TEMA III

ELEMENTOS DEL ÁLGEBRA MATRICIAL

En este tema vamos a repasar los conocimientos de matrices que aprendimos en cursos anteriores y que vamos a necesitar en esta asignatura.

I.- MATRICES

➢ *¿Qué es una matriz?*

Una matriz es una disposición de números para la cual existe una nomenclatura determinada.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mk} \end{pmatrix} \qquad \left(a_{ij}\right)_{\substack{i=1,\ldots,m \\ j=1,\ldots,k}}$$

➢ *Matrices con nombre propio.*

- ✓ ***Matriz cuadrada:*** Una matriz recibe la denominación de matriz cuadrada cuando el número de filas que posee es igual al número de columnas, es decir, que $k = m$.

- ✓ ***Matriz rectangular:*** Se conoce como matriz rectangular a toda aquella matriz que pose distinto número de filas que de columnas, es decir, que $k \neq m$.

- ✓ ***Matriz vector***: Es aquella que está formada por una sola columna, es decir, que $k = 1$.

- ✓ ***Matriz fila***: Es aquella que se compone de una sola fila, es decir, $m = 1$.

- ✓ ***Matriz simétrica***: Una matriz es simétrica cuando sus elementos están situados idénticamente respecto de la diagonal, como por ejemplo...

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Las matrices simétricas tienen la peculiaridad de que son iguales a su traspuesta, es decir, que $A = A^t$.

- ✓ ***Matriz traspuesta:*** Una matriz se considera que es la traspuesta de otra cuando es el resultado de haber cambiado las filas por las columnas, por ejemplo...

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

- ✓ ***Matriz diagonal:*** Decimos que una matriz es diagonal cuando todos sus elementos son 0 menos los de la diagonal, es decir...

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

Una matriz diagonal también es simétrica.

- ✓ ***Matriz escalar:*** Se trata de un caso concreto de matriz diagonal, cuando todos los elementos de la diagonal son iguales, por ejemplo...

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

- ✓ ***Matriz identidad:*** Es el caso de una matriz escalar en la que todos los elementos de la diagonal además de ser iguales, son iguales a 1, es decir...

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

➢ *Operaciones.*

En el conjunto de las matrices se pueden definir operaciones

- ✓ ***SUMA:*** Se puede definir la suma de dos matrices siempre y cuando las dos matrices tengan el mismo orden, es decir, que ambas tengan el mismo número de filas y el mismo número de columnas, no quiere esto decir que sean cuadradas, sino que $m_A = m_B \ y \ n_A = n_B$. La suma matricial se define del siguiente modo..

$$\begin{aligned} &\mathrm{M}_{m\times n} + \mathrm{M}_{m\times n} \to \mathrm{M}_{m\times n} \\ &A \qquad\quad B \quad \to A + B = C \\ &(a_{ij}) \quad (b_{ij}) \to (c_{ij}) \\ &c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j \end{aligned}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 5 \\ 7 & 8 & 11 \end{pmatrix}$$

La suma de matrices cumple las siguientes propiedades:

- Elemento neutro
- Opuesto
- Conmutativa
- Asociativa

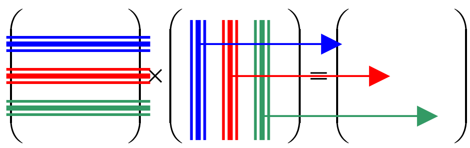
✓ ***PRODUCTO DE MATRICES:*** El producto de matrices solo se considera operación cuando se trata de la multiplicación de dos matrices cuadradas del mismo orden, pero aun no tratándose de una operación se pueden multiplicar cuando la primera matriz tenga un numero de columnas n, que coincida con el número de filas de la segunda matriz.

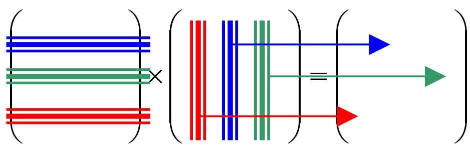
- ***Caso 1.-*** *Matrices cuadradas del mismo orden. Si es una operación.*

  El producto de dos matrices se realiza de la siguiente forma:

  $$c_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} + a_{i2} \times b_{2j} + \cdots + a_{ik} \times b_{mj}$$

  Metodología:





  Ejemplo:

  $$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}_{3\times3} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}_{3\times3} = \begin{pmatrix} 36 & 24 & 68 \\ 53 & 32 & 89 \\ 43 & 28 & 79 \end{pmatrix}$$

  Este producto de matrices cumple las siguientes ***PROPIEDADES:***

  - Existencia del *elemento neutro*, que en este caso se trata de la matriz identidad. $\exists I / A \cdot I = A$.
  - *Asociativa*: $A(BC) = (AB)C$

- *Distributiva* respecto de la suma: $A(B+C)=AB+AC$
- No cumple la propiedad *conmutativa*: $AB \neq BA$

  - ***Caso 2.-*** *Producto de dos matrices sin tratarse de una operación.*

    Como ya comentamos al principio del epígrafe, sin tratarse de una operación siempre y cuando coincida el número de columnas de la primera matriz con el número de filas de la segunda. El procedimiento es el mismo que en el caso anterior.

✓ ***PRODUCTO DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ.*** En el conjunto de las matrices se puede definir esta tercera operación, que se desarrolla del siguiente modo:

$$\Re \times \mathrm{M}_{m\times n} \to \mathrm{M}_{m\times n}$$
$$\lambda \times A \to \lambda A$$
$$(a_{ij}) \to (c_{ij})$$
$$\forall i,j \quad c_{ij} = \lambda a_{ij}$$

Ejemplo:

$$3\times\begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 5 & 8 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 21 & 18 \\ 15 & 24 & 3 \\ 27 & 18 & 12 \end{pmatrix}$$

ESPACIO VECTORIAL:

Se llama espacio vectorial al conjunto formado por: $\{\mathrm{M}_{m\times n},+,\cdot\lambda\}$

II.- DETERMINANTES Y PROPIEDADES

➢ DEFINICIÓN DE DETERMINANTE. → FALTA←

➢ PROPIEDADES DE LOS DETERMINANTES.

✓ El determinante de una matriz es igual al de su traspuesta, $|A| = |A'|$.
✓ Al permutar dos líneas el valor del determinante cambia de signo.
✓ Si todos los elementos de una línea se multiplican por un número real, el valor del determinante queda multiplicado por dicho número.
✓ Si todos los elementos de una línea son nulos el determinante también lo es.
✓ Si dos líneas son iguales el valor del determinante es cero.
✓ Si dos líneas son proporcionales el determinante también es nulo.

- ✓ Si todos los elementos de la j-ésima columna (o fila) de un determinante representa una suma de dos sumandos el determinante se puede descomponer del siguiente modo:

$$a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$$

El determinante será igual a la suma de dos determinantes en los que todas las filas (o columnas) coinciden con el determinante inicial excepto la j-ésima, mientras que la j-ésima de uno de ellos consta e la b_{ij} y la otra de c_{ij}.

- ✓ Si a un determinante se le suma un múltiplo arbitrario real de otra línea el determinante no cambia su valor.

➢ CÁLCULO DE DETERMINANTES.

- ✓ **Regla de *Sarrus*.**

Por el método de Sarrus el determinante de una matriz se calcula del siguiente modo...Vamos a hacer el desarrollo para un determinante de orden 3, análogamente se haría con los demás órdenes.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - \\ - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{23} \cdot a_{32} \cdot a_{11} - a_{33} \cdot a_{12} \cdot a_{21} \end{pmatrix}$$

Este método suele ser usado para el cálculo de determinantes de orden bajo, es decir, para orden 2, 3, como mucho, 4.

Ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 4 \\ 5 & 2 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 9 + 7 \cdot 8 \cdot 4 + 4 \cdot 5 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot 4 - 8 \cdot 3 \cdot 2 - 9 \cdot 7 \cdot 5 = -75$$

- ✓ **Cálculo por adjuntos.**

El cálculo por adjuntos es un método totalmente diferente al anterior. Este método se lleva a cabo a través de una fila o columna del determinante y sus adjuntos.

$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$, siendo A_{ij} un adjunto o complemento algebraico.

Calculo de los adjuntos:

$Aij = (-1)^{i+j} |\alpha_{ij}|$, siendo α_{ij}, la submatriz complementaria de a_{ij}

Los adjuntos, en la práctica se calcula como sigue:

Para calcular el adjunto A_{ij} a la matriz A le tachamos la fila i y la columna j y calculamos el determinante de lo que nos queda, que es el menor complementario de a_{ij} .

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \Rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} \\ \cancel{4} & 5 & 6 \\ \cancel{7} & 8 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 9 - 6 \cdot 8) = (-3)$$

Ejemplo de Cálculo de determinantes por adjuntos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + 3 \cdot A_{13} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= [(5 \cdot 9 - 6 \cdot 8)] + [-2 \cdot (4 \cdot 9 - 6 \cdot 7)] + [3 \cdot (4 \cdot 8 - 5 \cdot 7)] =$$

$$= (-3) + (12) + (-9) = 0$$

III.- MATRIZ INVERSA

En el conjunto de las matrices cuadradas su puede obtener la matriz inversa $[A^{-1}]$ de una dada $[A]$.

- Para que $[A^{-1}]$ sea la matriz inversa de $[A]$, se tiene que cumplir que:
    - $|A| \neq 0$
    - $A \cdot A^{-1} = I$
    - $A^{-1} \cdot A = I$
- Cuando $|A| = 0$, se dice que la matriz es singular, y carece de inversa.
- Cálculo de la matriz inversa.

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ y sea $Adj.(A) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$

La inversa de A se define como:

$$A^{-1} = \frac{(Adj.(A))^t}{|A|}$$

- Se cumple que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

IV.-MATRIZ PARTICIONADA

V.- RANGO DE UNA MATRIZ

Si en una matriz cualquiera consideramos que cada fila es un vector, llamamos rango por filas al número de vectores linealmente independientes de todos..

Del mismo modo llamamos rango por columnas al número de columnas linealmente independientes de las demás que tiene una matriz considerando que cada columna es un vector.

Se puede demostrar que el rango por filas es igual al rango por columnas en cualquier matriz.

El rango de una matriz se define como el orden del menor mayor distinto de 0.

TEOREMA DE HADLEY.

El rango del producto de dos matrices es siempre menor o igual que el mínimo del rango de las dos matrices, es decir:

$$rg(A \cdot B) \leq \min\{rg(A), rg(B)\}$$

FALTA

VI.- RAICES Y VECTORES CARACTERÍSTICOS. DIAGONALIZACIÓN DE UNA MATRIZ.

Los vectores característicos son aquellos que verifican que al multiplicarlos por una matriz obtenemos el mismo resultado que si lo hubiésemos multiplicado por un escalar, es decir, son aquellos que cumplen que: $A\overline{x} = \lambda\overline{x}$.

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \Rightarrow A\bar{x} - \lambda I\bar{x} = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)\bar{x} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \bar{x} = 0 \\ |A - \lambda I| = 0 \leftarrow \end{cases}$$

Y $|A - \lambda I| = 0$, da lugar al polinomio característico.

Desarrollo matemático del polinomio característico:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A\bar{x} = \lambda I\bar{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} - \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftarrow \textit{polinomio característico}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 - \lambda(a_{11} + a_{22}) + (a_{11} \cdot a_{12} - a_{12} \cdot a_{21})$$

$$\lambda = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} \cdot a_{012} - a_{12} \cdot a_{21})}}{2}$$

Si ahora desarrollamos el interior de la raíz cuadrada y estudiamos el caso concreto de una matriz simétrica, se puede generalizar diciendo que en el caso de matrices simétricas, todas las raíces son reales.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \text{matriz simétrica}$$

$$(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{12}) =$$

$$= a_{11}{}^2 + a_{22}{}^2 + 2a_{11}a_{22} - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}{}^2$$

$$= a_{11}{}^2 + a_{22}{}^2 - 2a_{11}a_{22} + 4a_{12}{}^2 = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}{}^2 \succ 0$$

Sean λ_1, λ_2, las raíces características,

$$\lambda_i \Rightarrow \begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \\ a_{22}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 = 0 \end{cases}$$

La matriz de los valores característicos está formada por los vectores característicos de módulo unidad.

Calcular los vectores característicos de módulo unidad se hace como sigue:

- Sustituimos cada una de las raíces en la siguiente expresión:

$$A\overline{x} = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

De esta expresión sacamos unas ecuaciones que nos va a permitir despejar las variables en función de un parámetro α, a esta soluciones, en función de α, se le llaman soluciones paramétricas. Llegado este punto damos a α un valor y las soluciones obtenidas las dividimos por su módulo, obteniendo así los vectores característicos, cada vector viene de la sustitución de una raíz característica.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow |A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 18\lambda = 0$$

Las soluciones de este polinomio son $\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 6 \quad \lambda_3 = 3$

$\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ 2x + 4z = 0 \end{cases}$$

Si igualamos z a α, obtenemos la siguiente solución paramétrica: $\begin{cases} x = -2\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = 0 \end{cases}$, con lo cual

el primer vector característico de módulo unitario sería: $\dfrac{(-2 \quad 2 \quad 1)}{|-2 \quad 2 \quad 1|} = \dfrac{(-2 \quad 2 \quad 1)}{\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{(-2 \quad 2 \quad 1)}{3} = \left(\dfrac{-2}{3} \quad \dfrac{2}{3} \quad \dfrac{1}{3}\right)$.

Si repetimos esta operación para el resto de raíces características vemos que la matriz de valores característicos es:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

DIAGONALIZACIÓN

Partimos de una matriz A y decimos que:

$$X'AX = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 x_1^1 & \lambda_2 x_2^1 & \cdots & \lambda_n x_n^1 \\ \lambda_1 x_1^2 & \lambda_2 x_2^2 & \cdots & \lambda_n x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \lambda_1 x_1^n & \lambda_2 x_2^n & \cdots & \lambda_n x_n^n \end{pmatrix} = \left(\overline{x}_i' \cdot \lambda_j \cdot \overline{x}_j \right) =$$

$$= \left(\lambda_j \cdot \overline{x}_i' \cdot \overline{x}_j \right) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

MATRIZ IDEMPOTENTE:

Se dice que una matriz es idempotente cuando al multiplicarse por ella misma es igual es ella misma, es decir, que $A \cdot A = A^2 = A$.

Si la matriz que estamos diagonalizando es idempotente, los valores característicos no pueden tomar cualquier valor.

Demostración

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}$$
$$AA\overline{x} = \lambda A\overline{x}$$
$$A\overline{x} = \lambda\lambda\overline{x}$$
$$A\overline{x} = \lambda^2\overline{x}$$

$$\begin{cases} \lambda\overline{x} = \lambda^2\overline{x} \\ \left(\lambda - \lambda^2\right)\overline{x} = 0 \\ \lambda - \lambda^2 = 0 \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases} \end{cases}$$

Luego si tenemos una matriz idempotente,

$$X'AX = \begin{pmatrix} 1 ó 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 ó 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 ó 0 \end{pmatrix}.$$

TRAZA DE UNA MATRIZ.

La traza de una matriz es la suma de todos los elementos de su diagonal principal.

Ejemplo:

$$traza(A) = traza\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 1 + 5 + 9 = 15$$

En el caso de una matriz idempotente el rango de la matriz es igual a la traza e igual, a su vez, a número de unos de la diagonal princiapal.

PROPIEDADES de la traza de una matriz.

- $traza(A + B) = traza(A) + traza(B)$
- $traza(A \cdot B) = traza(B \cdot A)$

  Demostración:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} =$$

...como lo único que influye en la traza es la diagonal principal...

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_{1i} \cdot b_{i1} & & & \\ & \sum_{i=1}^{n} a_{2i} \cdot b_{i2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sum_{i=1}^{n} a_{ni} \cdot b_{in} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$traza(A \cdot B) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{ki} \cdot b_{ik} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot b_{ik} = traza(B \cdot A)$$

- $traza(A \cdot B \cdot C) = traza(B \cdot C \cdot A = traza(B \cdot A \cdot C))$

- En el caso de una matriz idempotente y simétrica, $rg(A) = rg(X'AX) = traza(X'AX) = traza(AX'X) = traza(A)$.

VII.- FORMAS CUADRÁTICAS. MATRICES DEFINIDAS POSITIVAS.

Dada una matriz simétrica cualquiera, A, de orden n, nos permite definir una aplicación del espacio vectorial.

$$\Re^n \to \Re$$
$$\overline{x} \to \overline{x}' A \overline{x} \quad forma \ \ cuadrática$$

Siendo:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \quad y \quad \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$(x_1 \quad x_2) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = $$ polinomio homogéneo de grado 2
$$= a_{11} \cdot (x_1)^2 + a_{22} \cdot (x_2)^2 + 2a_{12}x_1x_2$$

Se dice que una forma cuadrática es definida positiva si se cumple que: $\forall x \neq 0 \quad \overline{x}' A \overline{x} \succ 0$. Los mismo se dice para una matriz simétrica, es decir, que una matriz simétrica es definida positiva si lo es su forma cuadrática.

Se dice que una forma cuadrática es semidefinida positiva si se cumple que $\forall x \neq 0 \quad \overline{x}' A \overline{x} \geq 0$.

PROPIEDADES DE FORMAS CUADRÁTICAS DEFINIDAS POSITIVAS:

I. Si A es una matriz definida positiva, su determinante es distinto de cero.
Demostración: *Vamos a demostrar esta propiedad usando el método de reducción al absurdo, para lo cual vamos a suponer que el determinante de A es cero, y como veremos, llegamos a una solución imposible, por lo cual podremos aceptar que el determinante de una matriz definida positiva siempre es distinto de cero.*
$$|A| = 0 \Rightarrow A\overline{x} = 0 \Rightarrow \exists \overline{x}_1 \neq 0 / A\overline{x}_1 = 0 \Rightarrow \overline{x}_1^{/} A \overline{x}_1 = 0 \neq \overline{x}^{/} A \overline{x} \succ 0 .$$

II. Si tenemos una matriz cuadrada, A, de orden ‘n’ definida positiva y otra matriz, B de orden $n \times s$, cuyo rango es ‘s’, entonces $B^{/}_{s\times n} \cdot A_{n\times n} \cdot B_{n\times s} = C_{s\times s}$, también será definida positiva para todo $\overline{y} \neq 0$, es decir, que: $\forall y \neq 0 \quad \overline{y}' B' A B \overline{y} \geq 0$.
Demostración:

Los primero que debemos hacer es dividir la matriz B en una matriz de dos submatrices, del siguiente modo: $(B)=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \}s\times s \ |B_1|\neq 0 \\ \}(n-s)\times s \end{matrix}$. Hecho esto vemos que:

$\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix}\cdot\bar{y}, \quad \bar{y}\neq 0 \Rightarrow \bar{x}\neq 0$, por lo que para que el vector x sea cero se tiene que cumplir que la submatriz $B_1\cdot\bar{y}=0$, y como consecuencia de que el determinante $|B_1|=0$, esto sólo se produce cuando $\bar{y}=0$, y por tanto $\bar{y}'B'AB\bar{y}=\bar{x}'A\bar{x}\succ 0$.

III. Si A es definida positiva, su matriz inversa también lo es.
<u>Demostración</u>: Esta propiedad se puede considerar un caso concreto de la anterior, l caso en el que $B=A^{-1}$, ya que $A^{-1}AA^{-1}=A^{-1}$.

IV. La matriz identidad es una matriz definida positiva.
<u>Demostración</u>: Para demostrar esta propiedad vamos a utilizar el caso concreto de la matriz identidad de orden 3.

$$I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{x}\neq\bar{0}$$

$$\bar{x}'I\bar{x}=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=x_1^2+x_2^2+x_3^2\succ 0$$

Este caso se puede generalizar para los demás órdenes.

V. Si A es una matriz definida positiva, todas sus raíces son positivas.

VI. Si A es una matriz definida positiva, entonces su determinante es mayor que cero.
<u>Demostración</u>:
$\bar{x}'A\bar{x}=\Lambda(matriz\ \ diagonal)$

Si calculamos el determinante $|X'AX|=\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i\succ 0$, por lo tanto, podemos decir que: $|X'|\cdot|A|\cdot|X'|\succ 0$, y como $|X'X|=|I|\Rightarrow|X'|\cdot|X|=1$, con lo cual podemos concluir que $|A|\succ 0$.

VII. Teorema de ***Aitken***: este teorema permite estimar el modelo cuando no se den las condiciones del entorno Gauss-Marcov.

Si tengo una matriz que es definida positiva, la puedo expresar como el producto de dos matrices cuyo determinante sea distinto de cero.

$$A=PP', \quad |P|\neq 0$$

$$X'AX = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$, por ser A definida positiva, todas las raíces características son números positivos, por tanto podemos construir una matriz D definida así: $D = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, con lo cual,

$$D'X'AXD = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda_2} & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1/\sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} =$$

$$D'X'AXD = \begin{pmatrix} \lambda_1/\lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2/\lambda_2 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n/\lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$ por lo tanto, $D'X'AXD = I$.

Ahora llamamos Q a la matriz XD, es decir, $Q = XD \Rightarrow Q'AQ = I$.

Si nos fijamos en los determinantes, podemos observar que: $|Q| = |XD| = \underbrace{|X|}_{\neq 0} \cdot \underbrace{|D|}_{\neq 0} \neq 0$. Y ya estamos en condiciones de afirmar que: $Q'^{-1}Q'AQQ^{-1} = Q'^{-1}IQ^{-1} \Rightarrow A = Q'^{-1}Q^{-1}$, y por último, llamando P' *a* Q^{-1}, ya si podemos concluir que $A = PP'$.

VIII.- CALCULO DIFERENCIAL EN NOTACIÓN MATRICIAL.

El cálculo de derivadas en notación matricial se hace como sigue:

$$\frac{\partial \overline{a}'\overline{x}}{\partial \overline{x}} = \overline{a}$$

Demostración:

$$\overline{a}'\overline{x} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 \Rightarrow \frac{\partial \overline{a}'\overline{x}}{\partial \overline{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{a}'\overline{x}}{\partial \overline{x}_1} \\ \dfrac{\partial \overline{a}'\overline{x}}{\partial \overline{x}_2} \\ \dfrac{\partial \overline{a}'\overline{x}}{\partial \overline{x}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \overline{a}$$

Y en el caso de formas cuadráticas el procedimiento es análogo:

$$\frac{\partial \overline{x}' A \overline{x}}{\partial \overline{x}} = 2A\overline{x} \,.$$

Demostración:

$$\overline{x}' A \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = {}_{a11}\ x_1^2 + {}_{a22}\ x_2^2 + a_{33} x_3^2 + 2a_{12} x_1 x_2 +$$

$$+ 2a_{13} x_1 x_3 + 2a_{23} x_2 x_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \overline{x}' A \overline{x}}{\partial \overline{x}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \overline{x}' A \overline{x}}{\partial \overline{x}_1} \\ \dfrac{\partial \overline{x}' A \overline{x}}{\partial \overline{x}_2} \\ \dfrac{\partial \overline{x}' A \overline{x}}{\partial \overline{x}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{11} x_1 + 2a_{12} x_2 + 2a_{13} x_3 \\ 2a_{22} x_2 + 2a_{12} x_1 + 2a_{23} x_3 \\ 2a_{33} x_3 + 2a_{13} x_1 + 2a_{23} x_2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 2A\overline{x}$$