{n_{lc}} + j\omega_{n_{lc}}\sqrt{1 - \zeta_{lc}^2}$ y $s_1^* = -\zeta_{lc}\omega_{n_{lc}} - j\omega_{n_{lc}}\sqrt{1 - \zeta_{lc}^2}$. Lógicamente, al ser el sistema tipo 0 y usar un controlador PI, el sistema en lazo cerrado tendrá error en estado estacionario nulo cuando la entrada tiene forma de escalón. Los parámetros del polinomio característico deseado están relacionados con las especificaciones por las siguientes fórmulas:

Sobreoscilación (%)	Tiempo de pico	Tiempo de subida	Tiempo de establecimiento
$SO(\%) = 100 \exp\left(-\frac{\zeta_{lc}\pi}{\sqrt{1 - \zeta_{lc}^2}}\right)$	$t_p = \frac{\pi}{\omega_{n_{lc}}\sqrt{1 - \zeta_{lc}^2}}$	$t_s = \frac{\pi - \phi}{\omega_{n_{lc}}\sqrt{1 - \zeta_{lc}^2}}$	$t_e = \frac{4}{\zeta_{lc}\omega_{n_{lc}}}$
		$\cos(\phi) = \zeta_{lc}$	(2%)

La cadena directa, que coincide con la función de transferencia del lazo con realimentación unitaria $L(s) = Q(s) = C(s)G(s)$, viene dada por:

$$L(s) = \frac{K(T_i s + 1)}{T_i s} \frac{k}{\tau s + 1}$$

La función de transferencia en lazo cerrado por tanto viene dada por:

$$T(s) = \frac{\frac{Kk}{T_i \tau} (T_i s + 1)}{s^2 + \left(\frac{1 + Kk}{\tau}\right) s + \frac{Kk}{T_i \tau}}$$

Analizando dicha función de transferencia se pueden extraer una serie de conclusiones:

- La ganancia estática² del lazo cerrado es 1. Esto es esperable porque por el hecho de haber utilizando un controlador PI el error en estado estacionario del sistema en lazo cerrado cuando la referencia es un escalón debe ser cero.
- El denominador de la función de transferencia del sistema en lazo cerrado es de segundo orden, por lo que para cumplir las especificaciones se podrá igualar al denominador normalizado de una función de transferencia de segundo orden, donde ζ y ω_n se han obtenido de las especificaciones de comportamiento transitorio aplicando las fórmulas anteriores que los relacionan con la sobreoscilación y los tiempos característicos. Por tanto:

$$s^2 + \left(\frac{1 + Kk}{\tau} \right) s + \frac{Kk}{T_i \tau} = s^2 + 2\zeta_{lc} \omega_{n_{lc}} s + \omega_{n_{lc}}^2$$

Obteniéndose las siguientes relaciones:

$$2\zeta_{lc} \omega_{n_{lc}} = \frac{1 + Kk}{\tau} \rightarrow K = \frac{2\tau \zeta_{lc} \omega_{n_{lc}} - 1}{k} \quad \omega_{n_{lc}}^2 = \frac{Kk}{T_i \tau} \rightarrow T_i = \frac{Kk}{\tau \omega_{n_{lc}}^2} = \frac{2\tau \zeta_{lc} \omega_{n_{lc}} - 1}{\tau \omega_{n_{lc}}^2} \quad (7.22)$$

Se obtienen los parámetros del controlador PI en función de las especificaciones de comportamiento en lazo cerrado (localización deseada de los polos en el plano s). Si no se obtienen valores lógicos de los parámetros K y T_i (por ejemplo un tiempo integral negativo) estaría indicando que las especificaciones impuestas no se pueden cumplir.

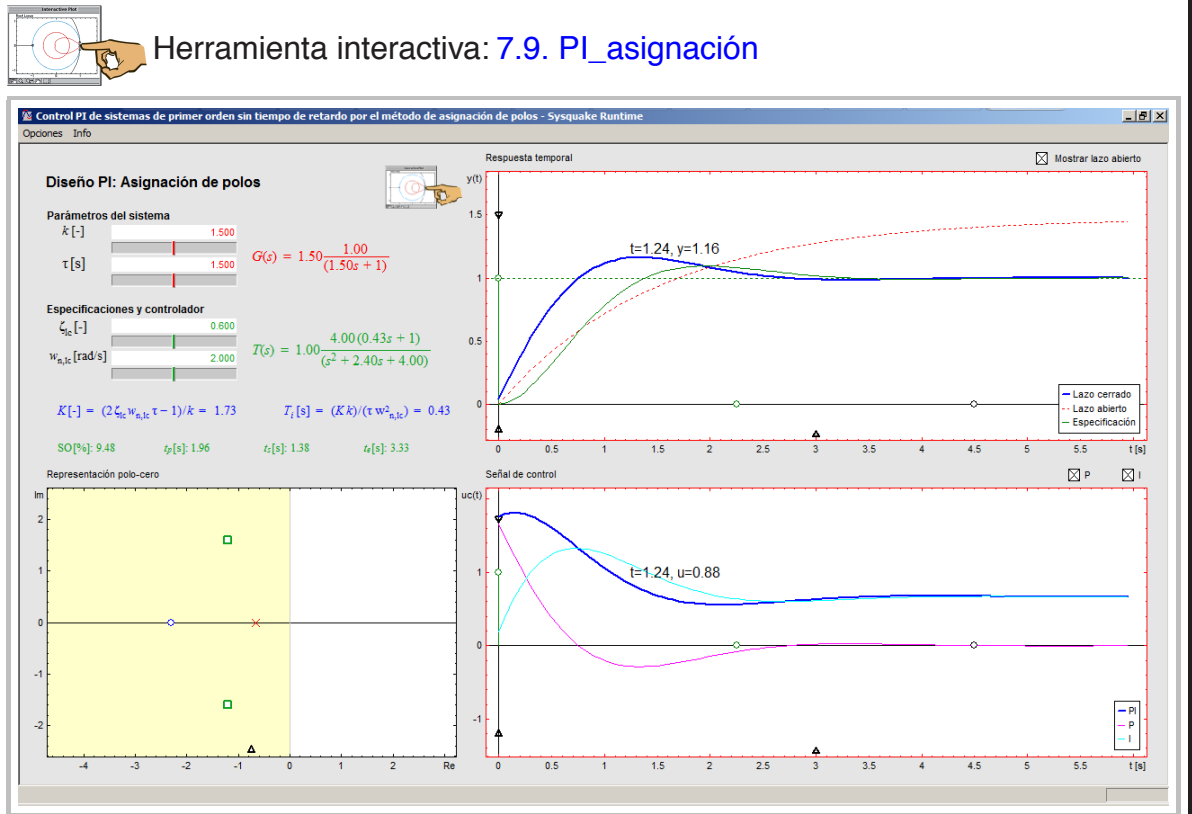
- Como se puede vislumbrar, en la función de transferencia en lazo cerrado aparece un cero en el denominador en $s = -1/T_i$. El efecto de dicho cero puede ser despreciable si se encuentra suficientemente alejado del eje imaginario en relación a los polos del lazo cerrado, pero si no es así la respuesta obtenida en lazo cerrado será distinta a la que se obtendría en un sistema con el mismo denominador pero sin el cero. En general se obtendrá una respuesta con menor tiempo de pico y con mayor sobreoscilación. En ese caso habrá que repetir el diseño con unas especificaciones en lazo cerrado menos exigentes en cuanto a tiempo de respuesta o bien realizar un análisis utilizando la técnica del lugar de las raíces. Otra opción sencilla es utilizar un sistema de control con dos grados de libertad $C(s)$ y $F(s)$, donde $F(s)$ es un filtro de la referencia que puede ser un sistema de primer orden con ganancia estática unidad y un polo en $s = -1/T_i$ que cancele el cero del sistema en lazo cerrado. Este último caso no ha sido considerado en la ficha.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Ejemplo 8.7, página 248, Ejemplo 11.1, página 318, 2008.
- [4] Barrientos, A., R. Sanz, F. Matía y E. Gambao. Control de sistemas continuos. Problemas resueltos. Mc Graw Hill, ISBN: 84-481-0605-9. Capítulo 9, sección 2, páginas 335-339, 1996.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 7, sección 3, apartado 2, páginas 173-177, 1993.

²Se recuerda que se puede obtener directamente haciendo $s = 0$ en la función de transferencia como consecuencia de la aplicación del teorema del valor final de la Transformada de Laplace.

Aplicación



Diseño PI: Asignación de polos

En esta herramienta interactiva la distribución de objetos en pantalla es la que sigue.

En la zona superior izquierda se muestran los **Parámetros del sistema**, que en el caso considerado en esta herramienta son la ganancia estática k y la constante de tiempo τ de un sistema de primer orden sin tiempo de retardo. Junto a los cuadros de texto y barras de desplazamiento disponibles para modificar sus valores, se dibuja en color **rojo** la representación simbólica de la función de transferencia del sistema seleccionado ($G(s)$). Debajo de estos elementos aparecen los relacionados con las **Especificaciones y controlador**. En un primer nivel aparecen las especificaciones en forma de factor de amortiguamiento relativo deseado del lazo cerrado ζ_{lc} y frecuencia natural no amortiguada del lazo cerrado $\omega_{n,lc}$ (que proporcionan los polos deseados del sistema en lazo cerrado), junto con una representación simbólica de la función de transferencia resultante del sistema en lazo cerrado $T(s)$ que se representa en color **verde**. Hay que hacer notar que esta representación simbólica incluye el cero en lazo cerrado resultante de la utilización de un controlador PI.

Debajo de esta representación se exponen las fórmulas obtenidas para la ganancia proporcional K del controlador y el tiempo integral T_i (7.22), que se van actualizando a medida que cambian las especificaciones o los parámetros del sistema que se desea controlar.

Aplicación...

También en este área se incluyen medidas de comportamiento teórico del sistema en lazo cerrado y sus unidades, como son la sobreoscilación (SO), el tiempo de pico (t_p), el tiempo de subida (t_s) y el tiempo de establecimiento (t_e) que proporcionaría el sistema para esas especificaciones, sin tener en cuenta el efecto del cero resultante en el numerador. Dichos valores se pueden obtener también de la gráfica de Respuesta temporal, como se analizará seguidamente.

La zona inferior izquierda de la herramienta contiene la Representación polo-cero, donde se dibuja en color **rojo** el polo real del sistema en lazo abierto (\times), en color **azul** el cero del controlador, que también es cero de la función de transferencia en lazo cerrado (\circ) y en color **verde** los polos del sistema en lazo cerrado que coinciden con los impuestos por las especificaciones (\square). Tanto el polo del sistema en lazo abierto como los dos polos del sistema en lazo cerrado (especificaciones) son objetos interactivos, de modo que al desplazarlos provocan la modificación de los valores y cálculos que se realizan en las áreas de **Parámetros del sistema** y **Especificaciones y controlador**. La modificación de los polos deseados del sistema en lazo cerrado afectan a las especificaciones del controlador y constituyen una forma gráfica de imponer esas especificaciones. En esos casos, al colocar el ratón sobre los polos, se muestra su posición en la esquina inferior izquierda de la herramienta. El cero del sistema en lazo cerrado no es interactivo porque su situación es resultado de la imposición de las especificaciones (polos deseados) de lazo cerrado.

La parte derecha de la herramienta contiene las gráficas de Respuesta temporal. En la zona superior se representa la salida del sistema en lazo cerrado (en trazo grueso **azul** continuo), la correspondiente a las especificaciones (sistema en lazo cerrado sin el cero cuyas características temporales se presentan en el área de **Especificaciones**), en trazo **verde** continuo y también se puede incluir la respuesta en lazo abierto a un escalón, si se activa el cuadro de selección disponible sobre la gráfica (Mostrar lazo abierto), representándose en trazo de color **rojo** discontinuo. En los tres casos se incluye una leyenda con los trazos correspondientes en la esquina inferior derecha de la gráfica. Si se pasa el ratón sobre la curva de respuesta, cambia su representación a una mano con un dedo apuntando (☞) y aparecen los valores del tiempo (t) y salida (y) asociados al punto de la gráfica de respuesta señalado por el ratón, siendo una utilidad fundamental a la hora de analizar el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

En trazo de color **verde** discontinuo se dibuja la referencia en forma de escalón en $t = 0$ s, cuya amplitud se puede modificar accediendo al círculo situado en la línea vertical que pasa por $t = 0$ s o sobre la propia línea. El eje de abscisas incluye otros dos círculos situados al arrancar la herramienta en $t = 4.5$ s y en $t = 9$ s. Al desplazarlo verticalmente, el primero de ellos introduce una perturbación positiva de carga al sistema con la amplitud que indique la colocación del círculo y el segundo introduce un ruido cuya amplitud viene determinada también por la posición del círculo correspondiente. Al acceder sobre los tres círculos, se muestra la información asociada a la amplitud de la señal de forma textual en la esquina izquierda del marco inferior de la herramienta.

Estos círculos se incluyen también en la gráfica inferior correspondiente a la Señal de control, que representa la entrada al sistema (salida del controlador) en trazo **azul** grueso continuo. A través de cuadros de selección habilitados sobre el gráfico, se pueden incluir las componentes individuales de la acción proporcional (P, trazo negro continuo) y la acción integral (I, trazo **magenta** continuo). También esta gráfica tiene leyendas asociadas a los trazos de las acciones P, I y PI y si se coloca el ratón sobre la gráfica de la señal de control PI aparecen sobre la misma los valores asociados de tiempo (t) y valor de la señal (u).

En todas las gráficas, los triángulos sobre los ejes de ordenadas y debajo del eje de abscisas (\triangle , ∇) posibilitan la modificación de la escala de las gráficas, tal y como se ha explicado en el Capítulo 1.

Ejercicios

1. Utilizando la herramienta interactiva **6.1. lugar_raíces** represente un sistema con parámetros arbitrarios con cadena directa:

$$L(s) = C(s)G(s) = \frac{K(T_i s + 1)}{T_i s} \frac{k}{(\tau s + 1)}$$

(sistema de primer orden controlado con un PI). Analice los lugares de las raíces que se obtienen en función de la posición del cero del sistema. Estos análisis le serán de utilidad a la hora de interpretar los siguientes ejercicios.

2. Utilizando la herramienta interactiva **7.9 PI asignación**, seleccione un sistema con ganancia estática $k = 0.5$ y constante de tiempo $\tau = 10$ s. Imponga unas especificaciones de lazo cerrado con sobreoscilación del 5% y tiempo de subida de 1 s. Analice los parámetros del controlador obtenidos y la señal de control. ¿Considera realista imponer esta especificación? Justifique la respuesta.
3. Seleccione un sistema con ganancia estática $k = 1.5$ y constante de tiempo $\tau = 1.5$ s. Fije una especificaciones para obtener una respuesta en bucle cerrado con una sobreoscilación del 5% y un tiempo de subida de 1.4 s. Indique los valores de δ_{lc} y $\omega_{n_{lc}}$ asociados. Calcule también los valores teóricos de tiempo de pico y tiempo de establecimiento y compárelos con los que proporciona la herramienta. ¿Cumple la respuesta real del sistema las especificaciones? Justifique la respuesta. Proporcione los valores de la sobreoscilación y el tiempo de pico reales obtenidos. Utilizando la herramienta, intente encontrar los parámetros del controlador más rápido posible que consiga una sobreoscilación en lazo cerrado del 5%. Indique el procedimiento para obtenerlo y a qué parámetro afecta. ¿Qué tiempo de pico se obtiene en este caso?
4. Seleccione un sistema con ganancia estática $k = 1.5$ y constante de tiempo $\tau = 1.5$ s. Fije una especificaciones para obtener una respuesta en bucle cerrado con dos polos reales iguales y una $\omega_{n_{lc}} = 2.5$ rad/s. ¿Por qué no se obtiene una respuesta sobreamortiguada? Analice la respuesta. Indique el valor máximo de $\omega_{n_{lc}}$ a partir del cual se obtiene una respuesta sobreamortiguada. Justifique la respuesta.
5. Seleccione un sistema con ganancia estática $k = 1.5$ y constante de tiempo $\tau = 2.0$ s. Para una $\omega_{n_{lc}} = 0.9$ rad/s, encuentre el valor de ζ_{lc} con el que se consigue que la respuesta teórica del método (sin el cero) y la real (con el cero) sean iguales. ¿Qué sobreoscilación se obtiene? ¿Qué tiempo de pico se obtiene? ¿Se obtienen valores lógicos de los parámetros del controlador? Justifique la respuesta.
6. Para el sistema utilizado en los ejercicios de la Sección 7.3, dado por la función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

Diseñe un controlador *PI* tal que la sobreoscilación de la respuesta a un escalón unitario en la referencia sea del 5%, el tiempo de subida aproximadamente 2 s y el error en estado estacionario sea nulo. Comente el efecto que tiene sobre la salida una perturbación de carga en forma de escalón unitario a la entrada del sistema (referencia [4], páginas 335-339).

7.10 Control PI de sistemas de primer orden sin tiempo de retardo por el método de cancelación de polos

Herramienta interactiva: 7.10. PI_cancelación

Conceptos analizados en la ficha

- Aplicación del método de cancelación de polos a un sistema de primer orden sin tiempo de retardo usando un controlador PI.
 - Especificaciones de diseño.
 - Ley de control.
 - Influencia de los errores de modelado en el comportamiento obtenido con el método de cancelación de polos.
- Limitaciones en la aplicación del método.

Teoría Como su propio nombre indica, la técnica de cancelación de polos se basa en posicionar los ceros de los controladores en el plano s en las mismas localizaciones en que se encuentran los polos más representativos del sistema en lazo abierto, pudiendo de esta forma colocar los polos del controlador (grados de libertad restantes) en unas posiciones donde se obtengan polos en lazo cerrado que cumplan unas determinadas especificaciones.

Las técnicas basadas en cancelación polo-cero se usan en control automático generalmente para controlar sistemas estables de bajo orden. Un inconveniente de esta técnica es que aunque se consiga cancelar un polo de la cadena directa, éste puede estar presente en otras funciones de transferencia del lazo de control (por ejemplo en la función de transferencia que relaciona la perturbación con la salida). Por eso no se usa con sistemas inestables ni cuando el sistema tenga un polo muy lento. Sin embargo, en el caso de sistemas estables, se pueden conseguir notables mejoras en la evolución del sistema en lazo cerrado con estas técnicas y leyes de control muy simples.

En esta sección se va a explicar el caso más sencillo, correspondiente al diseño aproximado de un controlador PI para compensar un sistema de primer orden sin tiempo de retardo. Se analiza el caso en que las especificaciones estén relacionadas con la eliminación del error en estado estacionario cuando la referencia tiene forma de escalón y con el aumento de la rapidez de respuesta del sistema en lazo cerrado en relación al sistema sin controlar.

Supóngase un sistema con un polo dominante que pueda aproximarse por uno de primer orden sin retardo. Como es bien sabido, al ser un sistema de primer orden de tipo cero, para eliminar el error en estado estacionario cuando la referencia tiene forma de escalón hay que introducir un controlador con efecto integral (tipo PI) que aumente el tipo del sistema. El uso del controlador PI permite además aumentar la rapidez de respuesta del lazo cerrado en comparación con la del lazo abierto.

La función de transferencia de la cadena directa vendrá dada por:

$$Q(s) = L(s) = C(s)G(s) = \frac{K(T_i s + 1)}{T_i s} \frac{k}{(\tau s + 1)}$$

siendo K la ganancia del controlador PI y T_i el tiempo integral.

La compensación por cancelación de polos consiste en cancelar el polo del sistema con el cero del controlador (colocar el cero del controlador en la misma posición que el polo del sistema), o lo que es igual, igualar el tiempo integral del controlador PI con la constante de tiempo del sistema de primer

orden $\tau = T_i$. Si se hace eso se obtiene una función de transferencia de la cadena directa dada por un integrador:

$$L(s) = \frac{Kk}{sT_i} \quad \text{y cerrando el lazo:} \quad T(s) = \frac{1}{\left(\frac{T_i}{Kk}s + 1\right)}$$

El sistema en lazo cerrado se reduce a un sistema de primer orden con constante de tiempo equivalente $\tau_T = T_i/(Kk) = \tau/(Kk)$ y ganancia estática unidad (al utilizar un controlador PI el error en estado estacionario del sistema en lazo cerrado cuando la referencia cambia en forma de escalón es cero). Por tanto, aumentando K se puede reducir la constante de tiempo del sistema en lazo cerrado respecto al del sistema sin controlar. Es de esperar que la forma de la respuesta corresponda a la de un sistema de primer orden (y por tanto sin sobreoscilación), pero en la práctica, si la cancelación no es perfecta, el comportamiento del sistema en lazo cerrado puede diferir del esperado.

Si se impone como especificación de lazo cerrado una constante de tiempo deseada τ_{lc} , los parámetros del controlador PI vendrán dados por $T_i = \tau$, $K = \tau/(k\tau_{lc})$.

En el caso de sistemas de orden superior, se puede utilizar un controlador PID cuyos ceros se cancelen con uno o dos polos dominantes de la planta.

La técnica explicada en esta sección se ha de utilizar con precaución en sistemas donde la salida se pueda ver afectada por otras señales (por ejemplo perturbaciones) con un polinomio característico que pueda contener el polo que se ha cancelado. Un ejemplo muy intuitivo se puede encontrar en el control de velocidad de un vehículo en la referencia [2], páginas 248 y 318.

Si se considera un proceso con función de transferencia $G(s) = k/(\tau s + 1)$ controlado con un controlador PI que cancele el polo $T_i = \tau$, la expresión de la salida del sistema en presencia de cambios en la referencia y en la perturbación de carga viene dada por:

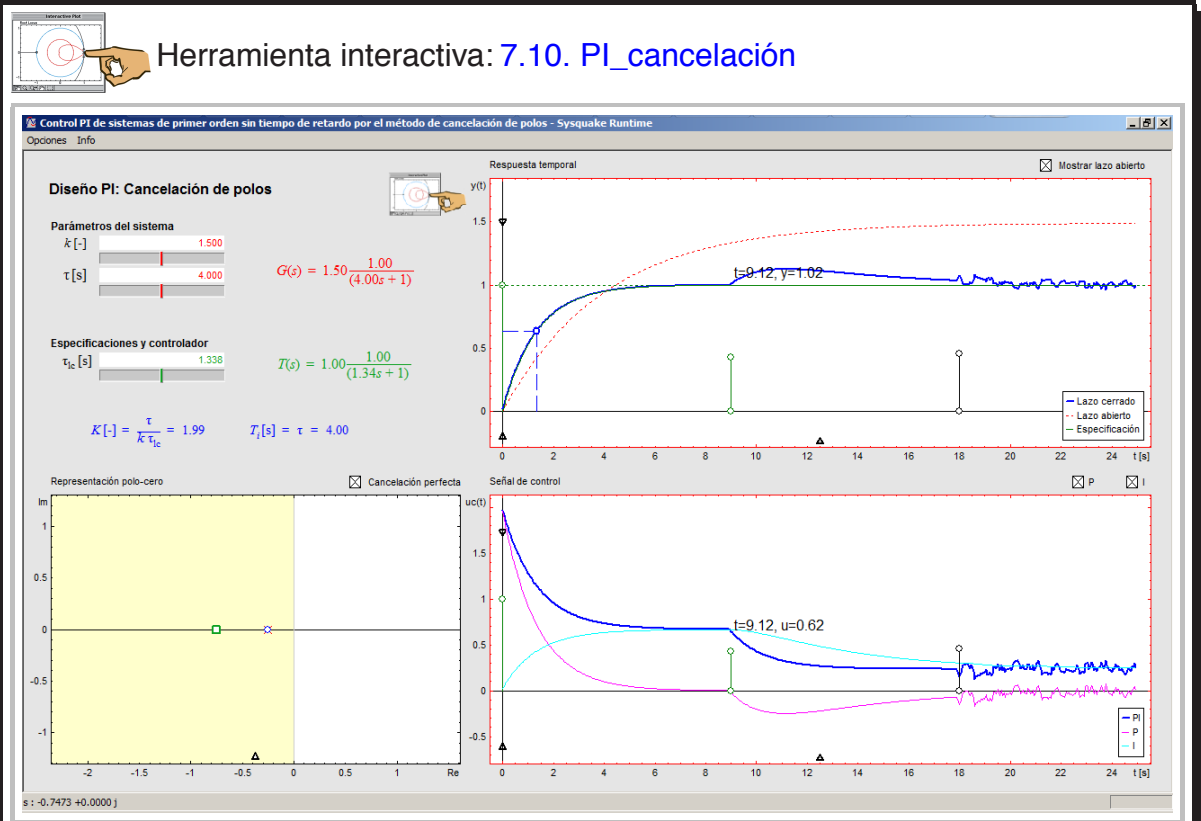
$$Y(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)}R(s) + \frac{G(s)}{1 + C(s)G(s)}D(s) = \underbrace{\frac{1}{\frac{\tau}{Kk}s + 1}}_{T(s)}R(s) + \underbrace{\frac{\frac{\tau}{K}s}{\left(\frac{\tau}{Kk}s + 1\right)(\tau s + 1)}}_{T_{yd}(s)}D(s) \quad (7.23)$$

Se puede ver cómo en este caso en la función de transferencia del lazo cerrado no aparece el factor $(\tau s + 1)$, pero sí en la función de transferencia que relaciona la perturbación con la salida, de modo que si $\tau < 0$ (polo inestable), una pequeña perturbación podría inestabilizar el sistema. También se observa que si la constante de tiempo del sistema en lazo abierto es muy grande, aunque mediante el método de cancelación de polos se exija una respuesta muy rápida en lazo cerrado a un cambio en forma de escalón en la referencia, el sistema compensará de una forma muy lenta una perturbación de carga a la entrada del sistema (con una rapidez marcada por τ). De hecho, la ecuación (7.23) es muy útil para analizar el compromiso que se puede obtener entre el problema de seguimiento de referencia y el de rechazo de perturbaciones con controladores PI. Si se diseña para seguir a una referencia con una constante de tiempo determinada τ_{lc} , como se ha visto la ganancia del controlador viene dada por $K = \tau/(k\tau_{lc})$. Sin embargo, en función del valor de τ , esa ganancia puede no ser adecuada para rechazar una perturbación en la carga del sistema, sobre todo si τ es muy grande. Además, en el numerador de la función de transferencia T_{yd} aparece un derivador puro multiplicado por el factor τ/K , que tendrá una influencia significativa en el régimen transitorio tras la inclusión de la perturbación.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Páginas 248 y 318, 2008.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulo 7, sección 2, páginas 170-171, 1993.

Aplicación



Diseño PI: Cancelación de polos

El área superior izquierda de la herramienta contiene los **Parámetros** del sistema de primer orden (cuyos valores pueden modificarse a través de cuadros de texto y barras de desplazamiento) y una representación simbólica de su función de transferencia. Debajo se localiza el área de **Especificaciones y controlador**, en la que se puede especificar (de nuevo a través de un cuadro de texto y una barra de desplazamiento) el valor deseado de la constante de tiempo del sistema en lazo cerrado (τ_{lc}). A la derecha se muestra la representación simbólica del sistema de primer orden que se obtiene teóricamente en lazo cerrado con esta elección ($T(s)$). Bajo las especificaciones se incluyen las expresiones de la ley de control y los valores asociados a los parámetros del controlador PI (K y T_i).

En el área inferior izquierda de la interfaz se incluye la Representación polo-cero, donde se ubica el polo del sistema en lazo abierto (\times), el cero del controlador (\circ , que por omisión se sitúa sobre el polo del lazo abierto) y el polo del sistema en lazo cerrado (\square). Al posicionar el ratón sobre cualquiera de estos elementos se muestran sus coordenadas en la esquina inferior izquierda de la herramienta. Si se desactiva la opción de Cancelación perfecta que hay sobre el diagrama, se habilita el análisis de los casos en los que la cancelación no sea perfecta. Existe en este caso la posibilidad de desplazar el cero del controlador a la derecha o izquierda del polo del sistema en el diagrama de polos y ceros. También se puede modificar su posición a través de un nuevo cuadro de texto y una barra de desplazamiento que se hacen visibles cuando se desactiva la opción de Cancelación perfecta.

Aplicación...

En la parte derecha de la herramienta se representan, en la parte superior, la Respuesta temporal del sistema y en la parte inferior la Señal de control. El círculo de color verde (o situado sobre el eje de ordenadas de ambas gráficas) permite modificar la amplitud del escalón en la referencia (que también se puede modificar directamente desplazando la línea horizontal discontinua del mismo color), mientras que los dos círculos colocados sobre el eje de abscisas facilitan la inclusión de una perturbación de carga a la entrada (el círculo izquierdo) o un ruido a la salida (el círculo derecho). Cuando se posiciona el ratón sobre cualquier punto de la respuesta en ambas gráficas, se activan etiquetas con información sobre el tiempo t y la variable en cuestión (y , u). La gráfica de Respuesta temporal incluye un cuadro de selección en su parte superior derecha que activa la representación de la evolución temporal del sistema en lazo abierto. Existe dentro de la gráfica una etiqueta explicativa de las variables cuya evolución dinámica se representa. En la gráfica de la Señal de control se pueden seleccionar a través de cuadros de selección las representaciones gráficas de las acciones proporcional e integral de forma independiente (ambas contribuyen a la forma global de la curva de señal de control).

Finalmente, ambas gráficas incluyen los triángulos negros que se utilizan para cambiar las escalas de las mismas (pulsando a izquierda o derecha de los situados en el eje de abscisas y en la parte inferior o superior de los ubicados en el eje de ordenadas).

Ejercicios

1. Para un sistema en lazo abierto con ganancia estática $k = 0.5$ y constante de tiempo $\tau = 1$ s, diseñe un controlador PI para que el sistema en lazo cerrado tenga una constante de tiempo de 0.5 s. Introduzca una perturbación de amplitud 1 e indique cuánto tiempo tarda en recuperar el valor de la referencia. Introduzca un ruido de varianza 0.05. Analice el efecto que provoca modificar la especificación sobre τ_c en la señal de control en presencia de ruido. Comente los resultados.
2. Para el mismo caso del ejercicio anterior, desactive la opción de Cancelación perfecta. Estudie el efecto que tiene el desplazamiento del cero del controlador a derecha e izquierda del polo en el seguimiento de la referencia, el rechazo de la perturbación de carga y la inmunidad al ruido.
3. Con la configuración que aparece por omisión en la herramienta, ajuste la constante de tiempo del sistema en lazo cerrado de forma que la señal de control no pase de amplitud 2. Indique el valor de esa constante de tiempo y compárela con la del sistema en lazo abierto. Introduzca una perturbación de carga de amplitud uno en $t = 8$ s. ¿Qué tiempo de establecimiento se obtiene tras la introducción de la perturbación? Desactive la opción de Cancelación perfecta. Desplace el cero del controlador para que el tiempo de establecimiento tras la introducción de la perturbación sea inferior a 5 segundos. ¿Es posible conseguir ese resultado sin que la respuesta a un escalón en la referencia sobrepase el valor de la misma?
4. Para un sistema en lazo abierto con ganancia estática $k = 1$ y constante de tiempo $\tau = 10$ s, diseñe un controlador PI para que el sistema en lazo cerrado tenga una constante de tiempo de 2 s. Introduzca una perturbación de amplitud 1 e indique cuánto tiempo tarda en recuperar el valor de la referencia. Utilizando la herramienta **7.3. concepto_PID**, seleccione un sistema de primer orden sin retardo con las mismas características ($k = 1$, $\tau = 10$ s). Utilizando un controlador PI por cancelación (seleccionando $T_i = \tau = 10$ s), analice el efecto que tiene en el seguimiento de una referencia en forma de escalón unitario y en el rechazo de una perturbación de amplitud 1 el aumento de la ganancia K del controlador. Analice el valor que alcanza la señal de control $u_c(t)$ en cada caso y comente el resultado.

7.11 Control PID basado en las reglas de Ziegler-Nichols en lazo abierto

Herramienta interactiva: [7.11. PID_Ziegler_Nichols](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Obtención de parámetros de controladores a partir del método de la curva de reacción.
- Diseño basado en reglas heurísticas.
- Diseño de controladores PID para sistemas sobreamortiguados con retardo.
- Sintonización fina manual a partir de la sintonización usando las reglas de Ziegler-Nichols.

Teoría En el mundo industrial están ampliamente implantados los métodos empíricos o experimentales de sintonización de controladores, dado que la obtención de modelos basados en primeros principios suele ser una tarea compleja. Los métodos heurísticos suelen seguir dos pasos:

1. Estimación de ciertas características de la dinámica del proceso (en lazo abierto o lazo cerrado).
2. Cálculo de parámetros del controlador a partir de ciertas reglas que relacionan dichos parámetros con las características del sistema obtenidas en el paso anterior.
3. Se verifica el comportamiento del sistema en lazo cerrado y se lleva a cabo un ajuste fino de los parámetros, generalmente en línea.

El método de Ziegler-Nichols, desarrollado entre los años 1942-43 para reguladores de la casa Taylor Instruments, constituye una metodología heurística para obtener los parámetros de controladores PID. Se utiliza cuando la respuesta al escalón del sistema es de tipo sobreamortiguado o sigmoidal, es decir, no presenta sobreoscilación y el sistema además tiene un tiempo de retardo. El método original se basa en la medida de una parte de la respuesta temporal a escalón unitario en lazo abierto de un sistema sobreamortiguado. La respuesta se caracteriza por la medida de los parámetros a y t_1 en la Figura 7.7 (parte izquierda), que son respectivamente las intersecciones de la recta tangente al punto con mayor pendiente de la curva de respuesta con los ejes de ordenadas y abscisas. El parámetro t_1 es una aproximación al tiempo de retardo del sistema.

Con este método no hay que esperar a que el sistema alcance el estado estacionario, pero está sujeto a errores en la medida de la tangente. Los parámetros del controlador PID se obtienen de la Tabla 7.3. En el método original los parámetros se obtuvieron a través de simulaciones extensivas utilizando un conjunto de procesos representativos cuyos controladores se sintonizaron manualmente, tratando de encontrar una correlación entre los parámetros del controlador y los parámetros a y t_1 . El criterio que usaron fue el de razón de amortiguamiento de $1/4$ (la segunda sobreoscilación de la respuesta en lazo cerrado tiene $1/4$ de amplitud de la primera). Este criterio previene de grandes desviaciones en el primer pico de la respuesta del sistema cuando se producen cambios en la carga o perturbaciones sobre el sistema, pero trae consigo una sobreoscilación de hasta el 50% cuando se introducen cambios bruscos en la referencia.

Realmente, se suele trabajar con una de las múltiples variantes del método que no es aplicable a sistemas con integradores o subamortiguados y que es la que se va a utilizar en esta sección (método de la curva de reacción).

El método consiste en aproximar la función de transferencia del sistema por la de un sistema de primer orden caracterizado por los parámetros k (ganancia estática), τ (constante de tiempo) y t_r (tiempo de retardo):

$$G(s) = \frac{k}{(\tau s + 1)} e^{-t_r s} \quad (7.24)$$

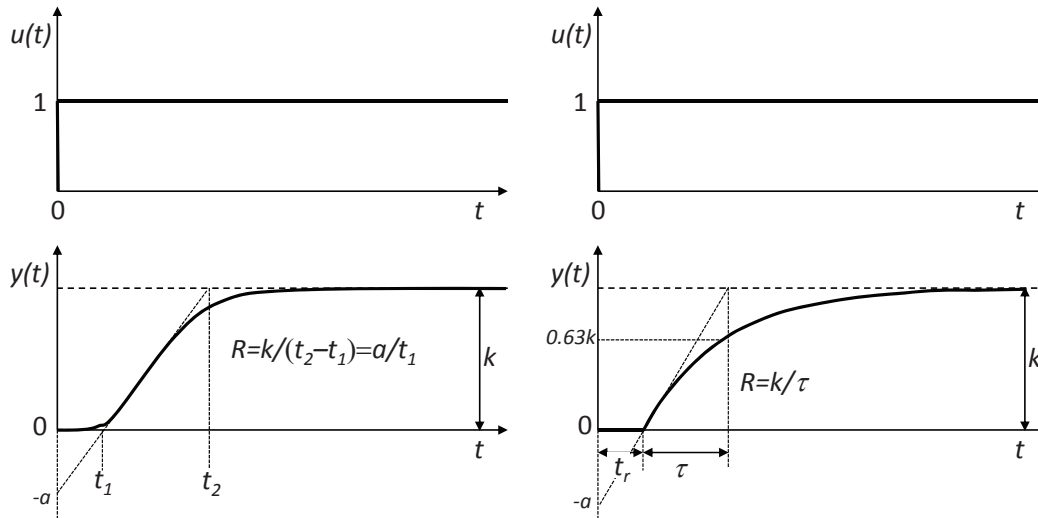


Figura 7.7 Caracterización de la respuesta a escalón unitario en el método de Ziegler-Nichols en lazo abierto

Si el sistema a controlar no presenta claramente un tiempo de retardo puro, se considera el mismo igual al tiempo que tarda el sistema en alcanzar el 5% de su valor de estado estacionario. Con los valores de los parámetros descriptivos de un sistema de primer orden con retardo (ver la parte derecha de la Figura 7.7), se pueden obtener los parámetros característicos de un controlador PID a través de las expresiones de la tabla 7.3. Nótese que en este caso hay que calcular los parámetros del modelo teniendo en cuenta el estado estacionario del sistema y por tanto $a = kt_r / \tau$. Además, si el escalón unitario se introduce en $t = 0$, el sistema tarda en alcanzar el 28% de su valor final en $t_{28} = t_r + \tau/3$ y el 63% en $t_{63} = t_r + \tau$. Por tanto, además de como se indica en la parte derecha de la Figura 7.7, se puede obtener analíticamente $\tau = \frac{3}{2}(t_{63} - t_{28})$ y $t_r = t_{63} - \tau$.

Realmente, el método proporciona resultados aceptables en el intervalo: $0.1 < t_r / \tau < 1$. En casos en que no se cumpla esta condición los resultados obtenidos de la aplicación de las reglas habitualmente no proporcionarán resultados aceptables y requerirán una sintonización manual del controlador e incluso el uso de otros esquemas de control más avanzados (por ejemplo, los basados en predictores).

CONTROLADOR	K	T_i	T_d
P	$\frac{1}{a} \approx \frac{\tau}{kt_r}$	-	-
PI	$\frac{0.9}{a} \approx \frac{0.9\tau}{kt_r}$	$3t_r$	-
PID	$\frac{1.2}{a} \approx \frac{1.2\tau}{kt_r}$	$2t_r$	$0.5t_r$

Tabla 7.3 Reglas de Ziegler-Nichols en lazo abierto

Como se observa, la aplicación de la regla proporciona los valores de las constantes características de los controladores **PID**: K , T_i y T_d .

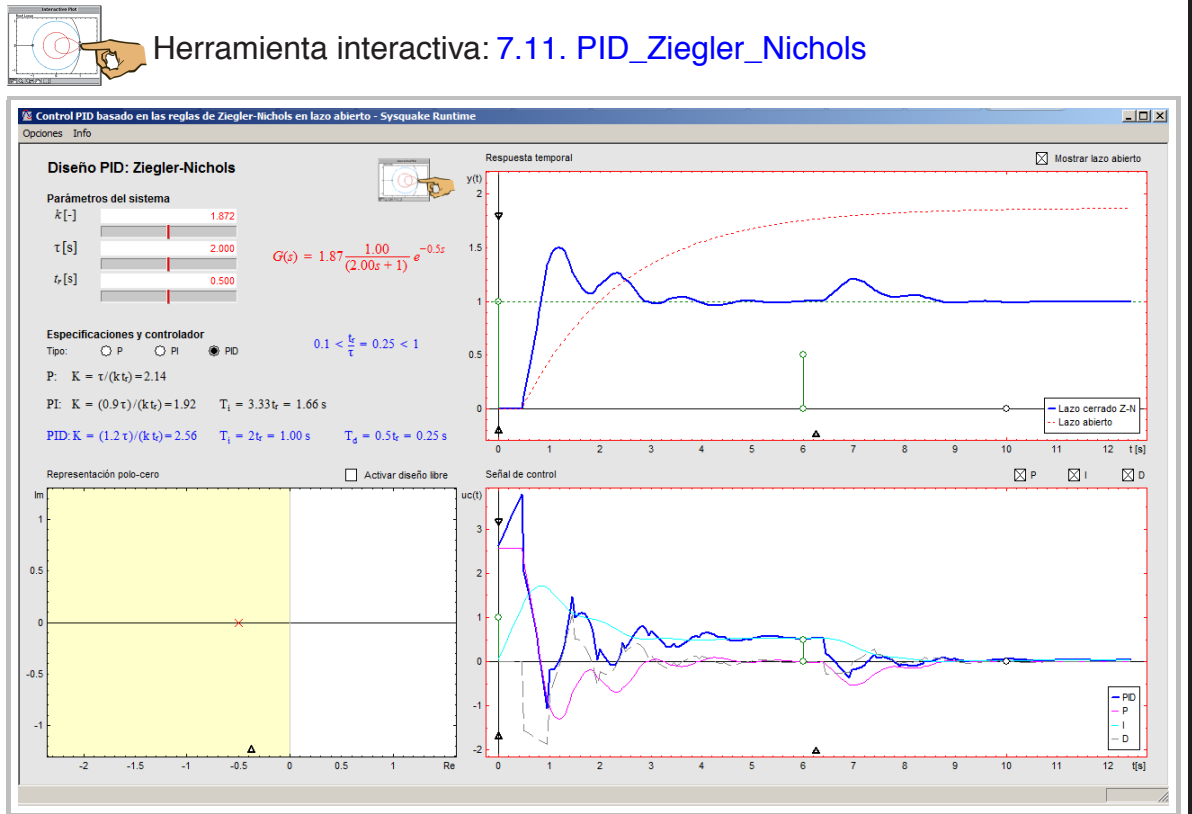
Como se ha indicado previamente, las reglas de sintonización de Ziegler-Nichols se desarrollaron para obtener sistemas de control en lazo cerrado con una buena atenuación de perturbaciones de carga (problema de regulación). Los casos que consideraron fueron aquéllos en los que el principal factor que limitaba el comportamiento era la dinámica del proceso. El método hacía poco énfasis en la compensación del ruido de medida, la sensibilidad a variaciones en el proceso y cambios en la referencia. Cuando los controladores diseñados con estas reglas se emplean para seguimiento de referencias en forma de escalón, suelen provocar sobreoscilaciones en el lazo cerrado en respuesta a cambios de referencia y unos márgenes de estabilidad relativos bajos. De hecho, el método lo que proporciona son unos valores iniciales de los parámetros del controlador que permiten un refinamiento manual posterior (con una reducción considerable de la ganancia del controlador). La sintonización manual se realiza típicamente con experimentos sobre el proceso en lazo cerrado (por ejemplo incluyendo un cambio en escalón en la referencia). Se observa la respuesta en lazo cerrado, y se ajustan los parámetros del controlador, atendiendo a reglas del tipo:

- Aumentando la ganancia proporcional disminuye la estabilidad.
- El error decae más rápidamente si se disminuye el tiempo integral.
- Disminuyendo el tiempo integral disminuye la estabilidad.
- Aumentando el tiempo derivativo mejora la estabilidad.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press. ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 10, sección 3, páginas 302-305, 2008.
- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Capítulo 14, sección 4, apartado 2, páginas 387-388, 2009.
- [10] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Modern control systems. Pearson - Prentice Hall. ISBN: 978-0-13-602458-3. Capítulo 7, sección 6, páginas 488-491, 2011.
- [13] Franklin, G. F., J. D. Powell y A. Emani-Naeni. Feedback control of dynamic systems. Pearson. ISBN:978-0-13-500150-9. Capítulo 4, sección 3, apartado 4, páginas 210-212, ejercicio 4.33, página 236, 2010.
- [16] Goodwin, G. C., S. F. Graebe y M. E. Salgado. Control system design. Prentice Hall. ISBN:0-13-958653-9. Capítulo 6, sección 5, páginas 166-168, 2001.

Aplicación



Diseño PID: Ziegler-Nichols

La interfaz de la herramienta sigue la misma distribución de elementos que las anteriores. En el área superior izquierda (**Parámetros del sistema**) se muestran cuadros de texto y barras de desplazamiento que permiten introducir los valores descriptivos de una función de transferencia de primer orden con retardo de tiempo (ganancia estática k , constante de tiempo τ y tiempo de retardo t_r). A la derecha se muestra la representación simbólica de esta función de transferencia, que permite aplicar las reglas modificadas de Ziegler-Nichols en lazo abierto expuestas en la tabla 7.3. Debajo de esta sección aparece la dedicada a la elección del tipo de controlador (**Especificaciones y controlador**). A través de casillas circulares de selección (*radiobuttons*) se puede elegir la clase de controlador sobre la que se aplican las reglas de Ziegler-Nichols (*Proporcional P*, *Proporcional-Integral PI* o *Proporcional-Integral-Derivada PID*). En la misma línea en la que se selecciona la clase de controlador, se muestra una desigualdad que indica si se cumple o no la relación $0.1 < t_r / \tau < 1$ y por tanto proporciona información sobre la idoneidad o no de la aplicación del método. Si se cumple la desigualdad se representa en color azul. Si no se cumple se dibuja en color verde. Debajo de esta línea aparecen tres nuevas líneas donde se indican las reglas que se están aplicando en función del tipo de controlador seleccionado (la regla activa se señala en color azul).

Debajo del área dedicada a la selección de los parámetros del modelo y la configuración del controlador se ubica el plano de Representación polo-cero, donde por omisión se muestra la ubicación del polo descriptivo de la función de transferencia de primer orden del lazo abierto.

Aplicación...

La posición de este polo se puede modificar interactivamente, provocando el correspondiente cambio tanto en los parámetros descriptivos del modelo del sistema como los relacionados con el controlador (nótese que este tipo de representación no permite incluir t_r y k , que se deben cambiar en el área de **Parámetros del sistema**).

Justo encima del diagrama de polos y ceros, en la línea del título, se incluye un cuadro de selección tipo *checkbox* que permite Activar diseño libre, es decir, partiendo de los valores de los parámetros del controlador seleccionado (P, PI ó PID) proporcionados por las reglas de Ziegler-Nichols, ayuda a realizar una sintonización manual del controlador que posibilita mejorar los resultados que se alcanzan con la aplicación directa del método. La activación de este cuadro tiene una gran utilidad a la hora de obtener unos resultados aplicables en la práctica. Cuando se activa la opción, en el área de **Especificaciones y controlador** se muestran cuadros de texto y barras de desplazamiento que permiten modificar los parámetros del controlador y cuyos valores por omisión son los que proporcionan las reglas de Ziegler-Nichols, que se desplazan en este caso a la parte derecha para facilitar en todo momento la visualización de las diferencias entre los valores que suministran las reglas y los elegidos por el usuario.

La parte derecha de la interfaz está dedicada a la representación de la respuesta temporal, mostrando la salida del sistema en la gráfica superior (Respuesta temporal) y la entrada en la parte inferior (Señal de control), donde se pueden seleccionar las contribuciones individuales (en caso que el usuario marque el cuadro correspondiente colocado sobre la gráfica de la señal de control) de las acciones proporcional (P), integral (I) y derivada (D) en la respuesta final del controlador. El círculo de color verde (◉ situado sobre el eje de ordenadas de ambas gráficas) permite modificar la amplitud del escalón en la referencia (que también puede ser modificada desplazando verticalmente la línea discontinua del mismo color), mientras que los dos círculos colocados sobre el eje de abscisas facilitan la inclusión de una perturbación de carga a la entrada (el círculo central) o un ruido a la salida (el círculo derecho), al ser desplazados verticalmente. En tal caso, sobre el eje del tiempo permanecen otros círculos que permiten modificar el instante en el que se introduce la perturbación o el ruido.

En la gráfica superior se puede activar la representación de la respuesta temporal del lazo abierto. Cuando se selecciona la opción de Activar diseño libre, se muestra sobre la gráfica un cuadro con leyendas que representan los resultados de la aplicación directa de las reglas de Ziegler-Nichols (en color azul) y cuando se aplica diseño libre (en negro). En la gráfica inferior se dibujan las señales de control en ambos casos.

Cuando se sitúa el puntero del ratón sobre cualquiera de las curvas de respuesta temporal, se superponen sobre las gráficas los valores asociados de tiempo y de la señal (entrada $u(t)$ y salida $y(t)$). Ambas gráficas incluyen los triángulos negros que se utilizan para cambiar las escalas de las mismas (pulsando a izquierda o derecha de los situados en el eje de abscisas y en la parte inferior o superior de los ubicados en el eje de ordenadas).

Ejercicios

1. Seleccione un sistema con $k = 1$, $\tau = 5$ y $t_r = 3$. Seleccione un cambio en escalón en la referencia de amplitud 1 en $t = 0$ s y un cambio en la perturbación de carga de amplitud 0.5 en $t = 30$ s. Analice los resultados que se obtienen de la aplicación directa de las reglas de Ziegler-Nichols con un controlador PI:
 - a) ¿Es mayor la contribución de la parte proporcional o de la integral del controlador? Comente la respuesta.
 - b) Seleccione la opción de Activar diseño libre y obtenga unos nuevos parámetros del controlador PI de forma que se mejore el seguimiento de referencia (con menor sobreoscilación y menor tiempo de pico) y el rechazo de perturbaciones (con menor sobreoscilación y menor tiempo de establecimiento). ¿Es posible realizar esa mejora? Comente los pasos seguidos para conseguirlo (en caso de ser posible). ¿Podría conseguirse con un controlador PID? Comente su respuesta.
 - c) Fijando el valor de K al proporcionado por las reglas de Ziegler-Nichols, modifique el valor del tiempo integral T_i para que la sobreoscilación cuando la referencia es un escalón sea de un 30%. ¿Con qué valor del tiempo integral se consigue? ¿Cuál es ahora la sobreoscilación y el tiempo de establecimiento asociados a la respuesta de la perturbación?
 - d) Fijando el valor de T_i al proporcionado por las reglas de Ziegler-Nichols, modifique el valor de la ganancia K para que no exista sobreoscilación tras un cambio en forma de escalón en la referencia. ¿Con qué valor de K se consigue? ¿Cuál es ahora la sobreoscilación y el tiempo de establecimiento asociados a la respuesta de la perturbación?
2. Seleccione un sistema con ganancia estática unidad ($k = 1$) y constante de tiempo igual a 1 segundo ($\tau = 1$). Seleccione también una perturbación de carga con una amplitud de 0.5 (la que aparece por omisión). Para valores del tiempo de retardo t_r en el intervalo [0.1 10]:
 - a) Seleccionando un controlador P, indique para qué sistema se obtienen los mejores resultados desde su punto de vista. Comente los resultados obtenidos en todo el intervalo de modificación de t_r y justifique los resultados desde el punto de vista de la respuesta transitoria y del comportamiento en estado estacionario.
 - b) Repita el apartado anterior para el caso de los controladores PI y PID.
 - c) Para el caso en que $t_r = 0.5$ s, indique si la respuesta del controlador a rechazo de perturbaciones de carga es mejor o peor que a cambio en la referencia. ¿Se cumple la relación de 1/4 entre la primera y la segunda sobreoscilación? Para el caso del controlador PID, seleccione la casilla de Activar diseño libre e intente modificar la ganancia del controlador para conseguir una respuesta sobreamortiguada a cambio en escalón en la referencia. ¿Qué ocurre en este caso con las características de rechazo a perturbaciones?
 - d) Para el caso en que $t_r = 1$, seleccione la casilla de Activar diseño libre y modifique los dos parámetros del controlador (ganancia K y tiempo integral T_i) para obtener la mejor respuesta posible (desde su punto de vista) que suponga una solución de compromiso a seguimiento de referencias, rechazo de perturbaciones y error en estado estacionario. Apunte el valor de los parámetros obtenidos. Seleccione a continuación un controlador PID y analice si es posible mejorar los resultados obtenidos cambiando el valor de T_d . Comente la respuesta. Con la última configuración del controlador PID seleccionado, escoja un valor del ruido con una varianza aproximada de 0.01. Comente las diferencias que encuentra entre el controlador PID y el controlador PI.

3. Considere un sistema descrito en [2] con una función de transferencia $G(s) = e^{-s}/s$. Aproxime el integrador por un sistema de primer orden con una constante de tiempo muy grande y determine los parámetros de controladores P, PI y PID usando las reglas de Ziegler-Nichols en lazo abierto. Discuta los resultados obtenidos.
4. Una máquina de fabricación de papel usa una función de transferencia (referencia [13], página 236):

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{3s + 1}$$

que relaciona el flujo de entrada de materia con el grosor de salida. Aplique el método de sintonización de Ziegler-Nichols en lazo abierto a este problema. Analice la respuesta que se obtiene a cambios en forma de escalón de amplitud 1 en la referencia y en la perturbación de carga. Analice también el comportamiento del sistema en lazo cerrado cuando a la salida hay un ruido. Usando la opción Activar diseño libre, calcule la ganancia proporcional crítica K a partir de la cual el sistema se hace inestable.

5. En [2] se puede encontrar un ejemplo de control de congestión de tráfico en un enlace en transmisiones TCP. Utiliza un modelo linealizado que describe la dinámica que relaciona la longitud de la cola q con la caída de paquetes p :

$$G_{qp}(s) = \frac{b}{(s + a_1)(s + a_2)} e^{-t_r s}$$

Los parámetros vienen dados por $a_1 = 2N_f^2/(ct_r^2)$, $a_2 = 1/t_r$ y $b = c^2/(2N_f)$. El parámetro c es la capacidad del cuello de botella, N_f es el número de fuentes que alimentan ese enlace y t_r es el retardo de ida y vuelta. Use los valores de los parámetros $N_f = 75$ fuentes, $c = 1250$ paquetes/s y $t_r = 0.15$ s y encuentre los parámetros de un controlador PI usando las reglas de Ziegler-Nichols. Simule las respuestas del sistema en lazo cerrado que se obtienen con un controlador PI. Para la realización de este ejercicio es posible que tenga que utilizar la herramienta interactiva [3.5. t_générico](#) para aproximar el modelo por uno de primer orden con tiempo de retardo.

8

Control de sistemas físicos

Introducción

En los capítulos previos se han desarrollado distintos métodos de diseño y sintonización de controladores. En todos ellos, se hacía énfasis en la necesidad de simular el comportamiento del sistema de control en lazo cerrado para verificar si se alcanzan o no las especificaciones de diseño. En esta ficha se utilizan de forma práctica los conocimientos adquiridos en las aplicaciones previas para implementar un sistema de control de la altura de líquido del tanque con descarga a la atmósfera. Todo el proceso de modelado y linealización del sistema se ha estudiado en el Capítulo 2. En el Capítulo 5 se establecieron las relaciones entre los parámetros físicos del tanque y los valores de altura de líquido y caudal que definen el punto de trabajo con los parámetros de la función de transferencia que modela el comportamiento del sistema en un entorno del punto de operación.

Como se suele hacer en la práctica industrial, se utilizará un modelo lineal del sistema, válido en torno a un punto de operación, para diseñar un controlador que cumpla unas determinadas especificaciones. En el caso tratado en este capítulo se ha utilizado como primera aproximación el método de cancelación de polos estudiado en la Sección 7.10 del Capítulo 7, dado que la dinámica del sistema cerca del punto de operación se puede modelar a través de una función de transferencia de primer orden. Una vez implementado el controlador, el objetivo de esta ficha es analizar su comportamiento, así como el efecto de alejar al sistema en lazo cerrado del punto de operación para el que se ha diseñado el sistema de control.

8.1 El sistema de un tanque III

Herramienta interactiva: [8.1. tanque_control](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Sintonía de controladores PI en base a la respuesta en un punto de operación.
- Control de un sistema dinámico no lineal en torno a un punto de operación.
- Efecto del cambio del punto de operación en la respuesta en bucle cerrado.

Teoría Esta ficha permite desarrollar un ejemplo práctico de control automático del tanque cuyo modelo se ha desarrollado en la ficha 2.1 (herramienta interactiva [2.1. tanque_linearización](#)) y cuya función de transferencia se obtuvo en la ficha 5.1 (herramienta interactiva [5.1. tanque_parámetros](#)).

Los conceptos que se pretenden analizar en esta ficha son:

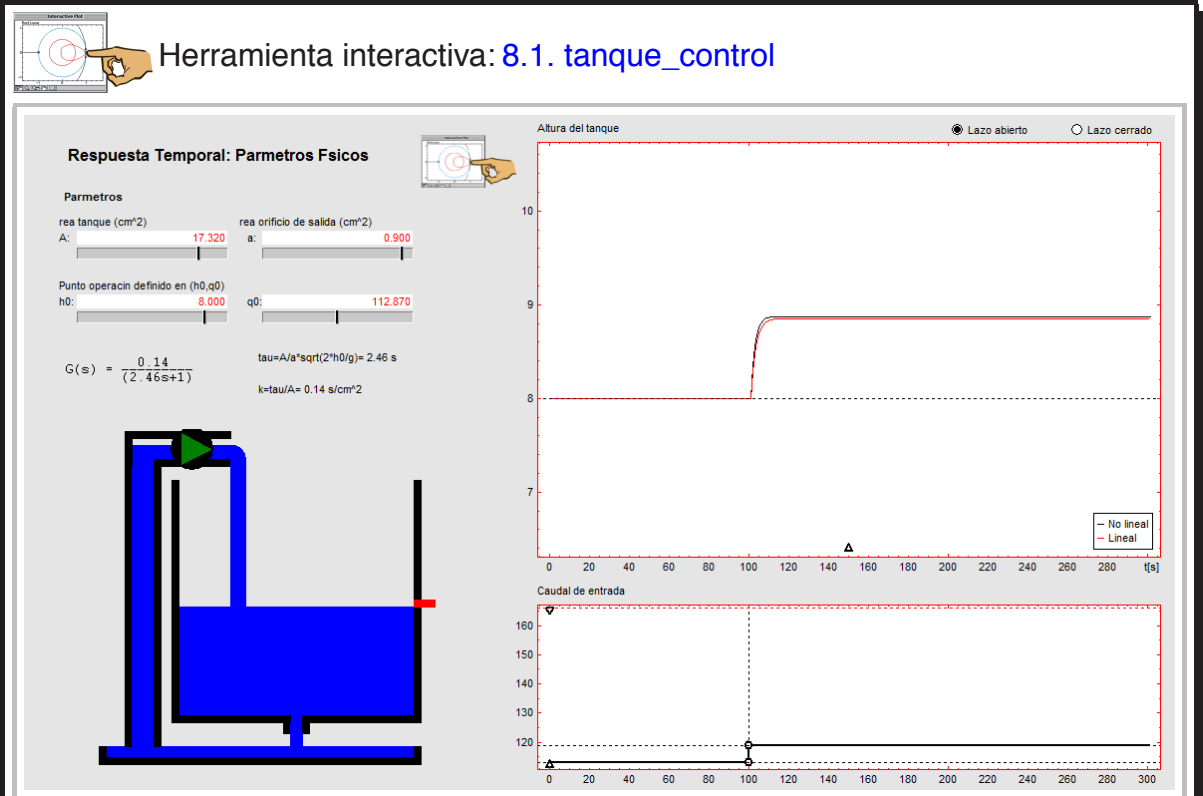
1. Selección de un punto de operación y obtención de un modelo lineal de desviación respecto a ese punto de operación.
2. Diseño de un controlador PI para controlar el sistema en torno al punto de operación definido en el apartado previo.
3. Simulación del sistema en bucle cerrado usando como modelo de simulación el modelo no lineal y como modelo para el diseño del controlador en el paso previo el modelo lineal. Análisis de la señal de control.
4. Análisis de la respuesta obtenida cuando se modifica ligeramente el punto de operación a través del cambio de la consigna en bucle cerrado.
5. Repetición del diseño cuando se cambia de punto de operación.
6. Análisis de la respuesta temporal cuando se trabaja en un punto de operación alejado del utilizado para diseñar el controlador.

Todos los conceptos necesarios han sido estudiados en los capítulos previos, por lo que el desarrollo de este capítulo se centrará en la parte práctica de análisis, síntesis y simulación con la herramienta interactiva.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Ejercicio 4.2 páginas 126-127, 2008.
- [15] Golnaraghi, F. y B. C. Kuo. Automatic control systems. Novena edición. Marcel Dekker Inc., ISBN: 978-0470-04896-2. Páginas 5-7, 109, 184-187, 215-216, 242, 2010.
- [23] Johansson, K. H. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. IEEE Transactions on Control Systems Technology, páginas 456-465, 2000.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 2, sección 7, páginas 42-45 y 101-105, 2010.

Aplicación



Respuesta temporal: Control de altura

La ventana que aparece por omisión es la misma que se trató en la ficha 5.1 (herramienta interactiva [5.1. tanque_parámetros](#)), siendo recomendable que el lector analice previamente esa ficha. La única novedad es que en la parte superior derecha aparecen dos botones que permiten activar el análisis en Lazo abierto (por omisión) o bien en Lazo cerrado.

La ventana de configuración en bucle abierto permite definir la estructura del sistema (punto de equilibrio inicial $((h_0, q_0)$, sección del tanque A y área de descarga a) y obtener el modelo linealizado en forma de función de transferencia de primer orden (cuya ganancia estática y constante de tiempo están relacionadas con el punto de equilibrio definido y los parámetros físicos del sistema). Aparece sobre el tanque una línea gruesa de color verde que señala el punto de equilibrio seleccionado.

Las gráficas de la zona derecha de la herramienta representan la Altura del tanque (tanto del modelo no lineal en color negro como del linealizado en color rojo) y el Caudal de entrada. Situando el puntero del ratón sobre un punto determinado de las curvas de evolución temporal se activa una etiqueta que muestra las propiedades asociadas a ese punto (tiempo t y valor de la señal de salida y o de entrada u). Sobre la gráfica de Altura del tanque situada en la zona superior derecha, se dispone de dos botones circulares de selección excluyente que permiten analizar la respuesta en Lazo abierto o bien realizar una simulación del comportamiento del sistema en Lazo cerrado, siendo esta posibilidad una novedad de esta herramienta respecto al resto que componen este texto.

Aplicación...

En modo de Lazo abierto, la gráfica inferior derecha de la herramienta representa una señal en escalón, configurable a través de dos líneas horizontales y una vertical de trazo discontinuo y color negro. La línea vertical facilita el cambio del instante en que se introduce el escalón. La línea discontinua horizontal inferior establece el punto de operación (q_0), que también puede modificarse en el área de **Parámetros**. La línea horizontal superior se utiliza para cambiar la amplitud de la señal en forma de escalón. Cuando se sitúa el puntero del ratón sobre cualquiera de estas líneas se muestra la información sobre el instante en que se introduce el escalón y la amplitud del mismo en la esquina inferior izquierda de la herramienta.

Una vez definido el sistema, si se activa la opción de Lazo cerrado, se obtiene una simulación dinámica del proceso controlado con un controlador PI cuyos parámetros iniciales han sido obtenidos para una configuración arbitraria por el método de cancelación de polos (Sección 7.10). En la zona de parámetros se puede modificar el valor de la referencia (a través de un cuadro de texto o de una barra de desplazamiento) o bien deslizando verticalmente el segmento **verde** que señala el punto de equilibrio o punto de operación sobre el tanque. También se pueden cambiar interactivamente (a través de las barras de desplazamiento correspondientes) los valores de la ganancia proporcional K y del tiempo integral T_i del controlador PI.

Durante la simulación (que se realiza utilizando el modelo no lineal), las gráficas de la derecha van cambiando. Se representan ahora la salida del sistema en lazo cerrado y la señal de control que proporciona el controlador PI en color **azul** y la referencia en trazo de color **verde** discontinuo. En el transcurso de la simulación la herramienta sigue siendo interactiva, en el sentido que se puede cambiar la geometría del tanque, los parámetros del controlador, etc. Hay que tener en cuenta que cuando se está en la opción de lazo cerrado, al tratarse de una simulación dinámica, cada vez que se produce un cambio en algún parámetro se detiene la simulación para actualizar el nuevo valor introducido y continuar la simulación acorde a dicho cambio.

Ejercicios

1. Seleccione una configuración inicial en la que el área del tanque sean 18 cm^2 , el área del orificio de salida 0.9 cm^2 y el punto de trabajo inicial venga definido por $h_0=3 \text{ cm}$. Indique el valor de la ganancia y de la constante de tiempo del sistema resultante. Indique el valor de q_0 correspondiente al punto de equilibrio inicial.
2. Para la configuración anterior, diseñe un controlador PI para que el sistema en bucle cerrado tenga una constante de tiempo de 0.3 s . Indique su ganancia proporcional K y su tiempo integral T_i .
3. Seleccione la opción de Lazo cerrado e introduzca los valores de los parámetros del controlador calculados en el apartado anterior. Cambie la referencia de 3 a 6. Comente los resultados obtenidos y lo que cabría esperar desde un punto de vista teórico.
4. Vuelva a colocar la referencia en torno a 0.3. Cuando el sistema llegue a su estado estacionario cambie la referencia a 15. Comente los resultados obtenidos. ¿Tiene el sistema en lazo cerrado el mismo comportamiento que en el caso anterior? Comente los resultados y las razones que pueden motivar las diferencias, en el caso de que existan.

9

Introducción al control en el espacio de estados

Introducción

En la teoría de control automático se utilizan habitualmente dos descripciones de los sistemas dinámicos, la externa y la interna. La descripción externa establece una relación funcional explícita entre las señales de entrada y las de salida, que en este texto se ha expresado en forma de función de transferencia. La descripción interna se basa en el concepto de *estado* de un sistema dinámico:

- Se entiende por *estado* de un sistema dinámico al conjunto mínimo de variables tales que si se conoce su valor en un instante t_0 así como las entradas para $t \geq t_0$, queda determinado por completo el comportamiento del sistema para cualquier tiempo futuro $t \geq t_0$ (si el sistema es *determinista*¹).
- Ese conjunto mínimo de variables que definen el estado del sistema dinámico se conocen como *variables de estado*. Si se requieren al menos n variables $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ para describir por completo el comportamiento de un sistema dinámico, tales n variables son un conjunto de variables de estado. En general, el conjunto de variables dependientes que constituyen el estado puede elegirse de distintas maneras.
- Estas n variables que configuran el estado se suelen agrupar en un vector que se denomina *vector de estado* del sistema dinámico. Por tanto, un vector de estado es aquél que determina de manera única el estado de un sistema dinámico $x(t)$ para cualquier tiempo $t \geq t_0$, una vez que se conoce el estado en $t = t_0$ y la entrada $u(t), t \geq t_0$.
- Se denomina *espacio de estados* al espacio de n dimensiones cuyos ejes de coordenadas corresponden a las variables de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$. Cualquier estado se representa mediante un punto en el espacio de estados, de forma que la evolución dinámica de un sistema es una trayectoria que parte del punto inicial (determinado por el valor del vector de estado en $t = t_0$) y llega hasta el punto final, que habitualmente es un estado de equilibrio asociado a una posición u oscilación constante (régimen estacionario o régimen permanente). Una *trayectoria* u *órbita* es el lugar de $x(t)$ en el *plano de fase* que pasa por x_0 . El plano de fase muestra el campo vectorial del sistema, que proporciona la velocidad del estado (representada por una flecha) en cada punto del espacio de estado. Hay por tanto que entender fase como estado (el espacio de fase es un espacio de

¹Sistema en el cual el azar no está involucrado en los futuros estados del sistema.

estados en el que las coordenadas de un punto suministran toda la información sobre el estado del sistema). En el plano de fase las flechas indicadas previamente se denominan *isoclinas*, pues definen la curva en el plano donde las trayectorias tienen la misma velocidad (pendiente). Una familia de trayectorias de evolución del sistema se suele denominar *plano de fase* o *retrato de fase*. Efectivamente, como $\dot{x}(t) = f(x) = Ax(t) + Bu(t)$, $f(x)$ es un vector tangente a la curva $x(t)$ en el plano de fase y constituye por tanto un campo vectorial cuyas isoclinas son los puntos donde $f(x)$ es constante ($Ax(t) + Bu(t) = c$). Para un *sistema autónomo*² genérico de segundo orden:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

se puede definir la pendiente de una trayectoria en el punto x como:

$$S(x) = \frac{f_2(x)}{f_1(x)}$$

La ecuación $S(x) = c$, con c constante, define las curvas isoclinas para distintos valores de c .

- En este contexto, la *respuesta libre* de un sistema dinámico (también denominada *respuesta natural* o *respuesta a entrada cero*) es la que generan, en ausencia de entradas, las *condiciones iniciales* del mismo (no nulas). Es la parte de la respuesta total debida al sistema y a la forma en que adquiere o disipa energía. También se considera la parte de la respuesta determinada por las raíces del polinomio característico. La *respuesta forzada* es la debida exclusivamente a las variaciones de la señal de entrada, supuestas condiciones iniciales nulas. La respuesta forzada es la solución cuando las condiciones iniciales son nulas y el sistema se encuentra sometido a una señal de entrada $u(t)$. En sistemas lineales invariantes en el tiempo, la respuesta total del sistema es la superposición de la respuesta libre y la respuesta forzada.

Lógicamente, existe una relación entre la descripción externa y la descripción interna. Los modelos matemáticos de sistemas lineales invariantes en el tiempo se suelen representar a través de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de orden n , tal como se trató en el Capítulo 3. Aplicando las propiedades de la transformada de Laplace con condiciones iniciales nulas, se observó que se podía obtener una función de transferencia cuyo orden coincide con el de la ecuación diferencial de la que proviene. La descripción interna parte de la misma ecuación diferencial, pero transformándola a un sistema de n ecuaciones diferenciales de primer orden, donde cada una describe la evolución dinámica de un estado. En cierta forma, a través de las variables de estado, se está condensando todo el pasado dinámico del sistema en el instante actual t . En la transformación de la ecuación diferencial lineal de orden n al sistema de n ecuaciones de primer orden, existen teóricamente infinitas formas de definir las variables de estado y de hecho, algunas veces guardarán un cierto sentido físico, pero la mayoría de las veces serán variables matemáticas sin significado físico.

²Sistema que no está sometido a influencias de señales externas.

9.1 Espacio de Estados

Herramienta interactiva: [9.1. espacio_estados](#)

Conceptos analizados en la ficha

- Concepto de estado.
- Descripción interna.
- Ecuación diferencial de estado.
- Espacio de estados.
- Formas canónicas.
- Matriz exponencial.
- Ecuación de convolución.
- Ley de control de realimentación lineal del estado completo.

Teoría Como se ha comentado en la introducción de este capítulo, las dos representaciones típicas de los modelos de sistemas lineales invariantes en el tiempo son de una parte en forma de función de transferencia (descripción externa) y de otra la representación en el espacio de estados (descripción interna).

La realización general en espacio de estados viene dada por:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t)\end{aligned}$$

La primera ecuación es la denominada *ecuación de estado* y la segunda *ecuación de salida*. En sistemas lineales invariantes en el tiempo, como los tratados en este texto, las matrices A , B , C y D tienen todos sus coeficientes constantes. Además, se tratará el caso de sistemas causales o estrictamente propios y por tanto se considerará que $D = 0$ en todo el desarrollo. El vector $x(t)$ es el *vector de estados* y sus componentes son las *variables de estado*; $u(t)$ e $y(t)$ son respectivamente la entrada y la salida del sistema³.

En este capítulo se va a tratar exclusivamente el problema de la realimentación completa del vector de estado estudiando el caso de sistemas con una entrada y una salida donde $n = 2$, dado que es el caso más sencillo y más rico en contenidos visuales. El resumen teórico sin embargo se realizará para el caso de dimensión genérica n para sistemas con una entrada y una salida.

Las representaciones en el espacio de estados no son únicas, existiendo una serie de *formas canónicas*, entre las que destacan las dos que se citan a continuación. Si la función de transferencia viene dada por:

$$G(s) = \frac{b_{n-1}s^{n-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0}$$

se obtienen, entre otras, las siguientes formas canónicas:

³En general, si el sistema es de n -ésimo orden con m salidas y p entradas las dimensiones de las matrices del modelo en espacio de estados son: $A = n \times n$; $B = n \times p$; $C = m \times n$; $D = m \times p$.

Forma canónica de control (C):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & & \\ 0 & & I_{n-1} & \\ \vdots & & & \ddots \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [b_0 \ b_1 \ \cdots \ b_{n-1}]; \quad D = [0]$$

Forma canónica de observación (O):

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ \ddots & & & -a_1 \\ & I_{n-1} & & \vdots \\ & & \ddots & -a_{n-1} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]; \quad D = [0]$$

Por otra parte, si se aplica la transformada de Laplace a las ecuaciones de estado se obtiene la relación que liga a las matrices de la descripción del espacio de estados con la función de transferencia:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B + D \tag{9.1}$$

La solución de las ecuaciones de estado de un sistema lineal invariante en el tiempo se obtiene a través de la *ecuación de convolución*⁴:

$$x(t) = \underbrace{e^{At}x_0}_{\text{respuesta libre}} + \underbrace{\int_0^t e^{A(t-\xi)}Bu(\xi)d\xi}_{\text{respuesta forzada}}, \quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} = \Phi(t)$$

donde $\Phi(t)$ es la *matriz de transición de estados* y $x_0 = x(0)$. Se puede aproximar mediante el desarrollo en serie de la matriz exponencial matricial⁵:

$$\Phi(t) = e^{At} = I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

Diferenciando esta expresión respecto a t proporciona:

$$\dot{\Phi}(t) = \frac{d}{dt}e^{At} = A + A^2t + \frac{A^3t^2}{2!} + \dots = A \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = Ae^{At}$$

Cuando se trabaja con una descripción del sistema en el espacio de estados de sistemas lineales invariantes en el tiempo, se dice que el sistema es *asintóticamente estable* si el estado $x(t) \rightarrow 0$ cuando

⁴La convolución es una operación compleja sobre funciones definida por la integral de las dos funciones multiplicadas entre sí y desplazadas en el tiempo.

⁵En el apéndice A de la referencia [7] se puede encontrar un excelente resumen de definiciones y resultados de cálculo matricial útiles para el estudio de muchas cuestiones relacionadas con los sistemas dinámicos y de control.

$t \rightarrow \infty$ con $x(0) = x_0$. Se puede demostrar que esto ocurre cuando los autovalores⁶ de la matriz A tienen parte real negativa. Además, si no hay cancelaciones polo-cero se puede demostrar que los autovalores de la matriz A y los polos del sistema son iguales. La solución del sistema autónomo (no forzado) $\dot{x}(t) = Ax(t)$ para un estado viene dada por $x_i(t) = k_i e^{\lambda_i t}$, siendo los λ_i los autovalores del sistema o raíces de la ecuación característica $J(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$. Por tanto, la estabilidad se puede evaluar fácilmente analizando el signo de los λ_i , de forma que el sistema será estable si todos los autovalores tienen parte real negativa.

Este concepto de estabilidad se enmarca en uno más general, válido también para sistemas inestables. Sea $x(t, x_{0a})$ una solución a la ecuación diferencial con condición inicial x_{0a} . Una solución es estable si otras soluciones cuya condición inicial está cerca de x_{0a} permanecen cerca de $x(t, x_{0a})$ [2]. Formalmente, se dice que la solución $x(t, x_{0a})$ es estable si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\|x_{0b} - x_{0a}\| < \delta \rightarrow \|x(t, x_{0b}) - x(t, x_{0a})\| < \epsilon, \forall t > 0$$

Este tipo de estabilidad suele denominarse *estabilidad en el sentido de Lyapunov*. Cuando $x(t, x_{0a}) = x_e$ se dirá que el punto de equilibrio es estable. En sistemas lineales, el origen siempre es un punto de equilibrio. Una solución $x(t, x_{0a})$ es *asintóticamente estable* si es estable en el sentido de Lyapunov y cumple que $x(t, x_{0b}) \rightarrow x(t, x_{0a})$ cuando $t \rightarrow \infty$ para x_{0b} suficientemente cercano a x_{0a} [2].

Un sistema lineal autónomo dado por $\dot{x}(t) = Ax(t)$ tiene un diagrama de fases con trayectorias que no se cruzan y que describen la evolución del sistema para cualquier condición inicial. Para un sistema genérico $\dot{x}(t) = F(x(t))$, se dice que x_e es un estado de equilibrio si $F(x_e) = 0$. En los sistemas de segundo orden tratados en esta ficha, siempre que la matriz A sea no singular, se pueden obtener seis tipos de respuesta asociadas a los estados de equilibrio, representadas en la Figura 9.1.

Los autovalores describen cómo varía la solución en el tiempo y a esta solución se le suele llamar también *modo* del sistema, mientras que los autovectores proporcionan la "forma" de la solución [2].

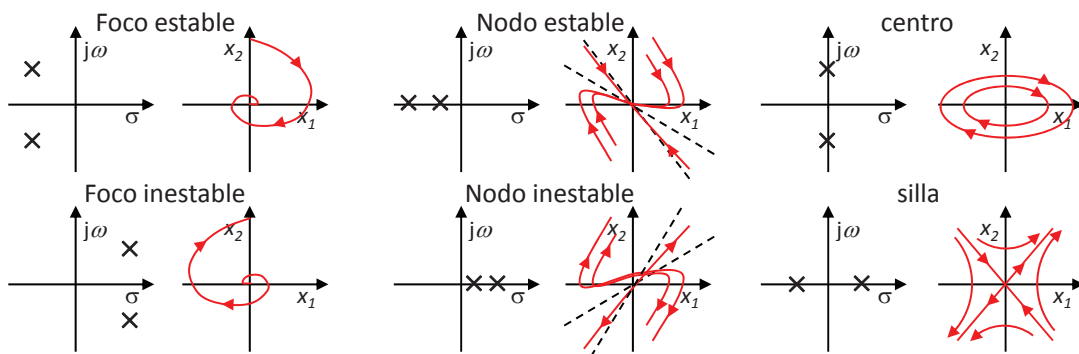


Figura 9.1 Clasificación de puntos de equilibrio para sistemas de segundo orden

⁶En álgebra lineal, los vectores propios o autovectores de un operador lineal son los vectores v no nulos tales que, cuando son transformados por el operador, dan lugar a un múltiplo escalar de sí mismos, con lo que no cambian su dirección. Este escalar λ recibe el nombre de valor propio o autovalor. Por tanto, se dice que v es un autovector de A con autovalor λ si $Av = \lambda v$. A menudo, una transformación queda completamente determinada por sus vectores propios y valores propios. Un espacio propio o autoespacio es el conjunto de vectores propios con un valor propio común.

La introducción de los conceptos de control cuando se trabaja con una representación en espacio de estados se suele hacer mediante los denominados *reguladores*. Los reguladores tienden a mantener la salida del sistema constante en presencia de perturbaciones. Por este motivo, cuando se diseñan reguladores se atiende a especificaciones sobre régimen transitorio, que se traducen en conseguir una posición deseada de los polos del sistema usando realimentación. En el espacio de estados, la forma más clásica de plantear el problema del control consiste en suponer que el sistema parte de un estado inicial $x(t_0) \neq 0$ y que a través del control hay que llevarlo al origen del plano de estados (estado de equilibrio) con unas características dinámicas determinadas por la asignación de los polos del sistema en lazo cerrado (respuesta libre del sistema). El control que se aplica se basa generalmente en una realimentación lineal del vector de estado, donde se usan las medidas o estimaciones de los estados del sistema para, una vez multiplicados por unas ganancias, generar la señal de control $u(t) = -Kx(t)$.

Se dice que un sistema es *controlable* si, usando una serie de entradas apropiadas (que en el control en el espacio de estados consiste en una realimentación lineal del vector de estado $u(t) = -Kx(t)$), los estados se pueden mover en una dirección arbitraria del espacio de estados. Dicho de otra manera, un sistema es completamente controlable si existe un control sin restricciones $u(t)$ que puede llevar cualquier estado inicial $x(t_0)$ a cualquier otro estado deseado $x(t)$ en un tiempo finito $t_0 \leq t \leq t_f$ [9]. Este concepto es equivalente a poder colocar los polos del sistema controlado en cualquier localización del plano complejo. El par (A, B) es *controlable* si y sólo si el rango de la *matriz de controlabilidad* Ω es n (el determinante de Ω es distinto de cero), siendo n el orden del sistema, es decir, la dimensión de A . La matriz de controlabilidad viene dada por: $\Omega = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$.

Si el sistema es lineal y completamente controlable, existen diversas fórmulas para calcular los valores de las ganancias de realimentación (elementos del vector K).

El polinomio característico del sistema viene dado por los autovalores de la matriz dinámica A : $J(s) = \det(sI - A) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0 = 0$. Con $u(t) = -Kx(t)$, si se considera el caso de regulación al origen (sin referencia externa), se tiene que $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$, por lo que el polinomio característico del lazo cerrado viene dado por los autovalores de la matriz $A_{lc} = (A - BK)$. Las especificaciones de régimen transitorio se pueden traducir en la localización de los polos dominantes del sistema en lazo cerrado, es decir, en la ecuación característica del sistema en lazo cerrado: $J_{lc}(s) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0$. Por tanto, una posible estrategia de síntesis (denominada *asignación de autovalores*) puede ser imponer que $\det(sI - A_{lc}) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_0$.

La forma canónica de control tiene la propiedad de que los parámetros del sistema son los coeficientes del polinomio característico. Por tanto, es natural trabajar con esta representación cuando se va a resolver el problema de asignación de autovalores, pues produce un vector de ganancias de realimentación igual a $K = [\alpha_{n-1} - a_{n-1} \ \dots \ \alpha_0 - a_0]$.

La *fórmula de Ackerman* permite calcular la matriz de ganancias de realimentación del vector de estados para ubicar los polos en lazo cerrado en una posición deseada:

$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1] \Omega^{-1} J_{lc}(A) \quad (9.2)$$

donde $J_{lc}(A)$ es el polinomio característico del lazo cerrado particularizado para la matriz A .

Con esta idea como base, se pueden desarrollar una serie de esquemas de control en función de las características de las perturbaciones exógenas al sistema (existencia de referencia y perturbaciones a la entrada). El esquema básico de control es el que se muestra en la Figura 9.2, que representa una estabilización (regulación) al origen con respuesta libre del sistema. La dinámica del sistema en lazo cerrado viene descrita por:

$$u(t) = -Kx(t) \rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) = A_{lc}x(t) \rightarrow x(t) = e^{A_{lc}t}x_0, \quad y(t) = Ce^{A_{lc}t}x_0, \quad x_0 = x(0) \quad (9.3)$$

Si el problema de control es el seguimiento de una referencia r , existen varias estructuras de control.

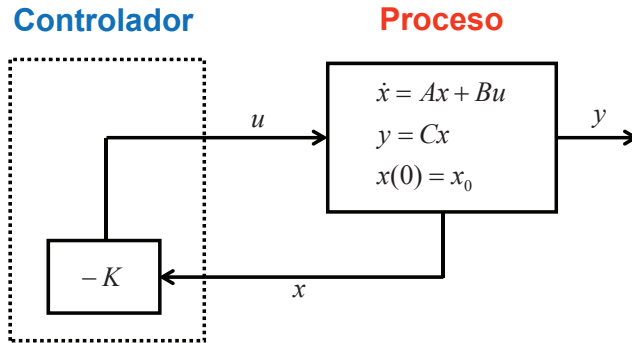


Figura 9.2 Estabilización por realimentación del estado: Respuesta libre

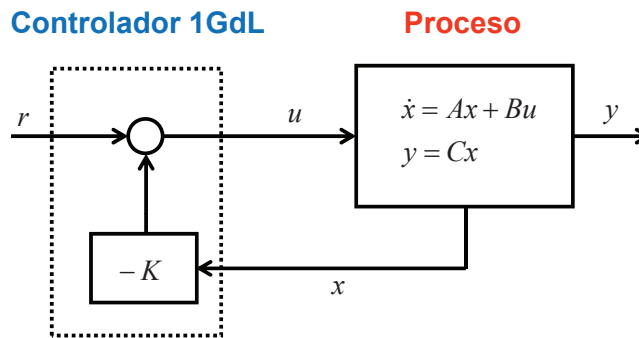


Figura 9.3 Estabilización por realimentación del estado: Respuesta a un escalón - sistema con 1 grado de libertad (1GdL)

La más sencilla es la que se muestra en la Figura 9.3, donde se estabiliza al sistema siguiendo al escalón de entrada utilizando una estructura de control con un sólo grado de libertad (la ganancia K). Las ecuaciones que rigen la dinámica del sistema en lazo cerrado son:

$$u(t) = -Kx(t) + r(t) \rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t) \tag{9.4}$$

Si se considera que la referencia es constante en estado estacionario (como es el caso habitual y el tratado en esta ficha), la condición de equilibrio $x_e = x(t \rightarrow \infty)$, $\dot{x}(t) = 0$, viene dada por:

$$x_e = -(A - BK)^{-1}Br \rightarrow y_e = Cx_e = -C(A - BK)^{-1}Br$$

donde en general $y_e \neq r$ y la respuesta a un escalón en el punto de consigna produce un error en el estado estacionario.

Para resolver este problema en presencia de una señal de referencia no nula, se introduce un esquema con dos grados de libertad como el que se muestra en la Figura 9.4. La referencia se multiplica por una constante de diseño denominada *ganancia de la referencia* K_r que tiene como objetivo eliminar el error en estado estacionario:

$$u(t) = -Kx(t) + K_r r(t) \rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK_r r(t) \tag{9.5}$$

En estado estacionario:

$$x_e = -(A - BK)^{-1}BK_r r \rightarrow y_e = Cx_e = -C(A - BK)^{-1}BK_r r$$

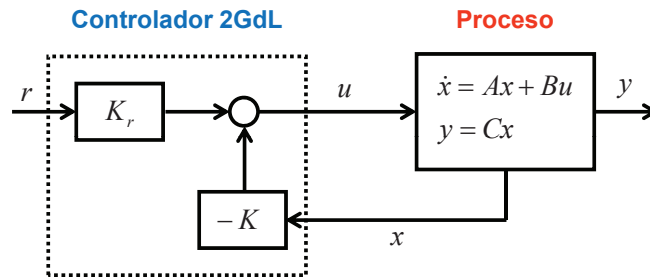


Figura 9.4 Estabilización por realimentación del estado: Respuesta a un escalón - sistema con 2 grados de libertad (2GdL)

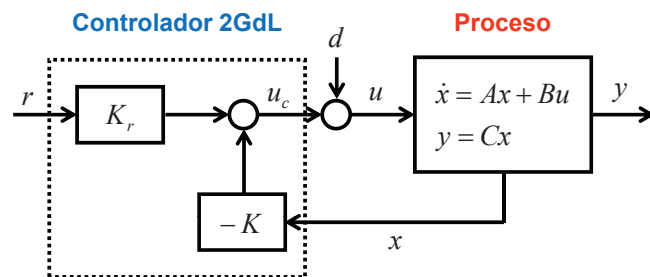


Figura 9.5 Estabilización por realimentación del estado: Respuesta a un escalón - sistema con 2 grados de libertad (2GdL) e introducción de una perturbación $d(t)$ en la carga

$$K_r = \frac{-1}{(C(A - BK)^{-1}B)} \rightarrow y_e = r$$

Como se observa, una adecuada elección de la ganancia K_r permite eliminar el error en estado estacionario, pero no afecta a la estabilidad del sistema (que se determina por los autovalores de $(A - BK)$).

Este esquema funciona bien cuando sólo se producen cambios en la referencia, pero provoca error en estado estacionario cuando se introduce una perturbación $d(t)$ en forma de escalón a la entrada del sistema (perturbación de carga, ver Figura 9.5). Las ecuaciones que rigen la dinámica y el estado estacionario de este sistema son:

$$u(t) = -Kx(t) + K_r r(t) + d(t) \rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + B(K_r r(t) + d(t)) \quad (9.6)$$

$$\left. \begin{aligned} x_e &= -(A - BK)^{-1}(BK_r r + Bd) \\ K_r &= \frac{-1}{(C(A - BK)^{-1}B)} \end{aligned} \right\} \rightarrow y_e = r - C(A - BK)^{-1}d \rightarrow y_e \neq r$$

Por tanto, para compensar la influencia de la perturbación en la carga es necesario introducir efecto integral en el lazo de control, aumentando en uno la dimensión del sistema a través de la inclusión de una variable de estado adicional:

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{z}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} Ax(t) + Bu(t) \\ r(t) - y(t) \end{bmatrix} \\ u(t) &= -Kx(t) - K_i z(t) + K_r r(t) + d(t) \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} x_e &= -(A - BK)^{-1}B(K_r r - K_i z_e + d) \\ r - y &= 0 \rightarrow r = y \end{aligned} \quad (9.7)$$

La respuesta en el plano de fase no sigue exactamente el mapa de isoclinas. Esto se debe a que el sistema es de tercer orden y el mapa de isoclinas solo depende de dos variables.

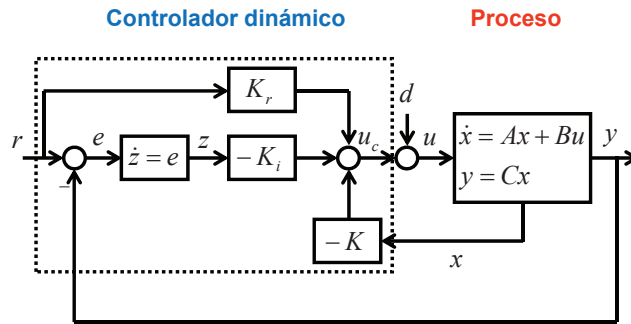


Figura 9.6 Estabilización por realimentación del estado: Respuesta a un escalón - sistema con 2 grados de libertad (2DoF). Introducción de una perturbación $d(t)$ en la carga y compensación mediante acción integral: la acción integral incrementa en uno el orden del sistema

Aunque la herramienta no contempla un análisis de observadores de estado (únicamente la descripción del sistema en forma canónica de observación), se incluye a continuación un breve resumen de sus fundamentos.

Uno de los mayores problemas con el diseño en el espacio de estados es que normalmente no es práctico, bien porque todos los estados no sean medibles o porque sea muy caro colocar muchos sensores. De aquí que se usen los llamados *observadores*, por medio de los cuales, a partir de un conjunto de entradas y salidas del sistema es posible estimar los estados del mismo. Si se denomina $\hat{x}(t)$ al estado estimado, se tiene que:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \tag{9.8}$$

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t), \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0 \tag{9.9}$$

Si se hace $\tilde{x}(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, entonces:

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = A\tilde{x}(t), \quad \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0 \rightarrow \tilde{x}(t) = e^{At}\tilde{x}_0 \tag{9.10}$$

Por tanto, el error del observador $\tilde{x}(t)$ tiende a cero si el sistema original es estable. Como las condiciones iniciales del sistema no son conocidas, hay que estimarlas. Tal y como está formulado, se trata de un observador en lazo abierto. Si se usa la salida conocida del sistema y se compara con la predicha por el observador, se puede obtener una formulación del observador en lazo cerrado:

$$\frac{d\hat{x}(t)}{dt} = A\hat{x}(t) + Bu(t) + L(y(t) - C\hat{x}(t)); \quad \hat{x}(0) = \hat{x}_0$$

La dinámica con que el error entre los estados observados y los reales tiende a cero viene determinada por $(A - LC)$. Por tanto, se elige L de forma que la dinámica de evolución del error dada por los autovalores de $(A - LC)$ sea más rápida que la evolución del sistema. Realmente para su elección hay que analizar previamente los posibles ruidos y perturbaciones a los que pueda estar sometida la salida, para evitar la introducción y amplificación de señales no modeladas en el esquema. Si dichos autovalores pueden situarse en cualquier punto del plano complejo, se dirá que el sistema es *observable*. Matemáticamente, un sistema es observable si el rango de la matriz de observabilidad es n , siendo n la dimensión del sistema. La matriz de observabilidad viene dada por: $\Theta = [C^T (CA)^T (CA^2)^T \dots (CA^{n-1})^T]^T$.

El cálculo del vector de ganancias del observador L se realiza mediante una fórmula similar a la del cálculo del vector de ganancias de realimentación K . Si se denomina J_{oic} al polinomio característico deseado para el observador de estado, el vector L se puede obtener de:

$$L = J_{oic}(A) \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-2} \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Se pueden diseñar también los llamados observadores de orden mínimo, en los que se supone que sólo hay que estimar un conjunto de estados de la planta puesto que el resto (generalmente la salida) se pueden medir directamente con sensores en el sistema. El diseño de este tipo de observadores puede analizarse en [31] y [32].

La idea del desarrollo de observadores es que los estados estimados puedan ser usados en la ley de control por realimentación lineal del vector de estado como si fueran los estados verdaderos. La duda que surge en este punto es si se garantiza de esta forma la estabilidad del sistema en lazo cerrado. La respuesta es que existe una separación entre los problemas del control y de la observación, es decir, se pueden encontrar las ganancias del controlador asumiendo que los estados son accesibles y después diseñar un observador para estimar los estados y usarlos en lugar de los estados reales. Los polos del sistema en lazo cerrado son la unión de los polos del controlador y los del observador. Esto conlleva a la conocida propiedad o *principio de separación*, que es un resultado de crucial importancia en la teoría de control moderna. Esta propiedad de separación se puede analizar combinando las dinámicas de los estados reales y de los errores de estimación, obteniendo:

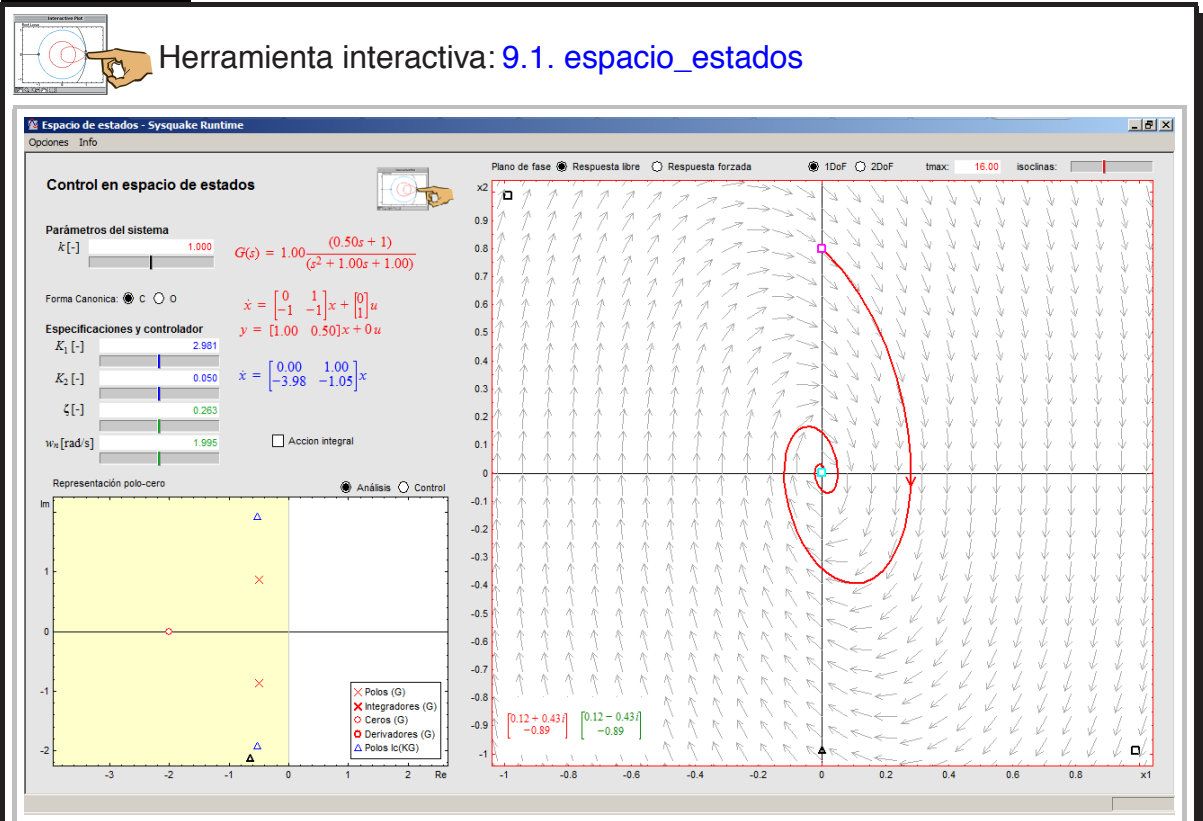
$$\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{d\tilde{x}(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK \\ 0 & A - LC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}$$

Nótese que de la teoría de matrices, los autovalores de una matriz triangular a trozos son la unión de los autovalores de los bloques diagonales, de donde se obtiene el citado teorema de separación.

Bibliografía

- [2] Åström, K. J. y R. M. Murray. Feedback systems: An introduction for scientists and engineers. Princeton University Press, ISBN:978-84-481-6640-3. Capítulo 2, sección 2, páginas 34-35; capítulo 4, sección 3, páginas 102-110, ejemplo 6.4, página 177, ejemplo 6.10, página 196, 2008.
- [7] Bolzern, P., R. Scattolini y N. Schiavoni. Fundamentos de control automático. Mc Graw Hill, ISBN: 978-84-481-6640-3. Apéndice A, páginas 541-552, 2009.
- [9] Dorf, R. C. y R. H. Bishop. Sistemas de control moderno. Décima edición. Pearson-Prentice Hall, ISBN:84-205-4401-9. Capítulo 3, páginas 130-137; Capítulo 6, sección 4, páginas 325-331; Capítulo 11, páginas 659-676, 2005.
- [31] Ogata, K. Ingeniería de control moderna. Quinta edición. Pearson Prentice Hall, ISBN: 978-84-8322-660-5. Capítulo 10, páginas 751-786, 2010.
- [32] Ollero, A. Control por computador: Descripción interna y diseño óptimo. Marcombo, ISBN:84-267-0813-7. Capítulo 6, páginas 117-137, 1991.
- [35] Shahian, B. y M. Hassul. Control system design using Matlab. Primera edición. Prentice Hall, ISBN: 0-13-174061-X. Capítulos 5 y 8, páginas 117-122, 220-225 1993.

Aplicación



Control en espacio de estados

Como se ha indicado en el resumen de teoría, esta herramienta es algo más compleja que las anteriores, pues se ilustran múltiples conceptos en una única aplicación. Sin embargo, la forma en que se ha estructurado facilita al usuario un aprendizaje incremental de las ideas derivadas del uso de una representación del sistema en el espacio de estados. En ningún caso se consideran tiempos de retardo en esta herramienta para no complicar en exceso la comprensión de los conceptos básicos.

En primer lugar se analiza el menú Opciones de la herramienta, que contiene dos agrupaciones. A través de la primera de ellas se realiza una selección (exclusiva) del tipo de representación gráfica que se va a utilizar en el área derecha de la herramienta:

- **Respuesta temporal:** Es la opción activa por omisión al arrancar la aplicación. Las gráficas representan la evolución temporal de los estados del sistema (en el caso de Respuesta libre) o la salida del mismo (si se utiliza la Respuesta forzada).
- **Plano de fase:** Si se selecciona, se desactiva la opción de Respuesta temporal y cambia la gráfica del área derecha de la herramienta a una representación bidimensional del plano de fase donde el eje de abscisas contiene las coordenadas del primer estado $x_1(t)$ y el de ordenadas las del segundo $x_2(t)$.

Aplicación...

El otro grupo de elementos del menú Opciones permite introducir distintas estructuras de plantas. En todos los casos se restringe a sistemas de segundo orden, que son los que soporta la herramienta (pues visualmente son los que admiten una representación bidimensional en el plano de fase). Los primeros elementos de este grupo son las funciones de transferencia $P_1(s)$ ($n = 2$), $P_3(s)$ ($n = 2$), $P_5(s)$, $P_6(s)$, $P_7(s)$, $P_{7b}(s) = P_7(s)$ con $\beta = 0$, $P_{12}(s)$ y $P_{12b}(s) = P_{12}(s)$ con $\beta = 0$, incluidas en la Tabla 1.2 del Capítulo 1. A continuación sigue la opción de incluir funciones de transferencia en formatos (NUM,DEN) o ZPK, restringidas a estructuras de segundo orden. En esta herramienta se ha incorporado también la posibilidad de representar al sistema en formato de descripción interna (A,B,C), suponiendo sistemas estrictamente propios (D=0). En este último caso hay que introducir las matrices y vectores con el siguiente formato: $A=[a_{11},a_{12};a_{21},a_{22}]$, $B=[b_1;b_2]$, $C=[c_1,c_2]$.

Hay otras opciones importantes que determinan la configuración de la herramienta en función del tipo de casos que se desee analizar. Para facilitar la interactividad, en lugar de colocar esas alternativas en el menú Opciones, se han situado sobre las gráficas que representan la Respuesta temporal o el Plano de fase en su caso y también sobre la Representación polo-cero. Se trata de parejas de opciones excluyentes entre sí (selección excluyente \bullet/\circ):

- Respuesta libre - Respuesta forzada: Estas dos opciones permiten configurar la herramienta de forma que la respuesta temporal o el plano de fase que se muestran en las gráficas (y los parámetros asociados), consideran únicamente la respuesta libre del sistema, es decir, la regulación al origen (referencia nula) o bien la respuesta forzada (seguimiento de una referencia partiendo de condiciones iniciales nulas).
- 1GdL - 2GdL: Estas opciones tienen sentido cuando se ha seleccionado la representación de la Respuesta forzada, pues habilitan la estructura de un grado de libertad (1GdL) indicada en la Figura 9.3 o bien la de dos grados de libertad (2GdL) de la Figura 9.4, en las que se tiene en cuenta que la referencia puede ser distinta de cero. Cuando en el menú Opciones se escoge la representación en Plano de fase, se añade sobre la gráfica una barra de desplazamiento que facilita el ajuste del tamaño de las isoclinas.

En el área inferior izquierda de la herramienta se incluye la Representación polo-cero, donde se sitúan los polos (autovalores de la matriz A) y ceros del sistema estudiado, representados en color rojo. Junto al título existen dos botones de selección excluyente denominados Análisis y Control:

- Si se selecciona la opción Análisis, se puede realizar el estudio de la respuesta del sistema y de la localización de los polos en lazo cerrado (representados mediante el símbolo no interactivo \triangle) cuando se modifican las ganancias de realimentación K_1 y K_2 . Los ceros del lazo cerrado coinciden con los de lazo abierto.
- Si se elige la opción Control, permite llevar a cabo el análisis del sistema en lazo cerrado cuando la localización de los polos del mismo ha sido fijada a través de las especificaciones y, por tanto, el cálculo de las ganancias de realimentación se realiza de forma automática a través de la fórmula de Ackermann. En este caso, los polos deseados en lazo cerrado son interactivos, para permitir al usuario posicionarlos en cualquier lugar del plano complejo de forma que definan unas determinadas especificaciones de comportamiento. Estos polos que definen el comportamiento deseado en lazo cerrado se representan mediante el símbolo \square .

Aplicación...

En todo momento son visibles las leyendas que indican el código de colores asociado a cada elemento dinámico en la esquina inferior derecha del diagrama. Como en otras herramientas, el triángulo de color negro ubicado en la zona inferior de la gráfica se puede utilizar para cambiar el fondo de escala, pulsando con el ratón a derecha o izquierda del mismo.

En el área superior izquierda de la herramienta se definen la ganancia estática del sistema y los parámetros del controlador utilizado, basado en una realimentación lineal del vector de estado. La sección **Parámetros del sistema** incluye un cuadro de texto y una barra de desplazamiento para modificar el valor de la ganancia estática del sistema cuya estructura ha sido seleccionada a través del menú Opciones ($P_i(s)$). La posición de los polos y del cero (en su caso) de esa función de transferencia se puede modificar a través de la Representación polo-cero, donde se pueden situar en una posición arbitraria que defina de forma completa su dinámica.

En la zona derecha de la sección de **Parámetros del sistema** se visualiza una representación simbólica del sistema en forma de función de transferencia $G(s)$ y también en forma de espacio de estados $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx + Du$, que se puede seleccionar en la Forma canónica de control (C) o en la Forma canónica de observación (O), a través de botones circulares de selección excluyente.

A continuación se encuentra la sección **Especificaciones y controlador**. En la zona izquierda hay una serie de cuadros de texto y barras de desplazamiento correspondientes a las ganancias de realimentación K_1 y K_2 y el factor de amortiguamiento relativo ζ y la frecuencia natural no amortiguada ω_n que definen la posición de los polos en lazo cerrado que fijan las especificaciones de comportamiento transitorio. Cuando la herramienta está configurada en modo Análisis, sólo pueden modificarse las ganancias de realimentación K_1 y K_2 , puesto que en este modo dichas ganancias se pueden modificar por el usuario para analizar el efecto que producen en la localización de los polos del lazo cerrado y por ende en la respuesta temporal. A medida que se modifican las ganancias K_1 y K_2 , varían los valores asociados a ζ y ω_n , puesto que cambia la posición de los polos del lazo cerrado. Si se configura la aplicación en modo Control, se podrán modificar libremente los valores de ζ y ω_n para imponer una dinámica determinada por la situación de los polos en lazo cerrado y se actualizarán automáticamente los valores de K_1 y K_2 resultantes de la aplicación de la fórmula de Ackermann.

A la derecha de estos parámetros se visualiza en color azul una representación simbólica de la descripción interna del sistema en lazo cerrado de la forma $\dot{x} = A_{lc}x$ si la herramienta está en modo Respuesta libre, o bien de la forma $\dot{x} = A_{lc}x + B_{lc}r$ si está en modo Respuesta forzada, correspondientes a los esquemas representados en las Figuras 9.3, 9.4 y 9.5. Precisamente, en el modo de Respuesta forzada, se pueden incluir perturbaciones a la entrada y activar la Acción integral (Figura 9.6), a través del cuadro de selección situado bajo la representación simbólica de la dinámica interna del sistema en lazo cerrado. Al activarse, se hace visible una barra de desplazamiento y un cuadro de texto que permite modificar el valor de la ganancia del término integral K_i para analizar su efecto sobre el comportamiento del sistema en lazo cerrado.

Como se ha indicado al principio del apartado, el área derecha de la herramienta se dedica a las representaciones gráficas de la evolución del sistema. Cuando a través del menú Opciones está activa la Respuesta temporal, la gráfica superior representa la evolución en el tiempo de los estados $x_1(t)$ y $x_2(t)$ si la herramienta está en modo Respuesta libre y la salida $y(t)$ si está en modo Respuesta forzada. Cuando se representan los estados, una leyenda situada en la parte inferior derecha de la gráfica incluye el código de colores utilizado para cada estado.

Aplicación...

Cuando se utiliza la Respuesta forzada, la gráfica muestra una línea horizontal discontinua en color **verde** que representa una referencia constante. Tanto el círculo situado sobre la misma como la línea discontinua son un elemento interactivos que facilitan el cambio de la amplitud del escalón. Del mismo modo, en la zona intermedia de la gráfica se han incluido otros dos círculos (que por omisión suelen estar solapados y situados en el eje del tiempo) que se pueden utilizar para imponer la amplitud de una perturbación $d(t)$ en forma de escalón a la entrada del sistema y para cambiar el instante en el que se introduce tal perturbación.

Tanto en el caso de Respuesta libre como de Respuesta forzada, la gráfica inferior representa la evolución de la señal de control $u_c(t) = -Kx(t) + K_r r(t)$ (en respuesta libre $r(t) = 0$).

Cuando se elige la opción del Plano de fase en el menú Opciones, toda el área gráfica de la derecha pasa a ser ocupada por esa representación, incluyendo las isoclinas cuya densidad se puede modular a través de la barra de desplazamiento que se hace visible sobre la figura. Junto a esa barra de desplazamiento se muestra también un cuadro de texto (tmax) que permite cambiar el tiempo de simulación (tiene el mismo efecto que un cambio en el fondo de escala en las gráficas de Respuesta temporal usando el símbolo Δ).

Cuando se trabaja en modo Respuesta libre, siempre hay una regulación del sistema al origen del plano de fase. En el ángulo inferior izquierdo de la gráfica se muestran los vectores propios del sistema (los autovalores vienen dados por la posición de los polos en el plano de Representación polo-cero). Las condiciones iniciales se pueden modificar interactivamente pinchando y arrastrando el cuadrado **magenta** (\square) a la posición que se desee. Cuando los polos en lazo cerrado son reales se dibujan los vectores propios asociados en el plano de fase. El punto que representa la condición de estado estacionario se representa mediante un cuadrado **celeste** (\square), que en el caso de la Respuesta libre estará siempre situado en el origen del plano de fase.

Cuando se selecciona el modo Respuesta forzada, el cuadro que se fija es el **magenta** (\square), pues las condiciones iniciales estarán siempre en el origen y el que se puede desplazar será uno de color **verde** (\square), que está ligado a la amplitud de la referencia que se haya determinado en el modo de Respuesta temporal. El desplazamiento de ese cuadro es equivalente al cambio de la referencia. Al estar configurada la herramienta para sistemas de segundo orden usando las formas canónicas de Control (C) u Observación (O), ese cuadro siempre estará ligado a uno de los ejes, lo que facilita el análisis. Cuando no exista error en estado estacionario el cuadrado **verde** (\square) coincidirá con el cuadrado **celeste** (\square) que determina el estado de equilibrio. En ese modo no se representan los autovectores del sistema.

Los cuadrados de color negro (\square) situados en la esquina inferior derecha y superior izquierda del gráfico, permiten cambiar la variable de estado que se representa en ese eje cuando se pulsa sobre ellos. El triángulo negro centrado en la parte inferior de la gráfica facilita el cambio de fondo de escala cuando se pulsa con el ratón a la derecha o la izquierda del mismo.

Ejercicios

1. Un sistema lineal de segundo orden estrictamente propio se puede escribir de forma general en el espacio de estado como:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \frac{dx(t)}{dt} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [c_1 \quad c_2] x(t) \\ x(t) &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Determine un controlador por realimentación lineal del vector de estado de la forma:

$$u(t) = -Kx(t) = -K_1x_1(t) - K_2x_2(t)$$

Tal que la ecuación característica en lazo cerrado sea:

$$J(s) = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

2. Particularizar el ejercicio anterior al caso de un integrador doble:

$$G(s) = \frac{1}{s^2}$$

Para la configuración de "Respuesta libre" y "Análisis". Justificar el efecto que tiene sobre la respuesta del sistema la variación del parámetro K_1 del controlador. También la del parámetro K_2 .

Con la configuración de "Respuesta libre" y "Control" diseñar un controlador que produzca una dinámica del lazo cerrado con:

- a) $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$ rad/s.
b) $\zeta = 1.25$ y $\omega_n = 2$ rad/s.

Calcular los valores y vectores propios en ambos casos. Calcular también la trayectoria en el plano de fase para unas condiciones iniciales genéricas $x_1(0)$ y $x_2(0)$.

3. Una planta viene descrita por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + \mu^2}$$

Con la configuración de "Respuesta libre" y "Control" diseñar un controlador que tenga como especificación $\zeta = 1$ y $\omega_n = n\mu$, $n = 2, 3, \dots$ ¿Qué efecto tiene sobre la respuesta del sistema aumentar el valor de n ? Calcular los valores y vectores propios y la trayectoria en el plano de fase para unas condiciones iniciales genéricas $x_1(0)$ y $x_2(0)$.

4. Una planta viene descrita por la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{s+1}{s^2+5s+6}$$

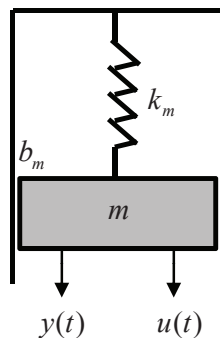
Con la configuración de "Respuesta libre" y "Control" se pide:

- a) Encontrar el vector de ganancias de realimentación K que coloca los polos de este sistema en las raíces de la siguiente ecuación $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$.
 - b) Particularizar el resultado para $\zeta = 0.5$ y $\omega_n = 2$ rad/s.
 - c) Analizar el efecto que tiene sobre el vector de ganancias de realimentación K el hecho de que aumente ω_n .
5. Para la planta del ejercicio 2, escoger la configuración de "Respuesta forzada" y tener activado el botón "1GdL" (lo está por omisión). Se observa un error en estado estacionario en la respuesta. Calcular este error. Calcular la ganancia K_r de un controlador de dos grados de libertad que elimina este error en estado estacionario. A continuación activar la configuración "2GdL" y verificar que se obtiene una respuesta a un cambio en el punto de consigna que tiene error nulo. Aplicar una perturbación $d(t)$ constante de amplitud 1 en la entrada del sistema. Analizar la respuesta del sistema y calcular el error que se produce en estado estacionario. Para eliminar este error frente a una perturbación en la carga activar el botón "Acción integral" y analizar el efecto que tiene la ganancia de la acción integral K_i sobre la respuesta del sistema.
 6. Realizar el ejercicio 5 referido a la planta del ejercicio 3.
 7. Realizar el ejercicio 5 referido a la planta del ejercicio 4.
 8. Para un sistema de segundo orden en forma normalizada

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t)$$

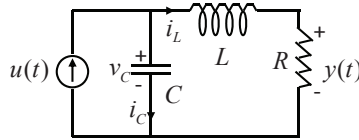
Calcule una descripción en el espacio de estados y analice el diagrama de fase para distintos valores de ζ , ω_n y k .

9. Para el sistema resorte-masa-amortiguador que se muestra en la figura, obtenga la función de transferencia y un modelo en variables de estado del mismo (referencia [9], páginas 132-133), donde k_m es la constante del resorte, b_m es la fricción con la pared y m la masa sustentada. Considere que $y(t)$ es la posición de la masa y escoja como variables de estado la posición $y(t)$ y la velocidad $\dot{y}(t)$. Particularice la descripción interna para $m = 1$ kg, $b_m = 20$ N/m/s y $k_m = 100$ N/m. Calcule las raíces de la ecuación característica. Realice un análisis del sistema usando la herramienta y un control de posición usando realimentación lineal del vector de estados.



10. Para el circuito RLC que se muestra en la figura, obtenga la función de transferencia y un modelo en variables de estado del mismo (referencia [9], páginas 133-135), donde R es la resistencia, C es la capacitancia y L la inductancia. Considere que $y(t)$ es la tensión en la resistencia. Seleccione como variables de estado el voltaje del condensador $v_c(t)$ y la corriente del inductor $i_L(t)$. Particularice

la descripción interna para $R = 3 \Omega$, $L = 1 \text{ H}$ y $C = 0.5 \text{ F}$. Calcule las raíces de la ecuación característica. Realice un análisis del sistema usando la herramienta y un control de tensión usando realimentación lineal del vector de estados.



11. Considere la descripción interna de un péndulo (referencia [13], página 463), cuya frecuencia característica es ω_0 :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

Encuentre la ley de control que posiciona los polos del sistema en lazo cerrado en $s = -2\omega_0$. En otras palabras, se pretende doblar la frecuencia natural y aumentar el factor de amortiguamiento relativo del sistema de 0 a 1. Demuestre que el vector de ganancias lineales $K = [3\omega_0^2 \quad 4\omega_0]$. Para un valor de $\omega_0 = 1 \text{ rad/s}$ y partiendo de unas condiciones iniciales $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, simule el comportamiento con la herramienta.

12. Considere la función de transferencia que modela la posición angular de un motor de corriente continua (referencia [32], página 39):

$$G(s) = \frac{k}{s(\tau s + 1)}$$

La entrada es la tensión de inducido $u(t)$ y la salida la posición angular. Eligiendo como variables de estado la posición angular ($x_1(t)$) y la velocidad angular ($x_2(t)$), encuentre las ecuaciones de estado del sistema, así como las formas canónicas de control y de observación. Integre la ecuación de estado y obtenga su solución. Particularice para $\tau = 0.25 \text{ s}$ y $k = 1 \text{ rad/V}$ y simule el comportamiento en la herramienta interactiva.

13. Considere la dinámica linealizada y normalizada de la dirección de un vehículo dada por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \gamma \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \quad 0], \quad D = 0$$

La descripción completa de los estados y ecuaciones se puede encontrar en [2] (página 177). Obtenga la matriz de controlabilidad. Diseñe un controlador que estabilice la dinámica lateral (y) y siga una referencia de valor r (la señal de control es el ángulo de dirección). Calcule el polinomio característico del sistema en lazo cerrado e imponga que la dinámica sea de segundo orden con un factor de amortiguamiento ζ y una frecuencia natural ω_n . Particularice para $\gamma = 1$ (aunque realmente es variable) y distintos valores de ζ y ω_n y simule el comportamiento en la herramienta interactiva.

14. En la referencia [2] (página 196) se plantea el control de velocidad de un vehículo. La dinámica linealizada en torno a un estado de equilibrio (v_e, u_e), donde $v(t)$ es la velocidad del vehículo y $u(t)$ es la posición del acelerador, viene dada por:

$$\dot{x}(t) = ax(t) - b_g \gamma(t) + b \omega(t), \quad y(t) = v(t) = x(t) + v_e$$

donde $x(t) = v(t) - v_e$, $\omega(t) = u(t) - u_e$, a , b y b_g son constantes que dependen de las características del vehículo y de la carretera y $\gamma(t)$ es la curvatura del camino (perturbación). Se desea controlar la velocidad del vehículo sin error en régimen estacionario, por lo que hay que aumentar la dinámica del sistema con un integrador. Calcule las ganancias K , K_i y K_r necesarias para estabilizar el sistema y proporcionar la entrada correcta para alcanzar la referencia de velocidad (suponiendo $\gamma = 0$). Imponga un comportamiento en lazo cerrado descrito por los parámetros ζ y ω_n . Particularice en la herramienta la dinámica linealizada para valores de $\gamma_e = 0$ rad, $a = -0.0101$, $b = 1.32$, $b_g = g \cos(\gamma_e)$, $\zeta = 0.7$, $\omega_n = 0.5$ rad/s. La referencia de velocidad será $v_r = 2$ m/s. Introduzca distintos valores de la perturbación $\gamma(t)$ y analice la desviación respecto al estado de equilibrio.

Bibliografía

- [1] K. J. Åström y T. Hägglund. *Control PID avanzado*. Pearson - Prentice Hall, 2009.
- [2] K. J. Åström y R. M. Murray. *Feedback systems: An introduction for scientists and engineers*. Princeton University Press, 2008.
- [3] K. J. Åström y B. Wittenmark. CCSDEMO. Technical report, Department of Automatic Control. Lund Institute of Technology, 1997.
- [4] A. Barrientos, R. Sanz, F. Matía y E. Gambao. *Control de sistemas continuos. Problemas resueltos*. McGraw-Hill, 1996.
- [5] R. Bellman. *Introduction to the mathematical theory of control processes: Vol. II, nonlinear systems*. Academic Press, 1971.
- [6] A. Blomdell. Spread-sheet for dynamic systems: A graphic teaching tool for automatic control. *Wheels for the Mind Europe*, 2:46–47, 1989.
- [7] P. Bolzern, R. Scattolini y N. Schiavoni. *Fundamentos de control automático*. McGraw-Hill, 2009.
- [8] J. J. D'Azzo, C. H. Houpis y S. Sheldon. *Linear control system analysis and design with Matlab*. Marcel Dekker Inc., 2003.
- [9] R. C. Dorf y R. H. Bishop. *Sistemas de control moderno*. Pearson - Prentice Hall, 2005.
- [10] R. C. Dorf y R. H. Bishop. *Modern control systems*. Pearson - Prentice Hall, 2011.
- [11] S. Dormido. The role of interactivity in control learning (plenary lecture). En *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Advances in Control Education ACE03*, páginas 11–22, Oulu (Finlandia), 2003.
- [12] S. Dormido. Control learning: Present and future. *Annual Reviews in Control*, 28(1):115–136, 2004.
- [13] G. F. Franklin, J. D. Powell y A. Emani-Naeni. *Feedback control of dynamic systems*. Pearson, 2010.
- [14] R. S. Gilliver, B. Randall y Y. M. Pok. Learning in cyberspace: Shaping the future. *Journal of Computer Assisted Learning*, 14(14):212–222, 1998.
- [15] F. Golnaraghi y B. C. Kuo. *Automatic control systems*. Marcel Dekker Inc., 2010.
- [16] G. C. Goodwin, S. F. Graebe y M. E. Salgado. *Control system design*. Prentice Hall, 2001.
- [17] E. Granbom y T. Olsson. VISIDYN: Ett program för interaktiv analys av reglersystem (VISIDYN: An interactive program for design of linear dynamic systems). Master thesis TFRT-5375. Technical report, Department of Automatic Control. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1987.

- [18] J. L. Guzmán, K.J. Åström, S. Dormido, T. Hägglund, M. Berenguel y Y. Pigué. Interactive learning modules for PID control. *IEEE Control Systems Magazine*, 28(5):118–134, 2008.
- [19] J. L. Guzmán, M. Berenguel y S. Dormido. Interactive teaching of constrained generalized predictive control. *IEEE Control Systems Magazine*, 25(2):52–66, 2005.
- [20] J. L. Guzmán, S. Dormido y M. Berenguel. Interactivity in education: An experience in the automatic control field. *Computer Applications in Engineering Education*, doi: 10.1002/cae.20480, 2010.
- [21] J. L. Guzmán, H. Vargas, J. Sánchez-Moreno, F. Rodríguez, M. Berenguel y S. Dormido. Education research in engineering studies: Interactivity, virtual and remote labs. En *Distance Education Research Trends*, páginas 131–167. Nova Science Publishers Inc., 2007.
- [22] D. Hilbert y S. Cohn-Vossen. *Geometry and the imagination*. Chelsea Pub Co, 1983.
- [23] K. H. Johansson. The quadruple-tank process: A multivariable laboratory process with an adjustable zero. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(3):456–465, 2000.
- [24] M. Johansson, M. Gäfvert y K. J. Åström. Interactive tools for education in automatic control. *IEEE Control Systems Magazine*, 18(3):33–40, 1998.
- [25] M. Johansson y M. Gäfvert. ICTools - interactive learning tools for control. Technical report, Department of Automatic Control. Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 2003.
- [26] B. C. Kuo. *Sistemas de control automático*. Prentice Hall, 1996.
- [27] R. Longchamp. *Comande numériques de systèmes dynamiques. Cours d'Automatique*. Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Laussane, 2006.
- [28] R. M. Murray, K. J. Åström, S. P. Boyd, R. W. Brockett y G. Stein. Future directions in control in a information-rich world. *IEEE Control System Magazine*, 9(2):20–33, 2003.
- [29] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson - Prentice Hall, 2003.
- [30] K. Ogata. *Modern control engineering*. Pearson, 2009.
- [31] K. Ogata. *Ingeniería de control moderna*. Pearson, 2010.
- [32] A. Ollero. *Control por computador : Descripción interna y diseño óptimo*. Marcombo, 1991.
- [33] Y. Pigué. *SysQuake 5: User manual*. Calerga S'arl, Laussane, Switzerland, 2009.
- [34] C. E. Rohrs, J. L. Melsa y D. G. Schultz. *Sistemas de control lineal*. McGraw-Hill, 1994.
- [35] B. Shahian y M. Hassul. *Control system design using Matlab*. Prentice Hall, 1993.
- [36] J. G. Truxal. *Automatic feedback control system synthesis*. McGraw-Hill, 1955.

Índice alfabético

- Acción
 - de control, 170
 - derivativa, 169, 170, 215
 - integral, 168, 169, 215, 234
 - proporcional, 158, 167, 169, 215
- Actuador, 70, 127
- Álgebra de bloques, 128, 129
- Amortiguamiento, 39, 131, 137, 155, 164, 194
- Análisis, 7
- Ancho de banda, 42, 78, 81, 156, 163, 177, 178
 - sistema de primer orden, 89
 - sistema de segundo orden, 94
- Ángulo de fase, 80
- Aprendizaje, 2
- Aproximación
 - de Padé, 64, 111
 - lineal, 22
- Asignación
 - de autovalores, 232
 - de polos, 206, 232
- Automática, 1, 3
- Autovalores, 231
- Autovectores, 231
- Banda
 - atenuada, 81
 - pasante, 81
- Cancelación polo-cero, 49, 163, 200, 211
- Causalidad, 63
- Cero, 16, 31, 48, 53, 54, 60, 66, 99, 119, 131, 132, 163, 177, 184, 189, 193, 198
- Condiciones iniciales, 228
- Constante
 - de error en estado estacionario
 - en aceleración, 156, 158
 - en posición, 156, 158
 - en velocidad, 156, 158
 - de tiempo, 16, 32, 89, 124, 155, 212, 225
- Control, 163, 167, 177, 184, 189, 193, 198, 206, 211, 215, 224, 232
 - automático, 3, 130, 155, 211, 224
 - derivativo (D), 169
 - en lazo abierto, 127
 - en lazo cerrado, 59, 163, 167, 177, 184, 189, 193, 198, 206, 211, 215, 223
 - integral (I), 168
 - PD, 169, 215
 - PI, 169, 206, 211, 215
 - PID, 170, 171, 215
 - por realimentación de variables de estado, 232
 - proporcional (P), 167
- Controlabilidad, 232
- Controlador, 127, 128, 155, 163, 167, 177, 184, 189, 193, 198, 206, 211, 215
- Coordenadas polares, 80
- Criterio de Nyquist, 139, 140
- Curva de reacción, 70, 215
- Década, 80, 88
- Decibelio (dB), 79, 88
- Derivador, 16, 59, 99, 100, 106
- Desarrollo en serie de Taylor, 19, 22, 123
- Descripción
 - externa, 29, 123, 124, 227
 - interna, 29, 227, 229
- Desfase, 79
- Desplazamiento, 167
- Diagrama
 - de bloques, 128, 131, 155
 - de Bode, 7, 77, 79, 88, 148, 177, 184, 189
 - asíntotas, 93
 - sistema de primer orden, 88
 - sistema de segundo orden, 93, 163

- de Nichols, 7, 77, 80, 145, 148
- de Nyquist, 7, 77, 80, 139, 144, 148
- de polos y ceros, 7, 131
- logarítmico, 79
- polar, 80
- Diseño de un sistema de control, 7, 128, 130, 157, 223
- en el dominio de la frecuencia, 155, 156, 163, 177, 184, 189
- en el dominio del tiempo, 155, 206, 211, 215
- en el espacio de estados, 232
- en el lugar de las raíces, 193, 198
- Dominio
 - de la frecuencia, 7, 10, 77, 80, 88, 106, 155, 163, 177, 184, 189
 - ajuste de modelos, 119
 - del tiempo, 7, 10, 32, 38, 123, 155, 206, 211, 215, 224
 - ajuste de modelos, 70
 - dominancia, 66
- ECTS, 2
- Ecuación
 - característica, 32, 38, 39, 131, 139, 206, 231
 - de convolución, 230
 - de estado, 21, 229
 - de salida, 21, 229
 - diferencial
 - lineal, 21, 124, 228, 231
 - no lineal, 22, 124
 - ordinaria, 20, 29
- Editor de polos y ceros, 9, 63
- Educación basada en resultados, 2
- EEES, 2
- Enseñanza, 2
- Entrada
 - de escalón, 16, 23, 25, 32, 70, 157, 158, 215
 - de impulso, 29
 - de parábola, 157, 158
 - de rampa, 157, 158
 - del sistema, 19, 31, 32, 38, 59, 127, 155, 229
 - sinusoidal, 78
- Error, 127, 128, 157, 167
 - de *offset*, 167
 - de aceleración, 158
 - de posición, 158
 - de seguimiento, 128
 - de velocidad, 158
 - del observador, 235
 - en estado estacionario, 155, 157, 189, 193, 200, 206, 215, 233
- Escala
 - lineal, 80
 - logarítmica, 79
- Espacio de estados, 21, 227, 229
- Especificaciones, 7, 130, 155, 163, 167, 177, 180, 185, 189, 193, 198, 206, 223, 232
- Estabilidad, 33, 127, 130, 139, 151, 157, 167, 185, 217, 231
 - absoluta, 130
 - asintótica, 33, 131, 230
 - condicional, 130, 131, 145
 - en el sentido de Lyapunov, 231
 - entrada-salida, 130
 - marginal, 39, 145
 - relativa, 130, 131, 144, 157, 177
- Estado, 20, 29, 130, 227
 - de equilibrio, 19, 20, 22, 124, 227, 231, 232
 - estacionario, 22, 23, 29, 33, 70, 156, 233
 - inicial, 232
- Fórmula de Ackermann, 232
- Factor de amortiguamiento, 39
 - relativo, 39, 53, 93, 131, 155, 198, 202, 206
- Filtro, 81
 - en la acción derivada, 170
 - en la referencia, 129, 170, 207
 - paso bajo, 81, 178
- Forma canónica
 - de control, 230, 232
 - de observación, 230
- Frecuencia
 - de corte, 80
 - de cruce
 - de fase, 145
 - de ganancia, 145, 156, 185
 - de resonancia, 94, 156
 - esquina, 81, 89, 99, 103
 - natural
 - amortiguada, 39
 - no amortiguada, 39, 53, 93, 155, 198
- Función
 - de sensibilidad, 130
 - de transferencia, 29, 71, 77–79, 119, 123, 124, 127
 - de fase mínima, 113
 - de fase no mínima, 113

- de la cadena directa, 157, 206, 211
 - del controlador, 127, 184
 - del filtro en la referencia, 127
 - del lazo, 131
 - en el dominio de la frecuencia, 77, 106
 - sistema de primer orden, 32
 - sistema de segundo orden, 38, 93
 - sistema genérico, 31, 59, 106, 157
 - exponencial matricial, 230
 - racional, 111
- Ganancia
- de la referencia, 233
 - derivativa, 169
 - estática, 32, 33, 38, 80, 106, 114, 124
 - integral, 168
 - proporcional, 167, 217
- Herramienta interactiva, 1, 7, 9
- Control en espacio de estados, 237
 - Control PID, 172
 - Diseño en frecuencia:
 - Avance de fase, 186
 - Avance-retraso de fase, 190
 - Retraso de fase, 180
 - Diseño en LR:
 - Avance de fase, 202
 - Retraso de fase, 195
 - Diseño PI:
 - Asignación de polos, 208
 - Cancelación de polos, 213
 - Diseño PID: Ziegler-Nichols, 218
 - El criterio de Nyquist, 141
 - Errores estado estacionario, 160
 - Limitaciones del retardo, 152
 - Lugar geométrico de las raíces, 135
 - Margen de fase y margen de ganancia, 148
 - Redes de avance y retraso de fase, 165
 - Respuesta frecuencial:
 - Concepto, 83
 - Datos experimentales, 120
 - Fase no mínima, 116
 - Genéricos, 108
 - Primer orden, 90
 - Primer orden + cero, 101
 - Segundo orden, 95
 - Segundo orden + cero, 104
 - Respuesta temporal:
 - Control de altura, 225
 - Datos experimentales, 73
 - Dominancia, 68
 - Genéricos, 62
 - Linealización, 25
 - Parámetros físicos, 125
 - Primer orden, 35
 - Primer orden + cero, 50
 - Segundo orden, 43
 - Segundo orden + cero, 55
- Homogeneidad, 19
- Índice de comportamiento, 70
- Inestabilidad, 33, 38, 39, 130, 144, 151
- Ingeniería de control, 8
- Integrador, 16, 59, 99, 100, 106, 140, 157, 169, 212, 234
- Interactividad, 5, 7
- Isoclina, 228
- Lineal, 19
- Linealización, 19, 21, 22, 124
- Linealizado, 22
- Lugar de las raíces, 131
 - ángulo de las asíntotas, 132
 - ángulo de llegada a un cero complejo, 133
 - ángulo de partida desde un polo complejo, 133
 - asíntotas, 132
 - bifurcación, 133
 - centroide de las asíntotas, 16, 132
 - lugar sobre el eje real, 132
 - lugares separados, 133
 - punto de entrada al eje real, 16, 133
 - punto de salida del eje real, 16, 133
 - ramas, 133
- Magnitud, 79
- Margen
 - de estabilidad, 144
 - de fase, 144, 145, 156, 185, 189
 - de ganancia, 144, 145, 156
 - de seguridad, 177, 185
- Matriz
 - de control, 21
 - de controlabilidad, 232
 - de observabilidad, 235
 - de transición de estados, 230
 - del sensor, 21

- dinámica, 21
- Modelo, 19, 228
 - basado en datos experimentales, 19
 - basado en primeros principios, 19, 22
 - en espacio de estados, 20
 - entrada-salida, 21
 - lineal, 19, 22, 123, 124
 - no lineal, 19
- Objetos interactivos, 10
- Observabilidad, 235
- Observador, 235
- Órbita, 227
- Orden de un sistema, 20, 30, 59, 157, 228, 229
- Perturbación, 19, 128, 167, 212, 234
- Pico de resonancia, 94, 156
- Plano s , 31, 36, 39, 100, 113, 130–132, 198
- Plano de fase, 7, 227, 228, 234
- Polinomio característico, 31, 32, 38, 59, 60, 157, 206, 228, 232
- Polo, 16, 32, 38, 48, 79, 119, 130–132, 157, 163, 177, 184, 189, 193, 198, 231
 - de lazo cerrado, 16
 - dominante, 60, 66, 107, 155, 198, 200, 211, 232
- Principio
 - de separación, 236
 - de superposición, 19
- Proceso, 26, 124, 226
- Punto
 - crítico, 140, 144
 - de operación, 22, 119, 124
- Régimen permanente, 77, 78, 119
- Razón
 - de amortiguamiento, 215
 - de corte, 81
- Realimentación, 127–129, 131, 139, 155, 167
 - coste de, 130
 - negativa, 128
 - positiva, 128
- Rechazo de perturbaciones, 128, 192, 234
- Red
 - de avance de fase, 163, 184, 198
 - de retraso de fase, 163, 177, 193
- Referencia, 127, 128, 155, 157, 167, 232
- Relación de dominancia, 61, 66
- Reset, 168
- Respuesta
 - a escalón, 66, 70, 113, 130, 158, 164, 215
 - a rampa, 158
 - en estado estacionario, 29, 49, 70, 157, 216
 - en frecuencia, 77, 78, 119, 139, 156
 - sistema de fase no mínima, 113
 - sistema de primer orden, 88
 - sistema de segundo orden, 93
 - sistema genérico, 106
 - forzada, 228
 - inversa, 113
 - libre, 228, 232, 240
 - temporal, 25, 29, 32, 151, 193, 224
 - sistema de primer orden, 32
 - sistema de segundo orden, 38
 - sistema genérico, 59
 - transitoria, 20, 23, 29, 33, 39, 49, 66, 70, 155, 156, 178, 193, 206
- Retrato de fase, 228
- Robustez, 81, 129
- Ruido, 128, 164, 167, 170, 185, 235
- Síntesis, 7, 224
- Salida del sistema, 19, 23, 29, 31–33, 38, 59, 72, 127, 155, 157, 167, 212, 229
- Señal
 - de control, 20, 127, 151, 155, 167, 168, 170, 224, 232, 240
 - de entrada, 20, 128, 155, 178, 228
 - de prueba, 157
 - de error, 127, 128, 167–169
 - de perturbación, 128, 234
 - de realimentación, 127, 128, 170
 - de referencia, 128, 170, 232, 233
 - de ruido, 128
 - de salida, 127, 170
- Sensor, 70, 127, 128, 235, 236
- Simulación, 19, 224
- Sintonización, 167, 171
 - de Ziegler-Nichols, 215
- Sistema, 19, 22
 - autónomo, 228, 231
 - causal, 19–21, 31, 59, 63, 81, 169, 229
 - completamente controlable, 232
 - condicionalmente estable, 130, 145, 147
 - controlable, 232
 - críticamente amortiguado, 39, 93
 - críticamente estable, 39
 - de control, 7, 40, 70, 81, 127, 155, 223

- de fase mínima, 78, 81, 100, 113, 145
- de fase no mínima, 78, 81, 100, 113, 147
- de orden superior, 59, 106
- de primer orden, 23, 32, 88, 206, 211, 228
 - con cero, 48, 99
- de segundo orden, 38, 93
 - con cero, 53, 103
- de tiempo continuo, 72
- de tiempo discreto, 72
- de tipo 0, 157
- de tipo 1, 157
- de tipo 2, 157
- determinista, 227
- dinámico, 5, 19, 23, 123, 155, 227
- en lazo abierto, 78, 131, 139, 198
- en lazo cerrado, 127, 131, 139, 151, 157, 232
- estable, 33, 66, 79, 119, 139, 145, 211, 231
- estrictamente causal, 99
- inestable, 33, 39, 79, 144, 147, 211, 231
- invariante en el tiempo, 19, 20, 78
- lineal, 19, 20, 23, 32, 78
 - invariante en el tiempo, 19, 78, 228
- marginalmente estable, 39
- monovariable, 19
- no lineal, 19, 22
- observable, 235
- reducido equivalente, 66
- sobreamortiguado, 39, 41, 93, 103, 155, 215
- subamortiguado, 39, 93, 103, 155
- Sobreoscilación, 40, 155

- Término directo, 21
- Tanque, 19, 22, 123
- Teoría del control automático, 4, 144
- Teorema del valor final, 157
- Tiempo
 - de establecimiento, 34, 41, 49, 155, 164, 206
 - de pico, 40, 155, 206
 - de retardo, 59, 82, 109, 151, 215
 - dominio frecuencial, 81
 - de subida, 41, 155, 206
 - derivativo, 170, 217
 - integral, 169, 211, 217
- Tipo de un sistema, 157
- Transformada
 - de Fourier, 77
 - de Laplace, 29, 157, 228
 - inversa de Laplace, 30
- Trayectoria, 227
- Variable
 - de desviación, 22
 - de estado, 20, 227
- Vector de estado, 20, 227
- Visualización, 3