MARÍA LÓPEZ MARTÍNEZ.

4º A L.A.D.E.

EJERCICIO: USO DE LAS ECUACIONES NORMALES.

Sabemos que:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Además, también sabemos que:

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ x \\ 3 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se pide:

Estimar la varianza de la perturbación aleatoria y la matriz de covarianzas del modelo.

$X' \bar{e} = \bar{0}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ x \\ 3 \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4+x+3+y+z=0 \\ 8+4x+18+3y+z=0 \\ 28+x+21+2y+5z=0 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x+y+z=-7 \\ 4x+3y+z=-26 \\ x+2y+5z=-49 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4\,(x+y+z=-7) \\ 4x+3y+z=-26 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} -4x-4y-4z=28 \\ \underline{4x+3y+z=-26} \\ -y-3z=2 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-7 \\ -(x+2y+5z=-49) \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} x+y+z=-7 \\ \underline{-x-2y-5z=49} \\ -y-4z=42 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} -y-3z=2 \\ -(-y-4z=42) \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} -y-3z=2 \\ \underline{y+4z=-42} \\ \mathbf{z=-40} \end{array}$$

$-y-3z=2 \Rightarrow -y-3(-40)=2 \Rightarrow -y+120=2 \Rightarrow$ **$y=118$**

$x+y+z=-7 \Rightarrow x+118-40=-7 \Rightarrow x+78=-7 \Rightarrow$ **$x=-85$**

Así, podemos determinar:

$$\overline{e} = \begin{pmatrix} 4 \\ -85 \\ 3 \\ 118 \\ -40 \end{pmatrix}$$

Para estimar la varianza de la perturbación aleatoria ponemos los residuos al cuadrado:

$SCR = \sum e_i^2 = 4^2 + (-85)^2 + 3^2 + 118^2 + (-40)^2 = 22774$

Para estimar la matriz de covarianzas del modelo:

$\hat{\sigma}^2 = 22774/(n-k) = 22774/(5-3) = 11387$

$\widehat{Cov}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1}$

$$(X'X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 6 & 3 & 1 \\ 7 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 16 & 22 \\ 16 & 66 & 71 \\ 22 & 71 & 128 \end{pmatrix}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 66 & 71 \\ 71 & 128 \end{vmatrix} = 3407$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 16 & 71 \\ 22 & 128 \end{vmatrix} = -486$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 16 & 66 \\ 22 & 71 \end{vmatrix} = -316$$

$A_{22} = \begin{vmatrix} 5 & 22 \\ 22 & 128 \end{vmatrix} = 156$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 16 & 66 \end{vmatrix} = 74$

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 5 & 16 \\ 22 & 71 \end{vmatrix} = -3$

POR LO TANTO:

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{2307}\begin{pmatrix} 3407 & -486 & -316 \\ -486 & 156 & -3 \\ -316 & -3 & 74 \end{pmatrix}$$

Así, podemos estimar la MATRIZ DE COVARIANZAS:

$\widehat{Cov}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2 (X'X)^{-1} =$

$$= 11387 \frac{1}{2307}\begin{pmatrix} 3407 & -486 & -316 \\ -486 & 156 & -3 \\ -316 & -3 & 74 \end{pmatrix}$$