LA CONFIANCE DE L'EXPERT COMME BASE POUR PARTICULARISER LA BÊTA DU PERT

JOSÉ GARCÍA PÉREZ
Departamento de Economía Aplicada

SALVADOR CRUZ RAMBAUD
Departamento de Dirección y Gestión de Empresas

ANTONIO S. ANDÚJAR RODRÍGUEZ
Departamento de Estadística y Matemática Aplicada

Universidad de Almería

Índice

Índice de autores

1. INTRODUCTION

Les sigles PERT ont leur origine dans le nom donné par Booz, Allen et Hamilton (assesseurs de direction) à une technique statistique, employée par eux, pour estimer la durée de la construction du sous-marin Polaris. Le nom complet est Program Evaluation and Review Technique.

Le fondement de cette méthodologie est l'utilisation de la distribution bêta de la première espèce comme le modèle sous-jacent de probabilité. Cette distribution a la suivante fonction de densité:

$$f(x) = \frac{(x-a)^{p-1}(b-x)^{q-1}}{(b-a)^{p+q-1}\beta(p,q)}, \text{ si } a < x < b, \quad p > 1 \quad \text{et} \quad q > 1 \qquad (1)$$

La représentation graphique de cette fonction a une forme clochée asymétrique et, généralement, la moyenne ne coincide pas avec la mode, en coupant l'axe d'absisses dans les points a et b. Les caractéristiques stochastiques de cette distribution (Dumas de Rauly, 1968) sont les suivantes:

Mode: $$m = \frac{p-1}{p+q-2}b + \frac{q-1}{p+q-2}a \qquad (2)$$

Moyenne: $$\mu = \frac{p}{p+q}b + \frac{q}{p+q}a \qquad (3)$$

Variance: $$\sigma^2 = \frac{p.q.(b-a)^2}{(p+q+1).(p+q)^2} \qquad (4)$$

La méthode PERT requère que l'expert assigne trois valeurs différentes (temps, dans le cas de tâches; flux de caisse, dans le cas d'investissements; etc.): optimiste (t_0), plus probable (t_m) et pessimiste (t_p). Chaqu'une de ces estimations ont un sens clair dans le problème et elles nous permettent d'identifier *a* et *b*, les faisant coincider avec les valeurs pessimiste et optimiste; si, en plus, nous identifions la valeur plus probable avec la mode (voir l'équation (2)), nous aurons une expression qui établit un rapport entre *p* et *q*:

$$t_m = \frac{p - 1}{p + q - 2} b + \frac{q - 1}{p + q - 2} a \qquad (5)$$

Cette expression, comme nous voyons, ne détermine pas exactement les valeurs de *p* et *q*. Le PERT classique sacrifie, dans ce point, la rigueur en faveur de la simplicité (voir Pulido et al., 1964 et Herrerías, 1989), en acceptant implicitement que:

$$p = 3 + \sqrt{2}, \quad q = 3 - \sqrt{2}\ , \text{ si } \ m > (a + b)/2 \qquad (6)$$

$$p = 3 - \sqrt{2}, \quad q = 3 + \sqrt{2}\ , \text{ si } \ m < (a + b)/2 \qquad (7)$$

Dans le cas où la mode soit $(a + b)/2$, nous aurions la bêta symétrique (voir la figure 1).

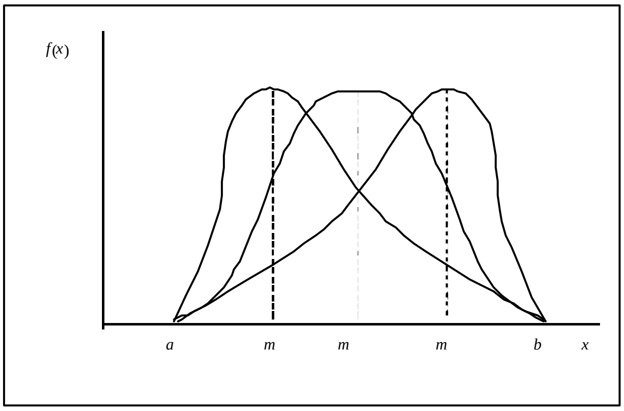

Figure 1: Fonctions de densité de la distribution bêta.

Ces paramètres définissent trois distributions qui sont celles qui apparaissent dans la figure 1. D'entre les deux (si nous excluons le cas de la bêta symétrique) on choisit celle-là dont la mode est plus près de la valeur estimée pour elle (t_m).

L'erreur qu'on peut commettre par une assignation inadéquante des valeurs *p* et *q*, supposant que la distribution bêta s'ajuste justement, on peut estimer (MacCrimmon et Ryavec: 1964, p. 23), dans le cas maximum, à un 33% pour la moyenne et un 17% pour la déviation typique, qui peut se réduire à un 4% et un 7% si $0 < p < 5$ et

Índice
Índice de autores

$$\left|\frac{a+b}{2}-m\right| \leq \frac{1}{6} \tag{8}$$

Par conséquent, comme nous avons vu, les créateurs de cette méthode ont utilisé une bêta avec des paramètres prédéterminés et, en paroles de Pulido (op. cit.), il paraît qu'une grande part des tâches analysées dans la construction du Polaris s'ajustaient dans leurs temps à la distribution bêta proposée, c'est à dire, on a utilisé une même famille de bêtas (celles qui vérifient la restriction dans les paramètres p et q) pour estimer toutes les tâches considerées. Malgré cela, cette méthode, sûrement par sa simplicité, a été admise sans aucune variation dans denombreux travaux et applications de caractère industriel, administratif, commercial, etc..

C'est évident qu'il y a une debilité dans l'utilisation de la méthode, dérivée de l'exposé précédant, puisque c'est très discutable qu'on puisse accepter une unique distribution pour des situations si diverses et hétérogènes comme celles qui s'appliquent dans l'actualité.

Dans ces derniers trente ans, plusieurs auteurs ont proposé une revision des hypothèses proposées par les créateurs de la méthode PERT (Clark: 1962, Grubbs: 1962, MacCrimmon: 1964, Pulido et al.: 1964, Vazsonyi: 1970, Sasieni: 1986, Gallagher: 1987, Farnun Stanton: 1987 et Herrerías: 1989).

Índice Índice de autores

Pulido et al., déjà en 1964, affirmaient: "Il y a trois sources d'erreur dans l'utilisation de la méthode PERT:

a) Des hypothèses de la distribution bêta.
b) Admission, comme paramètres, de p et q determinés.
c) Estimation personnelle de la moyenne et la variance de la distribution à travers des temps optimiste, pessimiste et plus probable".

Mais c'est Herrerías, en 1989, qui d'une manière plus terminante, vient à affirmer: "C'est surprenant que la même distribution bêta avec les mêmes valeurs pour les paramètres p et q:

$$\boldsymbol{b}(3+\sqrt{2},3-\sqrt{2}) \tag{9}$$

$$\boldsymbol{b}(3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}) \tag{10}$$

s'applique comme modèle à tous les problèmes dans lesquels s'utilise la méthode PERT en variant seulement: 1) le parcours (a,b) qui, d'autre part, peut se normaliser à $(0,1)$ avec le changement de variable

$$t=\frac{x-a}{b-a} \tag{11}$$

et, ainsi, il laisserait d'influencer, et 2) la position relative de la mode par rapport au point $(a+b)/2$, qui, dans la plupart des applications concrètes, peut se supposer qu'on connaît sa situation, si le technicien qui réalise les estimations est un bon professionnel".

D'une manière possible, cette simplification par rapport aux valeurs de p et q, si profondément critiquée, trouve son explication parce que dans la distribution normale, comme il est connu, le 997 par 1000 de la masse se trouve entre m-$3s$ et m+$3s$ et, par conséquent, nous pouvons penser que la déviation typique soit 1/6 du parcours (Yu Chuen Tao L.: 1974). Si nous égalons la variance à 1/36 (en utilisant la bêta normalisée), nous aurions l'équation:

$$\frac{p.q}{(p+q+1).(p+q)^2} = \frac{1}{36} \tag{12}$$

qui, avec l'équation de la mode normalisée, constitue un système de deux équations dont les inconnues sont p et q. Ce système n'est pas commode pour résoudre, parce qu'il conduit à une équation cubique "fâcheuse" (Romero: 1991) et, pour cela, en ignorant l'équation de la mode, on y considére les solutions [6] et [7] de l'équation antérieure (voir Kauffman et Dezbazeille: 1965).

Une autre façon d'arriver aux solutions antérieures est utiliser les relations simplificatrices suivantes apportées par Suárez (1980):

$$p + q = 6 \quad \text{et} \quad \frac{p.q}{p+q+1} = 1 \tag{13}$$

Définitivement, c'est impossible d'estimer la bêta avec les trois questions que l'expert apporte (parce que celle-ci a quatre paramètres).

D'une autre part, en paramètrisant les équations antérieures (en appelant $k = p+q-2$), on peut reexposer le problème que nous sommes en train de voir. Si nous faisons les calculs nécessaires, on obtient:

$$p = 1+\frac{m-a}{b-a}, \qquad q = 1+\frac{b-m}{b-a} \tag{14}$$

en arrivant postérieurement (voir Golenko-Ginzburg: 1988 et Herrerías: 1989) aux suivantes expressions pour la moyenne et la variance:

$$m = \frac{a+km+b}{k+2} \tag{15}$$

$$s^2 = \frac{(m-a).(b-m)}{k+3}$$

$$s^2 = \frac{k^2.(m-a).(b-m)+(k+1).(b-a)^2}{(k+3).(k+2)^2} \tag{16}$$

Comme $p > 1$ et $q > 1$, c'est évident que k variera dans l'intervalle $(0, ¥)$ et, ainsi, pour des valeurs données de a et b et pour une valeur donnée de la mode m, il y a, pour chaque valeur de k comprise entre zéro et l'infini, une distribution bêta différente.

Índice Índice de autores

Nous pouvons exposer le problème dans les suivants termes: C'est impossible d'estimer les quatre paramètres de la distribution bêta (a, b, p et q) en partant des trois estimations apportées par l'expert (pessimiste, optimiste et plus probable).

Donc, on a besoin de plus d'information pour déterminer ces quatre paramètres et cette information additionnelle on peut la chercher par deux chemins: Avec des hypothèses simplificatrices, comme c'est le cas du PERT classique (voir Sasieni: 1986, Littlefield et Randolph: 1987 et Suárez: 1980) ou en obtenant une plus grande information de l'expert. Dans cette ligne, on peut citer les travaux de Chae Kim (1990), Moitra (1990), Herrerías et Pérez (1991), Herrerías (1995), Pérez (1995), Herrerías et Pérez (1996) et Herrerías et García (1996). Nous devons ajouter que la difficulté de ce chemin réside dans: "les questions à formuler à l'expert devoient réunir un équilibre entre une interprétation très intuitive, ce que fait possible l'obtention de réponses fiables, et une commode incorporation de l'information, ainsi obtenue, dans l'armature théorique de la distribution bêta".

Donc, nous sommes face à un problème qu'on peut exposer dans des termes algébraiques très simples: Qu'est-ce que nous pouvons faire, dans un cas concret d'application de la méthode PERT, pour choisir une valeur de k qui déterminera une distribution bêta particularisée à notre problème duquel nous connaissons déjà a, b et m ? Le problème serait résolu d'une manière simple si on pourrait demander directement à l'expert, mais ce paramètre (k), malheureusement, ne réunit pas les conditions désignées dans le paragraphe antérieur.

Índice Índice de autores

2. LA MÉTHODE D'ENCHÈRE

Herrerías et García (1996) présentent la méthode connue comme *méthode d'enchère* dans laquelle on propose de demander à l'expert une "valeur d'enchère" s (temps dans tâches, flux de caisse dans investissements, etc.) qui, avec les valeurs pessimiste, optimiste et plus probable (a, b et m), qu'on connaît déjà, nous permettent, à travers la suivante équation, d'obtenir la valeur de k et, en conséquence, de particulariser la bêta du PERT. La méthode employée est la suivante: on demande à l'expert de parier par une valeur concrète s, à laquelle on appele valeur d'enchère, et ceci s'égale à la moyenne:

$$(a + k.m + b)/(K + 2) = s \tag{17}$$

Cette équation nous permettra d'obtenir la valeur de k qui, avec a, b et m, particularise une distribution bêta qui est celle que nous allons employer dans notre problème concret.

Comme nous pouvons voir, dans la méthode PERT classique, la valeur d'enchère est toujours la donnée dans [18], c'est à dire, $k = 4$:

$$s = \frac{a + 4m + b}{6} \tag{18}$$

Logiquement, l'enchère choisie dans le PERT classique est comprise toujours entre $(a+b)/2$ et m pour quiconque valeurs de a, b et m. Dans le travail de Herrerías et García (op. cit.) on y démontre:

PROPOSITION 2.1

Si s ¹ m et $m \neq (a+b)/2$, alors s doit se trouver dans un des suivants intervalles ouverts: $(a+b)/2 < s < m$ or $m < s < (a+b)/2$ à fin de que la méthode d'enchère soit consistante. Si $m = (a+b)/2$, alors nous serions en présence de la bêta symétrique.

PROPOSITION 2.2

Etant donnés a, b et m, la fonction $k = f(s)$ est définie dans l'intervalle $(m,(a+b)/2)$, si $m < (a+b)/2$ or dans l'intervalle $((a+b)/2, m)$, si $m > (a+b)/2$. C'est une fonction continue dans tout l'intervalle de définition. En plus, c'est une fonction croissante dans l'intervalle de définition si $m > (a+b)/2$ et décroissante si $m < (a+b)/2$.

Índice
Índice de autores

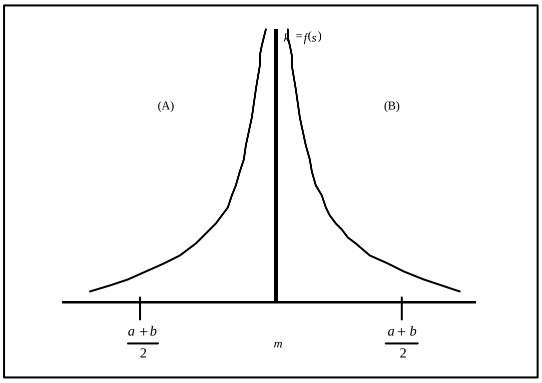

Figure 2: Représentation de k en fonction de s. Des cas posibles.

PROPOSITION 2.3

Quand s s'approche à $(a+b)/2$, la variance de la bêta particularisée par l'enchère (qui vient donnée par l'équation (19)) s'approche à celle de l'uniforme des valeurs a et b. Quand s s'approche à m, la variance de la bêta particularisée par l'enchère s'approche à zéro. La variance en fonction de s vient donnée par:

$$\sigma^2(s) = \frac{\left(\frac{2s-(a+b)}{m-s}\right)^2 (m-a)(b-m) + \left(\frac{2s-(a+b)}{m-s}+1\right)(b-a)^2}{\left(\frac{2s-(a+b)}{m-s}+3\right)\left(\frac{2s-(a+b)}{m-s}+2\right)^2} \tag{19}$$

d'où nous obtenons:

$$\lim_{s\to m} \sigma^2(s) = 0, \qquad \lim_{s\to\frac{a+b}{2}} \sigma^2(s) = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{20}$$

Ce resultat peut être obtenu d'une manière plus élémentaire si nous partons de l'expression (16) et des valeurs de k en fonction de s.

Donc, quand la valeur d'enchère s'approche à la valeur $(a+b)/2$, la variance de la bêta particularisée s'approche à la variance de la distribution rectangulaire uniforme, c'est à dire, l'effet de que la valeur d'enchère s'approche à $(a+b)/2$ est que l'expert, quand il doit parier pour une valeur, il ne confie pas à la valeur plus probable, donnée par lui-même, et il choisit la valeur moyenne, nous conduisant, de cette manière, à une variance similaire comme si nous aurions estimé une distribution uniforme, en se passant de la valeur plus probable dans laquelle l'expert démontre n'avoir aucune confiance ($k = 0$).

D'autre part, quand l'expert choisit la valeur plus probable comme valeur d'enchère, ce qu'il fait c'est réaffirmer sa confiance absolue dans cette valeur et, en conséquence, la variance de la bêta particularisée se fait zéro et la distribution dégénére.

En plus, la variance est une fonction croissante ou décroissante de la valeur d'enchère, selon que l'expert situe la mode au dessus ou au dessous du point moyen de l'intervalle (a,b); c'est à dire, si $(a+b)/2 < m$, alors pour tout $s \in ((a+b)/2, m)$, se vérifie $d\sigma^2/ds < 0$. Si $(a+b)/2 > m$, alors pour tout $s \in (m, (a+b)/2)$, se vérifie $d\sigma^2/ds > 0$.

La variance de la bêta particularisée sera bornée supérieurement par la variance de la distribution uniforme correspondante aux valeurs a et b. En définitive, l'expert devra parier pour une valeur d'enchère qui sera comprise entre la valeur moyenne et la valeur plus probable.

À mesure que la valeur par laquelle a parié l'expert s'approche à la valeur moyenne, la variance de la bêta particularisée s'acroissera (dans tous cas) vers la valeur de la variance de la distribution uniforme et à mesure que la valeur d'enchère

Índice

Índice de autores

s'approche à la valeur plus probable (dans n'importe quel cas), la variance diminuera et elle s'approche à zéro.

Comme nous pouvons voir, à travers de la variance de la bêta particularisée, on peut obtenir un index de la confiance que l'expert a dans la valeur plus probable apportée par lui-même.Cette confiance sera plus grande à mesure que la variance de la bêta particularisée soit moindre et, étant plus petite la confiance, la variance de la bêta particularisée sera plus grande.

Cet index pourrait se construire en divisant la variance de la bêta particularisée par celle de la distribution uniforme et il pourrait être exprimé en tant pour cent.

Ainsi, un index du 100% signifierait une défiance totale dans la valeur plus probable et un index d'un 0% signifierait une confiance totale, c'est à dire, à mesure que l'index diminue, la confiance augmente. Parce que c'est dans cette confiance de l'expert où nous voulons trouver la demande qui nous permet de spécifier une bêta pour le problème.

Berny (1991) nous présente une fonction pour l'analyse du risque où l'on demande à l'expert quelle est la probabilité de surpasser la mode. Ainsi, comme la quatrième demande dans la méthodologie PERT, nous allons demander quelle est la confiance qu'il peut déposer dans son estimation de la valeur modale.

D'ici nous allons obtenir la défiance *I*:

Índice Índice de autores

$$I = \frac{variance\ de\ la\ bàta\ particularisÇe\ par\ l'enchäre}{variance\ de\ la\ distribution\ uniforme}. \tag{21}$$

3. LA CONFIANCE DE L'EXPERT. SON INCORPORATION AU MODÈLE

En définitive, la quatrième demande que nous incorporerons au modèle sera la relative à la sécurité ou la confiance que l'expert dépose dans la valeur plus probable apportée par lui-même. Ainsi, en faisant le changement de variable:

$$t = \frac{x - a}{b - a}$$

et en utilisant les expressions (16) et (19), nous pouvons obtenir:

$$\frac{\boldsymbol{s}^2(s)}{\boldsymbol{s}^2(uniforme)} = I = \frac{(1+km).(k+1+km)/(k+2)^2.(k+3)}{1/12} \tag{22}$$

où $k > 0$, m **Î** $(0,1)$ et I **Î** $(0,1)$. En réalisant les transformations convenables, il resterait la suivante équation cubique:

$$k^3 + \left[\frac{7I - 12(m - m^2)}{I}\right]k^2 + \frac{16I - 12}{I}k + \frac{12I - 12}{I} = 0 \tag{23}$$

La première chose que nous devons vérifier est que chaque fois que l'expert nous donne une valeur de sa confiance, exprimée en tant pour un, valeur que nous appelerons *D*, il reste déterminée une unique valeur de *k* qui nous permet d'obtenir une bêta particularisée pour le cas concret (durée d'une tâche, flux de caisse d'une inversion, etc.).

PROPOSITION 3.1.

Donnée la confiance de l'expert *D* ***Î*** *[0,1]* (ce qui, évidemment, détermine la défiance *I = 1 - D*), la cubique [23] a une unique solution de *k*, pour quelconque valeur de *m* ***Î*** *(0,1)*.

Démonstration. On devra établir que la cubique [23] a, pour quelconque *m* ***Î*** *(0,1)* et *I* ***Î*** *(0,1)*, une unique racine positive de *k*. Compte tenu qu'elle [23] a comme coefficient principal 1 et comme terme indépendant un numéro négatif, en utilisant le Théorème Fondamental de l'Algèbre, on pourra conclure qu'il y a les suivantes possibilités quant aux racines de l'équation (23)

a) Deux racines complexes conjuguées et une réelle positive.
b) Trois racines réelles positives.
c) Deux racines négatives et une positive.

Ce qui réduit la démonstration à établir que b) ne peut pas succéder. Pour cela, nous recourirons à la règle connue des signes de Descartes: "Le número de racines positives d'un polynome avec coefficients réels coincide avec le numéro d'alternances ou le moindre dans un numéro pair".

Índice
Índice de autores

Comme le signe du coefficient principal (+) et celui du terme indépendant (-) sont connus, l'unique possibilité serait:

a_0	a_1	a_2	a_3
+	-	+	-

On peut voir que

$$a_2 < 0 \_ \frac{16I - 12}{I} < 0 \_ I < \frac{4}{5}, \quad \text{et}$$

$$a_1 > 0 \_ 7I - 12m(1- m) > 0 \_ I > \frac{12m(1- m)}{7}$$

c'est à dire, si

$$I > \frac{12.0{,}25}{7}$$

alors $a_1 > 0$.

En définitive, si l'on donne une de ces deux options: *I < 4/5* or *I > 3/7*, les trois alternances ne pourront pas se produire et l'option b) ne sera pas possible. Comme, pour tout *I* ***Î*** *(0,1)*, on y vérifie que *I < 4/5* ou *I > 3/7*, parce que *3/7 < 4/5*, l'énoncé de la proposition reste démontré.

Nous nous demandons maintenant si toute confiance D est compatible avec le modèle classique du PERT. Pour cela, rappelons-nous que ce modèle attribue à k la valeur 4. Si on part de cette valeur pour k, nous pourrons établir la suivante

PROPOSITION 3.2

(Modèles compatibles avec le PERT classique). Si nous prenons $k = 4$, comme on fait dans le PERT classique, l'équation (23) détermine une relation entre I et m, à partir de laquelle on y déduit que la confiance sera dans l'intervalle $[12/21,16/21]$.

Démonstration. Si on fait $k = 4$, l'équation (23) restera:

$$I = \frac{16m(1-m)+5}{21} \tag{24}$$

avec $m \in (0,1)$ et $I \in (0,1)$, qui est une parabole dont le sommet est $V(1/2,9/21)$.

Donc, $I \in [5/21,9/21]$ et, ainsi, $D \in [12/21,16/21]$, comme nous voulions démontrer.

Dans le PERT classique (voir Sasieni: 1986 et Herrerías: 1989), en donnant à p et q les valeurs [6] et [7], la mode $m = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$ reste déterminée et c'est pour ça que la défiance $I = 41/168$ et la confiance $D = 127/168$ restent déterminées aussi.

Índice
Índice de autores

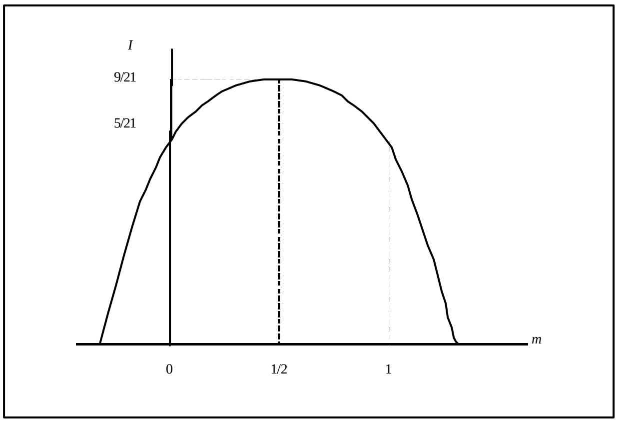

Figure 3: *Représentation de I en fonction de m. PERT classique.*

D'autre part, chaque valeur de k détermine une valeur maximale et minime de défiance I qui dépendra de m. A continuation, voyons ce qui succéde généralement.

Si, dans [23], on y dégage I, il reste (en supposant $I \neq 0$):

$$I = 12\frac{k^2(m-m^2)+k+1}{(k+2)^2(k+3)} \tag{25}$$

On peut démontrer que:

$$\frac{dI}{dm} = 12\frac{k^2(1-2m)}{(k+2)^2(k+3)} \tag{26}$$

ce qui permet d'établir que, pour tout k, l'équation [25] est une parabole à I et m qui a le sommet dans le point $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{k+3}\right)$ et prend la valeur $12\frac{k+1}{(k+2)^2(k+3)}$ pour $m=0$ et $m=1$

Généralement, l'intervalle de défiance viendra donné par $\left(12\frac{k+1}{(k+2)^2.(k+3)},\frac{3}{k+3}\right)$ et son ampleur sera:

$$A = \frac{3}{k+3} - 12\frac{k+1}{(k+2)^2.(k+3)} = \frac{3k^2}{(k+2)^2.(k+3)} \tag{27}$$

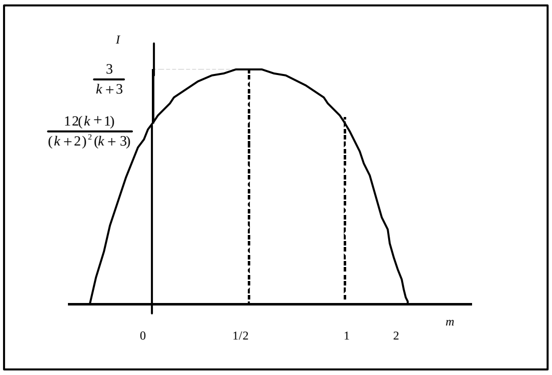

Figure 4: Représentation générale de I en fonction de m.

Si nous dérivons (27) par rapport à k:

$$\frac{dA}{dk} = -3\frac{k^2-2k-12}{\left[(k+2)^2.(k+3)\right]^2} \tag{28}$$

d'où on peut conclure que l'ampleur maximale de I est pour la valeur $k = 1+\sqrt{13}$. Pour $k = 4$ du PERT classique, l'ampleur de I est $4/21$.

En plus, cette quatrième demande qui permet d'ajuster le PERT peut être répondue par l'expert avec les suivantes:

a) Valeur minime du flux de caisse a.
b) Valeur maximale du flux de caisse b.
c) Valeur plus probable du flux de caisse m.

Índice
Índice de autores

d) Confiance de l'expert pour que la valeur soit *m*, exprimée en tant pour un, *D*.

Tenant compte de ce que Karsenti (1996) a établi, cette confiance pourrait être établie par les actionnaires et, de cette façon, la méthode ici exposée pourrait être utile pour modeler l'opinion de l'expert et réaliser un ajustement de la même à l'heure de l'introduction dans le modèle.

*EXEMPLE***.**

Considérons que nous sommes en train d'évaluer une entreprise par la méthode des cash-flows actualisés (DCF) et que, pour une période déterminée, on attend les suivantes valeurs: $a = 40$, $b = 80$ et $m = 65$. Si nous utilisions le PERT classique, nous aurions, pour cette periode, une valeur espérée $(40 + 4.65 + 80)/6 = 63{,}333...$ et une variance $(80 - 40)^2/36 = 44{,}444....$

Si la confiance des actionnaires dans l'expert était du 74%, alors nous aurions $I = 0{,}26$, la transformation donnerait:

$$m' = \frac{m - a}{b - a} = \frac{65 - 40}{80 - 40} = 0{,}375$$

et la cubique (23) resterait:

$$k^3 - \frac{397}{104}k^2 - \frac{392}{13}k - \frac{444}{13} = 0,$$

dont l'unique solution positive peut être à peu près $k = 8{,}075$.

Índice
Índice de autores

En utilisant (15) et (16), nous obtendrions maintenant la valeur espérée et la variance de la bêta particularisée:

$$m = \frac{40 + 8{,}075.65 + 80}{8{,}075 + 2} = 64$$

$$s^2 = \frac{8{,}075.(65 - 40).(80 - 65) + 9{,}075.(80 - 40)^2}{(11{,}075).(10{,}075)^2} = 34{,}6$$

Nous voyons comme l'incorporation de la confiance dans le modèle a augmenté la valeur espérée et a diminué la variance. Donc, la confiance proposée par l'expert, les actionnaires ou le milieu de l'entrepreneur devient un facteur décisif à l'heure d'ajuster la bêta à chaqu'un des flux de caisse et, en définitive, pour établir la valeur de l'entreprise.

4. CONCLUSIONS

D'abord, nous devons remarquer que cette façon d'incorporer la confiance dans le modèle est différente à celle qu'on obtiendrait si nous considérons la formule (15) comme une combination convexe des trois données du PERT classique: en égalant la confiance à la valeur $K/(K + 2)$ qui pondére la plus probable, parce que cette méthode de pondération fixe une valeur de *k* quelqu'il soit la valeur modale apportée m par l'expert, tandis que dans la méthode proposée dans ce travail, la valeur de k dépend de m et de k, c'est à dire, dans le modèle qu'on propose, les différentes valeurs de la mode donnent lieu à différentes valeurs de k pour une même confiance.

Si nous établissons une confiance d'un 60%, la première méthode conduirait à

$$0{,}6 = K/(K+2)\text{, c'est à dire, } k = 3,$$

tandis que, en suivant ce qu'on propose dans ce travail, c'est à dire, $D = 0{,}6$ ou $I = 0{,}4$, il resterait l'équation:

$$k^3 + \frac{2{,}8 - 12.(m - m^2)}{0{,}4} k^2 + \frac{6{,}4 - 12}{0{,}4} k + \frac{4{,}8 - 12}{0{,}4} = 0$$

c'est pour ça que k dépendrait de m.

D'autre part, si dans le PERT classique nous considérons $k = 4$ et nous relâchons l'autre exposé pour que m puisse être entre 0 et 1 (voir Herrerías: 1989), la confiance devra être entre 12/21 et 16/21. Donc, la méthode classique ne serait pas utilisable pour établir la valeur d'une entreprise quand la confiance de l'expert soit hors de l'intervalle (12/21,16/21), tandis que la méthode proposée dans ce travail serait utilisable toujours même dans le cas où la confiance soit très proche au 100% ou au dessous du 50%.

Nous considérons que cette méthode, qui permet d'incorporer, dans le modèle d'évaluation d'une entreprise (DCF), la confiance qu'on peut déposer dans l'information, serait utilisable dans des situations de conflit dans le moment d'évaluer une entreprise.

En définitive, compte tenu que dans la pratique financière on introduit, de plus en plus, le concept de "fairness opinions", nous pensons que, en dehors d'autres considérations légales, le modèle proposé pourrait être d'utilité pour obtenir des compromis d'accords dans l'évaluation d'une entreprise.

Índice
Índice de autores

BIBLIOGRAPHIE

BERNY, J. (1989): *A new distribution function for risk analysis*. J. Op. Res. Soc., Núm. 40, pp. 1121-1127.

CHAE, K. C. ET KIM, S. (1990): *Estimating the mean and variance of PERT activity using likelihood-ratio of the mode and the midpoint*. I.I.E. Transaction, Vol. 22, Núm. 3, pp. 198-203.

CLARK, C. E. (1962): *The PERT model for the distribution of an activity time*. Operation Research, Vol. 10, Núm. 3, pp. 405-406.

DUMAS DE RAULY, D. (1968): *L'estimation statistique*. Gauthier-Villars.

GOLENKO-GINZBURG, D. (1988): *On the distribution of activity time in PERT*. J. Op. Res. Soc., Vol. 39, Núm. 8, pp. 767-771.

GRUBBS, F. E. (1962): *Atempts to validate certain PERT statistic or picking a PERT*. Operations Research 10, pp. 912-915.

HERRERÍAS, R. (1989): *Utilización de modelos probabilísticos alternativos para el método PERT. Aplicación al análisis de inversiones*. Estudios de Economía Aplicada, pp. 89-112.

HERRERÍAS, R et PÉREZ, E. (1991): *Estimación de una distribución beta como modelo para su utilización en el método PERT*. Actas de la V Reunión Asepelt-España, pp. 1191-1199.

HERRERÍAS, R. (1995): *Un nuevo uso de las tres estimaciones subjetivas del PERT.* Actas de la IX Reunión Asepelt-España, Vol. IV, pp. 411-416.

LITTLEFIELD, T. K. ET RANDOLPH, P. H. (1987): *An answer to Sasieni's question on PERT times*. Management Science 33, pp. 1357-1359.

MACCRIMMON, K. R. ET RYAVEC, C. A. (1964): *An analytical study of the PERT assumptions.* Operation Research, Vol. 12, Num. 1, pp. 23.

MOITRA, S. D. (1990): *Skewness and the beta distribution*. J. Op. Res. Soc., Vol. 41, Núm. 109, pp. 953-961.

PÉREZ, E. (1995): *Ajuste de un modelo beta con información adicional sobre su apuntamiento*. Actas de la IX Reunión Asepelt-España, Vol. IV, pp. 445-452.

PULIDO, A.; GARCÍA, J. V. ET CORTIÑAS, G. (1964): *Un método de la I. O.: Teoría de grafos.* Anales de Economía, Núm. 7. Cet article est enfermé dans le livre de Doblado Burón, J. M. (1977): *Matemáticas para economistas / 2*. Confederación Española de Cajas de Ahorros, Madrid.

SASIENI, M. W. (1986): *A note on PERT times*. Management Science 32, pp. 1652-1653.

SUÁREZ, A. S. (1980): *Decisiones Optimas de inversión y financiación en la empresa*. Pirámide, Madrid.

TROUTT D. M. (1989): *On the generality of the PERT average time formula*. Decision Sciences, Vol. 20, pp. 410-412.

VAZSONYI, A. (1970): *L'histoire de grandeur et de la décadence de la méthode PERT*. Management Science, Vol. 16, Núm. 8, pp. 449-455.

Índice Índice de autores

Artículo publicado en 1998 en la Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa, vol. 7, nº 1, pp. 47-56