TEMA 4

RESULTADO ESTADÍSTICOS BÁSICOS EN FORMA MATRICIAL

El objetivo de este tema es, por una parte, estudiar los elementos básicos de estadística en el ámbito matricial, y por otra, ver como una forma cuadrática, que es un concepto geométrico, cuando el vector por el que multiplicamos es aleatorio, es decir, una variable estadística, esta forma cuadrática tiene distribución de probabilidad.

I.- VECTOR DE MEDIAS Y MATRIZ DE COVARIANZAS.

Una variable aleatoria n-dimensional es un vector x, en el que cada uno de sus componentes son a su vez variables aleatorias.

Se define como valor esperado de $\bar{x} \Rightarrow E[\bar{x}]$, que a su vez se define como vector de medias.

VECTOR DE MEDIAS:

$$E[\bar{x}] = \begin{pmatrix} E[x_1] \\ E[x_2] \\ \vdots \\ E[x_n] \end{pmatrix}.$$

PROPIEDADES

El vector de medias cumple con las siguientes propiedades:

- $E[\bar{x} + \bar{y}] = E[\bar{x}] + E[\bar{y}]$

DEMOSTRACIÓN:

$$E[\bar{x} + \bar{y}] = E\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right] = E\left[\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} E(x_1 + y_1) \\ E(x_2 + y_2) \\ \vdots \\ E(x_n + y_n) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} E(x_1) + E(y_1) \\ E(x_2) + E(y_2) \\ \vdots \\ E(x_n) + E(y_n) \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} E(x_1) \\ E(x_2) \\ \vdots \\ E(x_n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E(y_1) \\ E(y_2) \\ \vdots \\ E(y_n) \end{pmatrix}\right) = E\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + E\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = E[\bar{x}] + E[\bar{y}]$$

- Del mismo modo podemos demostrar que:

$$E[A\bar{x} + B\bar{y}] = A \cdot E[\bar{x}] + B \cdot E[\bar{y}]$$

- Cambio de variable:

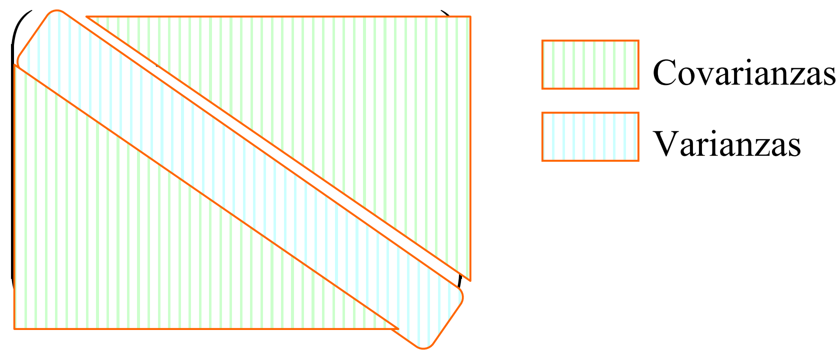
$$\bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$$
$$E[\bar{y}] = E[A\bar{x} + \bar{b}] = A \cdot E[\bar{x}] + \bar{b} = A \cdot \bar{\mu} + \bar{b}$$

MATRIZ DE COVARIANZAS $[C_{\bar{x}}]$

La matriz de covarianzas de un vector aleatorio tiene exactamente el mismo significado que la varianza de una variable aleatoria unidimensional. Está formada por la varianza y covarianza de las variables aleatorias unidimensionales que componen el vector aleatorio.

Descomposición gráfica de la matriz de covarianzas:

$C_{\bar{x}} =$



Descomposición analítica de la matriz de covarianzas:

$$Var(x_i) = \mu_{ii} = E[(x_i - \mu_i)(x_i - \mu_i)]$$
$$Cov(x_i, x_j) = \mu_{ij} = E[(x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j)]$$

PROPIEDADES

- La matriz de covarianzas es simétrica:

Es decir, $\mu_{ij} = \mu_{ji}$

- La matriz de covarianzas es una matriz definida positiva.

$\left[\sum_{r=1}^{n} a_r (x_r - \mu_r)\right]^2 \Leftarrow$ Esta expresión siempre es mayor que 0, por lo que la siguiente expresión también tiene que serlo siempre:

$$E\left[\left[\sum_{r=1}^{n} a_r\left(x_r-\mu_r\right)\right]^2\right]=E\left[\sum_{r=1}^{n} a_r^2\left(x_r-\mu_r\right)^2+\sum_{r\neq s} a_r a_s\left(x_r-\mu_r\right)\left(x_s-\mu_s\right)\right]=$$

$$=\sum_{r=1}^{n} a_r^2 E\left(x_r-\mu_r\right)^2+\sum_{r\neq s} a_r a_s E\left[\left(x_r-\mu_r\right)\left(x_s-\mu_s\right)\right]=\sum_{r=1}^{n} a_r^2\mu_{rr}+\sum_{r\neq s} a_r a_s\mu_{rs}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_{11} & \mu_{12} & \cdots & \mu_{2n}\\ \mu_{21} & \mu_{22} & \cdots & \mu_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \cdots & \mu_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}=\bar{a}' C_{\bar{x}}\bar{a}\succ 0$$

- Expresión vectorial de la matriz de covarianzas.

$$C_{\bar{x}}=\left(\bar{x}-\bar{\mu}\right)_{n\times 1}\cdot\left(\bar{x}-\bar{\mu}\right)'_{1\times n}=E\left[\begin{pmatrix} x_1-\mu_1\\ x_2-\mu_2\\ \vdots\\ x_n-\mu_n\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1-\mu_1 & x_2-\mu_2 & \cdots & x_n-\mu_n\end{pmatrix}\right]=$$

$$E\left[\begin{pmatrix}\left(x_1-\mu_1\right)^2 & \left(x_1-\mu_1\right)\left(x_2-\mu_2\right) & \cdots & \left(x_1-\mu_1\right)\left(x_n-\mu_n\right)\\ \left(x_1-\mu_1\right)\left(x_2-\mu_2\right) & \left(x_2-\mu_2\right)^2 & \cdots & \left(x_2-\mu_2\right)\left(x_n-\mu_n\right)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \left(x_1-\mu_1\right)\left(x_n-\mu_n\right) & \left(x_2-\mu_2\right)\left(x_n-\mu_n\right) & \cdots & \left(x_n-\mu_n\right)\left(x_n-\mu_n\right)\end{pmatrix}\right]=$$

$$=E\left[\begin{pmatrix}\mu_{1,1} & \mu_{1,2} & \cdots & \mu_{1,n}\\ \mu_{2,1} & \mu_{2,2} & \cdots & \mu_{2,n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu_{n,1} & \mu_{n,2} & \cdots & \mu_{n,n}\end{pmatrix}\right]=C_{\bar{x}}=E\left[\left(\bar{x}-\bar{\mu}\right)\left(\bar{x}-\bar{\mu}\right)'\right]$$

- CAMBIO DE VARIABLE: Vamos ahora a ver que ocurre cuando realizamos el siguiente cambio de variable:

$$\bar{y}=A\bar{x}+\bar{b}$$
$$E[\bar{y}]=\left(A\times E[\bar{x}]\right)+\bar{b}=A\bar{\mu}_x+\bar{b}=\bar{\mu}_y$$
$$\left(\bar{y}-\bar{\mu}_y\right)=\left(A\bar{x}+\bar{b}\right)-\left(A\bar{\mu}_x+\bar{b}\right)=A\left(\bar{x}-\bar{\mu}_x\right)$$

Aplicando dicho cambio de variable, la expresión de la matriz de covarianzas sufre la siguiente transformación:

$$C_{\bar{y}}=E\left[\left(\bar{y}-\bar{\mu}_y\right)\left(\bar{y}-\bar{\mu}_y\right)'\right]=E\left[A\left(\bar{x}-\bar{\mu}_x\right)\left(\bar{x}-\bar{\mu}_x\right)'A'\right]=A\times E\left[\left(\bar{x}-\bar{\mu}_x\right)\left(\bar{x}-\bar{\mu}_x\right)'\right]\times A'=$$
$$=AC_{\bar{x}}A'\Rightarrow C_{\bar{y}}=AC_{\bar{x}}A'$$

II.- DISTRIBUCIÓN NORMAL MULTIVARIANTE.

Una distribución normal multivariante cuya matriz de covarianzas sea la identidad $[\mathrm{I}]$ y su vector de medias el $[\bar{0}]$, se puede obtener como el producto de n normales $(0,1)$ independientes entre sí.

DEMOSTRACIÓN:

$$sea\ x \to N(\mu, \sigma^2)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}}$$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to N(\bar{0}, \mathrm{I})\ si\ f(\bar{x}) = f(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$como\ \bar{x}'\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot(\bar{x}'\bar{x})}$$

$$f(\bar{x}) = f(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_i^2} = \prod_{i=1}^{n} N(0,1)$$

Vamos a efectuar un cambio de variable:

$$\bar{y} = A\bar{x} + \bar{b}$$

$$E[\bar{y}] = A \times E[\bar{x}] + \bar{b}$$

$$\bar{\mu}_y = A \times \bar{0} + \bar{b} \Rightarrow \bar{b} = \bar{\mu}_y$$

$$C_{\bar{y}} = AC_{\bar{x}}A' = A\mathrm{I}A' = AA'$$

$$A\bar{x} = (\bar{y} - \bar{\mu}_y)$$

$$\bar{x} = A^{-1}(\bar{y} - \bar{\mu}_y)$$

$$\bar{x}' = (\bar{y} - \bar{\mu}_y)'(A^{-1})'$$

$$\left|\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}}\right| = |A|$$

$$f(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\bar{y}-\mu_y)'\left(A^{-1}\right)' A^{-1}(\bar{y}-\mu_y)} \cdot \frac{1}{|A|}$$

$$|C_y| = |AA'| = |A| \cdot |A'| = |A|^2 \Rightarrow |A| = \sqrt{|C_y|}$$

$$\left(A^{-1}\right)' A^{-1} = (AA')^{-1} = C_y^{-1}$$

$$\Rightarrow f(y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n) = \frac{1}{\left(\sqrt{2\Pi}\right)^n \cdot \sqrt{|C_y|}} \cdot e^{-\frac{1}{2}(\bar{y}-\mu_y)' C_y^{-1}(\bar{y}-\mu_y)} = N(\mu_y, C_y)$$

Si comparamos esta expresión con la anterior, $\left(f(x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\right)$, podemos observar que existe una similitud casi total entre el vector media y a media. Dicha similitud es la siguiente:

$$N(0,1) \approx N(\bar{0}, \mathrm{I})$$
$$N(\mu, \sigma) \approx N(\bar{\mu}, C)$$

PROPIEDADES DE LA NORMAL MULTIVARIANTE

- Si un vector aleatorio sigue un normal multivariante, cualquier vector que se obtenga eliminando una/s variable/s del anterior también seguirá una normal multivariante.
- Si tenemos un vector tal que:
  $\bar{x} \to N(\bar{\mu}, C)$
  y hacemos el cambio $\begin{cases} \bar{y} = A\bar{x} + \bar{b} \\ E[\bar{x}] = A\bar{\mu} + \bar{b} \\ C_{\bar{y}} = ACA' \end{cases}$,
  entonces $y \to N(A\bar{\mu} + \bar{b}, ACA')$

- Cualquier combinación lineal de normales multivariante sigue a su vez una normal multivariante

  Sea $\bar{x}_1 \quad \bar{x}_2 \quad \cdots \quad \bar{x}_n$,

  tal que $\begin{cases} \bar{x}_1 = \begin{pmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \\ \vdots \\ x_{1,n} \end{pmatrix} \\ \bar{x}_j = \begin{pmatrix} x_{j,1} \\ x_{j,2} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix} \end{cases}$

  entonces $(A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 + \cdots + A_n\bar{x}_n) \Leftarrow \textit{Combinación lineal}$

III.- DISTRIBUCIONES DE FORMAS CUADRÁTICAS.

1)

Sea $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} [N(0,1)]^2$ independientes entre sí.

Si $\bar{x} \to N(\bar{0}, \mathrm{I})$, se verifica que $(\bar{x}'\mathrm{I}\bar{x}) \to \chi_n^2$

DEMOSTRACIÓN:

$$\bar{x}'\mathrm{I}\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \to \chi_n^2$$

2)

Sea $\bar{x} \to N(\bar{0}, \sigma^2 \mathrm{I})$, con $\sigma^2 \mathrm{I} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma^2 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix}$ y, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

En este caso, cada una de las componentes del vector sigue una normal de media 0 y varianza σ^2

DEMOSTRACIÓN:

$$x_i \to N(0, \sigma)$$

$$\frac{x_i - 0}{\sigma} \to N(0,1)$$

$$\underbrace{\frac{\bar{x}'}{\sigma} \mathrm{I} \frac{\bar{x}}{\sigma}}_{= \frac{\bar{x}'\mathrm{I}\bar{x}}{\sigma^2}} \to \chi_n^2$$

3)

Sean, $\bar{x} \rightarrow N(\bar{0}, \Sigma)$, $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, cuyas variables no son independientes, y

$$\Sigma = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,1} \\ a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1,1} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,1} \end{pmatrix}$$

Entonces, podemos afirmar que, $\bar{x}' \Sigma^{-1} \bar{x} \rightarrow \chi_n^2$

DEMOSTRACIÓN:

Σ es una matriz definida positiva, por tanto, $\Sigma = PP'$, tal que $|P| \neq 0$. Por tanto, se podría expresar como:

$$P^{-1} \Sigma (P')^{-1} = P^{-1} PP' (P')^{-1} = \mathrm{I}$$

$$\Downarrow$$

$$P^{-1} \Sigma (P')^{-1} = \mathrm{I} \quad (1)$$

Si invertimos la matriz:

$$\Sigma^{-1} = (P')^{-1} P^{-1} \quad (2)$$

Ahora elegimos como variable de trabajo $\bar{y} = P^{-1} \bar{x}$

$$E[\bar{y}] = E[P^{-1} \bar{x}] = P^{-1} E[\bar{x}] = P^{-1} \bar{0} = \bar{0}$$

$$\Downarrow$$

$$E[\bar{y}] = \bar{0}$$

$$C_{\bar{y}} = E\left[(\bar{y} - \bar{0})(\bar{y} - \bar{0})' \right] = E[\bar{y} \cdot \bar{y}'] = E\left[P^{-1} \bar{x}\bar{x}' \left(P^{-1}\right)' \right] = P^{-1} \underbrace{E[\bar{x}\bar{x}']}_{\substack{por\ ser \\ E[\bar{x}]=0 \\ \Rightarrow E[\bar{x}\bar{x}']=\Sigma}} \left(P^{-1}\right)' =$$

$$= P^{-1} \Sigma \left(P^{-1}\right)' \underbrace{=}_{(1)} \mathrm{I} \quad \Rightarrow C_{\bar{y}} = \mathrm{I}$$

Como consecuencia, $\bar{y} \rightarrow N(\bar{0}, \mathrm{I})$, por tanto, si aplicamos el apartado [1)], nos queda que

$$\bar{y}'\mathrm{I}\bar{y} \rightarrow \chi_n^2$$
$$\bar{x}'\left(P^{-1}\right)' P^{-1}\bar{x} \rightarrow \chi_n^2$$
$$\bar{x}'\Sigma^{-1}\bar{x} \rightarrow \chi_n^2$$

4)

Si A es una matriz simétrica, idempotente y de rango r, y $\bar{x}$ es un vector aleatorio que sigue una normal multivariante $\left(\bar{x} \rightarrow N\left(\bar{0}, \mathrm{I}_n\right)\right)$, y además, $rg(A) = r \leq n$, entonces se verifica que $\bar{x}'A\bar{x} \rightarrow \chi_r^2$.

Supongamos que Q es la matriz de vectores característicos, por tanto

$$Q'AQ = \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix},$$

la matriz debe estar compuesta por (r) unos y (n-r) ceros en la diagonal principal.

Vamos a efectuar el siguiente cambio de variable

$\bar{y} = Q'\bar{x}$.

CARACTERÍSTICAS ESTOCÁSTICAS

$$E[\bar{y}] = E[Q'\bar{x}] = Q'E[\bar{x}] = Q' \times \bar{0} = \bar{0}$$
$$C_{\bar{y}} = E[\bar{y}'\bar{y}] = E[Q'\bar{x}\bar{x}'Q] = Q'E[\bar{x}\bar{x}']Q = Q'C_{\bar{x}}Q = Q'\mathrm{I}Q$$

al ser Q la matriz de vectores característicos anteriormente citada, su inversa coincide con su traspuesta, y por tanto, $C_{\bar{y}} = Q'\mathrm{I}Q = \mathrm{I}$

Como consecuencia, ya podemos afirmar, que $\bar{y} \rightarrow N\left(\bar{0}, \mathrm{I}_n\right)$.

Si ahora deshacemos el cambio, tenemos que

$$\bar{y} = Q'\bar{x}$$
$$Q'^{-1}\bar{y} = Q'^{-1}Q'\bar{x}$$
$$Q\bar{y} = \bar{x}$$

$$(Q\bar{y})' A(Q\bar{y}) = \bar{y}' \underbrace{Q'AQ}_{matriz\ diagonal} \bar{y} = \bar{y}'\Lambda\bar{y} = \bar{y}'\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 0 & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}\bar{y} =$$

$$= \sum_{i=1}^{r} y_i^2 = \sum_{i=1}^{r} [N(0,1)]^2 \to \chi_r^2$$

5)

Sea $\bar{x} \to N(\bar{0}, \sigma^2 \mathrm{I})$, teniendo la matriz A las mismas características que en el caso anterior, se puede demostrar que $\dfrac{\bar{x}'A\bar{x}}{\sigma^2} \to \chi_r^2$.

IV.- INDEPENDENCIA DE LAS FORMAS CUADRÁTICAS

Sea $\bar{x} \to N(\bar{0}, \sigma^2 \mathrm{I})$ y, A y B, dos matrices simétricas e idempotentes.

Queremos saber cuando dos formas cuadráticas son independientes, ya que si las sumamos y sabemos que son independientes y que las dos siguen una χ^2, el resultado será otra χ^2 con k grados de libertad, siendo k la suma de los grados de libertad de las anteriores.

Vamos, por tanto, a averiguar en caso dos formas cuadráticas son independientes:

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}'A\bar{x} \to \chi^2 \\ \bar{x}'B\bar{x} \to \chi^2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{x}'A\bar{x} \underbrace{=}_{A=A'A} \bar{x}'A'A\bar{x} = (A\bar{x})'(A\bar{x}) \\ \bar{x}'B\bar{x} \underbrace{=}_{B=B'B} \bar{x}'B'B\bar{x} = (B\bar{x})'(B\bar{x}) \end{Bmatrix}$$

Son independientes si sus transformaciones de Borel lo son, por tanto, tenemos que demostrar que $A\bar{x}$ y $B\bar{x}$, están incorreladas.

$$E[(A\bar{x} - \bar{0})(B\bar{x} - \bar{0})] = 0$$
$$AE[\bar{x}\bar{x}']B = 0$$
$$A\sigma^2 \mathrm{I} B = 0$$
$$\sigma^2 AB = 0 \begin{cases} \sigma^2 = 0 \\ AB = 0 \end{cases}$$

Luego, para que dos formas cuadráticas sean independientes entre sí, el producto de sus matrices tiene que ser 0.