TEMA 7

EL ESTIMADOR CON INFORMACION A PRIORI: NUEVOS CONTRASTE BASADOS EN SUMAS RESIDUALES

En los capítulos anteriores hemos estudiado los contrastes de la forma:

$H_0 : C\overline{\beta} = \overline{r}$ (1)

Siendo C una matriz qxk , con $q \leq n$ y $\overline{r}$ un vector 1xk.

Podemos situarnos en dos hipótesis de trabajo

a) Suponiendo que se haya aceptado la hipótesis anterior, tratar de re - estimar el modelo introduciendo la condición (1).
b) Es posible que por las características del problema que estemos estimando se de la circunstancia de que sean conocidas algunas restricciones lineales sobre los parámetros. Por ejemplo si sabemos que una función de producción cumple la hipótesis de los rendimientos a escala constantes, las elasticidades estimadas deben de sumar la unidad.

En ambos casos se trataría de conseguir un estimador para el vector $\vec{\beta}$, que cumpliese la restricción (1), por lo tanto puede plantearse el siguiente problema de optimización:

$$Min(\overline{y} - X\hat{\overline{\beta}}_R)'.(\overline{y} - X\hat{\overline{\beta}}_R)$$

Sujeto a (2)

$$C\hat{\overline{\beta}}_R = \overline{r}$$

Donde $\hat{\overline{\beta}}_R$ es un estimador genérico que llamamos estimador con restricciones:

El correspondiente lagrangiano es:

$$\ell(\hat{\overline{\beta}}_R, \overline{\mu}) = (\overline{y} - X\hat{\overline{\beta}}_R)'.(\hat{\overline{y}} - X\hat{\overline{\beta}}_R) + \overline{\mu}'(C\hat{\overline{\beta}}_R - \overline{r})$$

O aplicando un cambio de variable arbitrario al multiplicador

$$\ell(\hat{\overline{\beta}}_R, \overline{\lambda}) = (\overline{y} - X\hat{\overline{\beta}}_R)'.(\hat{\overline{y}} - X\hat{\overline{\beta}}_R) + 2\overline{\lambda}(C\hat{\overline{\beta}}_R - \overline{r})$$

Desarrollando la expresión anterior, se obtiene

$$\ell(\hat{\overline{\beta}}_R, \overline{\lambda}) = \overline{y}'\overline{y} + \hat{\overline{\beta}}_R'X'X\hat{\overline{\beta}}_R - 2\hat{\overline{\beta}}_R X'\overline{y} + 2\overline{\lambda}(C\hat{\overline{\beta}}_R - \overline{r})$$

Y por lo tanto derivando es la expresión anterior podemos obtener las condiciones de primer orden para resolver (2)

$$\frac{\partial \ell(.)}{\partial \hat{\bar{\beta}}_R} = 0 \Leftrightarrow X'X\hat{\bar{\beta}}_R - X'\bar{y} + C'\bar{\lambda} = 0 \rightarrow (3)$$

$$\frac{\partial \ell(.)}{\partial \bar{\lambda}} = 0 \Leftrightarrow C\hat{\bar{\beta}}_R = \bar{r} \rightarrow (4)$$

Despejando en (3) podemos obtener

$$\hat{\bar{\beta}}_R = \hat{\bar{\beta}}_{mco} - (X'X)^{-1}C'\lambda$$

Sustituyendo este resultado en (4) obtenemos

$$C\hat{\bar{\beta}}_{mco} - C(X'X)^{-1}C'\lambda = \bar{r}$$

Teniendo en cuenta que C es una matriz de rango completo, podemos despejar $\bar{\lambda}$, del siguiente modo:

$$\bar{\lambda} = \left[C(X'X)^{-1}C'\right]^{-1}(C\hat{\bar{\beta}}_{mco} - \bar{r})$$

Por lo tanto el estimador de mínimos cuadrados restringidos linealmente será:

$$\bar{\beta}_R = \hat{\bar{\beta}}_{MCO} - (X'X)^{-1}C'\left[C(X'X)^{-1}C\right]^{-1}(C\hat{\bar{\beta}}_{MCO} - \bar{r}) \qquad (5)$$

L a ecuación (5) puede representarse de forma simplificada como:

$$\hat{\bar{\beta}}_R = \hat{\bar{\beta}}_{MCO} - K(C\hat{\bar{\beta}}_{MCO} - \bar{r}) \quad (6) \text{ siendo } K = (X'X)^{-1}C'\left[C(X'X)C\right]^{-1}$$

La ecuación (6) indica que el estimador de MCRL es igual al estimador de MCO más una corrección, que a su vez es una función lineal de la desviación del estimador de MCO respecto al cumplimiento exacto de las restricciones

Veamos como se puede escribir el vector de residuos asociado a este nuevo estimador

$$e_R = \bar{y} - X\hat{\bar{\beta}}_R = \bar{y} - X\hat{\bar{\beta}}_{MCo} - X(\hat{\bar{\beta}}_R - \hat{\bar{\beta}}_{MCO}) = e - X(\hat{\bar{\beta}}_R - \hat{\bar{\beta}}_{MCO})$$

Si transponemos y multiplicamos, obtendremos la siguiente expresión

$$e'_R e_R = e'e + (\hat{\bar{\beta}}_R - \hat{\bar{\beta}})' X' X (\hat{\bar{\beta}}_R - \hat{\bar{\beta}})$$

el término correspondiente al producto cruzado se anual puesto que Xé = 0 , así pues la diferencia entre la suma de los residuos al cuadrado restringidos y sin restringir viene dada por:

$$e'_R e_R - eé = (\hat{\bar{\beta}}_R - \hat{\bar{\beta}})' X' X (\hat{\bar{\beta}}_R - \hat{\bar{\beta}})$$

Si despejamos la expresión $(\hat{\bar{\beta}}_R - \hat{\bar{\beta}})$ de (5) y sustituimos en la anterior tendríamos

$$(e'_R e_R - eé) = (C\hat{\bar{\beta}} - \bar{r})' \left[C(X'X)^{-1} C' \right]^{-1} (C\hat{\bar{\beta}} - \bar{r}) \quad (7)$$

La expresión (7) es idéntica a la expresión que tendría el numerador del estadístico general si estuviésemos contrastando la hipótesis $H_0 : C\bar{\beta} = \bar{r}$, por lo tanto dicho estadístico ser podría expresar ahora en función de la diferencia de los residuos del siguiente modo:

$$F_{q,n-k} = \frac{(e'_R e_R - eé) / q}{eé / n-k} \quad (8)$$

Esta expresión nos permite contrastar las hipótesis utilizando solo las sumas de los cuadrados de los residuos, por lo tanto podríamos plantear determinados contrastes del siguiente modo;

En el modelo

$$Y_t = \bar{\beta}_1 + \bar{\beta}_2 X_{2t} + \bar{\beta}_3 X_{3t} + ... + \bar{\beta}_s X_{st} + ... + \bar{\beta}_k X_{kt} \quad (9)$$

Queremos contrastar la hipotesis de que:

$$\bar{\beta}_{s+1} = 0$$
$$\bar{\beta}_{s+2} = 0$$

$$\bar{\beta}_k = 0$$

Bastaría con realizar dos estimaciones, una utilizando el modelo (9) completo, con lo que obtendríamos los residuos sin restringir y otra , incorporando las restricciones , es decir utilizando el modelo

$$Y_t = \overline{\beta}_1 + \overline{\beta}_2 X_{2t} + \overline{\beta}_3 X_{3t} + ...+ \overline{\beta}_s X_{st} \qquad (10)$$

Con lo que calcularíamos los residuos restringidos.

En general este procedimiento es valido siempre que incluyamos las restricciones, que, por supuesto, han de ser lineales