Tema 8.4: Teorema de Runge. Aproximación de funciones holomorfas por funciones racionales

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Sabemos que las funciones holomorfas se pueden expresar localmente como límite de sucesiones de polinomios; esto es lo que nos dice el teorema de Taylor:

$$f(z) = \lim \sum_{k=0}^{n} a_k (z-a)^k, \qquad z \in D(a,r);$$

es decir, $\overline{\mathcal{P}(D(a,r))} = \mathcal{H}(D(a,r))$.

Este tema lo vamos a culminar comprobando que la propiedad de simplemente conexo sobre el abierto Ω caracterizará el hecho de que la clase $\mathcal{P}(\Omega)$ de los polinomos (restringidos) sobre Ω es densa en la clase $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en Ω: se añadirá una equivalencia más al corolario al teorema de Riemann de Representación Conforme.

El caso general en el que Ω sea un abierto arbitrario, tiene una respuesta negativa: la unicidad de la representación en series de Laurent sobre abiertos nos expone, bien a las claras, este hecho. Lo que sí que nos permite afirmar el desarrollo en series de Laurent es que $\overline{\mathcal{R}(\Omega)} = \mathcal{H}(\Omega)$, cuando el abierto Ω es un anillo.

Este tema se dedicará a probar que, en el caso general, cuando Ω es un abierto arbitrario, toda función holomorfa en él será límite de una sucesión de funciones racionales: es el llamado teorema de Runge.

Entre los polos de una función racional habremos de considerar la posibilidad de que lo sea también el punto ∞. (¡Ay de los polinomios si así no fuese!)

Comenzamos con un resultado que ya va a reflejar, a primera vista, el teorema de la fórmula fundamental de Cauchy en este tema... ¡y aún no habremos supuesto condiciones de holomorfía sobre la función f! Así mismo, es de destacar el papel (callado) que juega la integral de Riemann-Stieltjes en la demostración que se da de este hecho. Se trata de un primer resultado de aproximación sobre compactos de funciones holomorfas por funciones racionales:

Lema 1. Sean Γ un ciclo, un abierto $\Omega \supset \Gamma^*$, una función f continua en Γ^*, un compacto K tal que $K \cap \Gamma^* = \emptyset$, y $\varepsilon > 0$. Entonces existe una función racional R en Ω cuyos polos están todos en Γ^* y tal que

$$\left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - R(z) \right| < \varepsilon, \forall z \in K.$$

Demostración. No hay pérdida de generalidad si nos restringimos a considerar curvas Γ (pongamos, sobre $[a,b]$) en vez de ciclos.

Por argumentos de continuidad (uniforme) de la función

$$(w,z) \in \Gamma^* \times K \longrightarrow \frac{f(w)}{w-z}$$

sobre el compacto $\Gamma^* \times K$, existe $\delta > 0$ tal que

$$w, w' \in \Gamma^*, |w - w'| < \delta \implies \left| \frac{f(w)}{w-z} - \frac{f(w')}{w'-z} \right| < \varepsilon / \operatorname{long}(\Gamma^*), \forall z \in K.$$

Análogos argumentos, ahora por la continuidad (uniforme) de la curva Γ en $[a,b]$, existe $r > 0$ tal que

$$x, x' \in [a,b], |x - x'| < r \implies |\Gamma(x) - \Gamma(x')| < \delta.$$

Sea una partición de $[a,b]$ dada por

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b : |x_{k-1} - x_k| < r.$$

Y podemos definir ahora una función racional de la siguiente manera:

$$R(z) := \sum_{k=1}^{n} [\Gamma(x_k) - \Gamma(x_{k-1})] \frac{f(\Gamma(x_{k-1}))}{\Gamma(x_{k-1}) - z}.$$

En particular, se tiene que R es una función racional con todos sus polos en Γ^*. Además, para cada $z \in K$:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw - R(z) \right| = \\
= & \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(\Gamma(x))}{\Gamma(x) - z} \Gamma'(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \frac{f(\Gamma(x_{k-1}))}{\Gamma(x_{k-1}) - z} \Gamma'(x)\, dx \right| \\
\leq & \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} \left| \frac{f(\Gamma(x))}{\Gamma(x) - z} - \frac{f(\Gamma(x_{k-1}))}{\Gamma(x_{k-1}) - z} \right| |\Gamma'(x)|\, dx \\
\leq & \frac{\varepsilon}{\operatorname{long}(\Gamma)} \int_a^b |\Gamma'(x)|\, dx = \varepsilon. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Notemos que los polos de la función racional que aproxima a la función holomorfa en el compacto pueden estar en el abierto. Necesitamos "desplazarlos", de modo que éstos queden fuera de dicho abierto.

Comenzamos con un resultado topológico... que aparece "inocentemente":

Lema 2. Sean U y V dos abiertos del plano tales que $V \subset U$ y $\partial V \cap U = \emptyset$. Si H es componente conexa de U tal que $V \cap H \neq \emptyset$, entonces $H \subset V$.

Demostración. Sea $x \in V \cap H$ y consideremos G la componente conexa de V tal que $x \in G$. El objetivo es, pues será condición suficiente, probar que $G = H$.

Claramente $G \subset H$, pues H es el mayor conexo en U tal que $x \in H$. Por otro lado, podemos escribir

$$H = G \cup (H \backslash G) = G \cup \left[(\partial G \cap H) \cup \left(H \backslash \overline{G} \right) \right].$$

Pero $\partial G \cap H = \emptyset$, a consecuencia de que $\partial V \cap U = \emptyset$; luego

$$H = G \cup \left(H \backslash \overline{G} \right),$$

de donde el conexo H se expresa como reunión disjunta de dos abiertos: como $G \neq \emptyset$ se sigue que $H \backslash \overline{G} = \emptyset$ y, por tanto, $H = G$. ■

Ahora necesitamos un poco de notación.

Dado un compacto K del plano, por S vamos a denotar a cualquier subconjunto de $\overline{\mathbb{C}} \backslash K$ tal que contenga, al menos, un punto de cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \backslash K$. Definamos

$$R_S(K) := \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C} : f_{|K} \text{ racional en } K \text{ con sus polos en } S \right\}$$

y sea $B_S(K)$ su cierre en el espacio $\mathcal{C}(K)$ de las funciones continuas en respecto de la convergencia uniforme. (Notemos que está permitido $\infty \in \Omega$.) Claramente, se trata de un álgebra de funciones; esto es, es cerrada para la suma y el producto de sus elementos (y, por ende, para el producto externo por constantes).

Lema 3. Si K es un compacto del plano y $\alpha \in \mathbb{C} \backslash K$, entonces la función

$$z \xrightarrow{\varphi_\alpha} \frac{1}{z - \alpha}$$

está en $B_S(K)$.

Demostración. Llamemos

$$V := \{ \alpha \in \mathbb{C} \backslash K : \varphi_\alpha \in B_S(K) \}.$$

Consiste en probar que, de hecho, $V = \mathbb{C} \backslash K$. Ésto lo conseguiremos probando que:

1^o V es abierto.

2^o $\infty \in S, R := \max \{ |z| : z \in K \} \implies A(0; R, +\infty) \subset V$.

3^o $\partial V \subset K$.

El tercer paso nos dice que V no tiene puntos de frontera en $\mathbb{C} \backslash K$; luego V es abierto y cerrado en $\mathbb{C} \backslash K$. Si C es componente conexa de $\mathbb{C} \backslash K$, entonces $V \cap C$ es (abierto y) cerrado en C. Por tanto, o bien $C \subset V$, o bien $C \cap V = \emptyset$. Y, por tanto, bastará probar que V corta todas las componentes conexas de $\mathbb{C} \backslash K$.

En efecto, si $\alpha \in S$, $\alpha \neq \infty$, entonces la función $\varphi_\alpha(z) := \frac{1}{z - \alpha}$ es racional en K con sus polos en S. Pero estas funciones están en su cierre: $R_S(K) \subset B_S(K)$.

Por tanto, $\alpha \in V$. Si C es una componente conexa acotada de $\mathbb{C}\backslash K$, entonces también lo es de $\overline{\mathbb{C}}\backslash K$. Y S contiene un punto de C (que, según acabamos de ver, está en V); luego V corta a C. Si C es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\backslash K$, entonces $C\cup\{\infty\}$ es la componente conexa no acotada de $\overline{\mathbb{C}}\backslash K$. Entonces vale el razonamiento anterior, salvo que el único punto de $C\cup\{\infty\}$ que esté en V sea ∞. Pero, en dicho caso, sabemos por el segundo paso, que V contiene un anillo de la forma $A\,(0;R,+\infty)$, que contiene a los puntos de C.

Vamos, por tanto, con la prueba de los tres pasos arriba citados, para completar la demostración de este lema 3.

Primer paso: Sea $a \in V$, fijo pero arbitrario y sea $d := d\,(a,K) > 0$. Veamos que

$$D(a,d) \subset V,$$

y, en particular, tendremos que V es cerrado. Para $b \in D(a,d)$ y $z \in K$, se tiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-b} &= \frac{1}{(z-a)-(b-a)} = \frac{1}{z-a}\frac{1}{1-\frac{b-a}{z-a}} \\ &= \frac{1}{z-a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{b-a}{z-a}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(b-a)^n}{(z-a)^{n+1}} \end{aligned}$$

(obsérvese que se usa $\left|\frac{b-a}{z-a}\right| < \frac{d}{|z-a|} < 1$ para obtener convergencia en la serie). Por la unicidad del desarrollo en serie de Laurent, se obtiene convergencia uniforme sobre los compactos del anillo $A\,(a;|b-a|\,,+\infty)$; en particular, convergencia uniforme sobre K.

Por las propiedades del álgebra $B_S\,(K)$ (cierre de $R_S\,(K)$ en $\mathcal{C}\,(K)$ respecto de la convergencia uniforme), para la expresión anterior de φ_b como límite, se tiene que $\varphi_b \in B_S\,(K)$, y, por tanto, $b \in V$.

Segundo paso: si $a \in A\,(0;R,+\infty)$ y $z \in K$:

$$\frac{1}{z-a} = -\frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{z}{a}} = -\frac{1}{a}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{a^{n+1}}$$

(donde ahora se ha hecho uso del hecho de que $\left|\frac{z}{a}\right| \leq \frac{R}{|a|} < 1$). Esta serie converge en $D\,(0,|a|)$, luego lo hace uniformemente en K. Las sumas parciales en la serie anterior son polinomios (con polo en $\infty \in S$), luego están en $R_S\,(K)$; y, por tanto, su límite estará en $B_S\,(K)$.

Tercer paso: Supongamos que existe algún $a \in \partial V$ tal que $a \notin K$. Tomemos $d := d(a,K) > 0$ para nuestros fines. Ha de existir, por tanto, algún $b \in D(a,\frac{d}{2}) \cap V$ tal que

$$a \in D\left(b,\frac{d}{2}\right) \subset D(a,d) \subset \mathbb{C}\backslash K,$$

luego $d(b,K) \geq \frac{d}{2}$, y por el primer paso, concluimos

$$D\left(b,\frac{d}{2}\right) \subset V,$$

de donde $a \in V$. Pero que V sea abierto impide que $a \in V \cap \partial V$. En conclusión, $\partial V \subset K$. ■

Teorema (de Runge). Sean Ω un abierto del plano $\mathbb{C}$, una función f holomorfa en Ω y $K \subset \Omega$ un compacto. Sea un conjunto $E \subset \overline{\mathbb{C}} \backslash K$ tal que contenga, al menos, un punto de cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \backslash K$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$ existe una función racional R cuyos polos están en E y tal que

$$|f(z) - R(z)| < \varepsilon, \forall z \in K.$$

Demostración. Podemos usar la descomposición de funciones racionales mediante fracciones simples y, entonces, el lema 3 nos dice que cualquier función racional con polos en S está en $B_S(K)$. Ahora, el teorema de Runge se sigue del lema 1. (Observemos que el lema 2 se usa para la prueba del lema 3.) **Q.E.D.**

El papel jugado por las funciones racionales en el teorema anterior no puede ser desarrollado por los polinomios. En ese caso se estará condicionando la naturaleza del abierto tal y como se nos dice en el siguiente:

Corolario. Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$. Son equivalentes:

i. Ω es simplemente conexo.

ii. $\mathcal{P}(\Omega)$ es densa en $\mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. i. $\Longrightarrow$ ii. Aplicamos el corolario al teorema de Riemann de representación conforme (iii. $\Longrightarrow$ xi.) y obtenemos que $\overline{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ es conexo. Sea $E := \{\infty\}$. Ahora, aplicando el teorema de Runge, obtenemos funciones racionales cuyo polo es, a lo sumo, ∞. Es claro que una tal función sólo puede ser un polinomio.

ii. $\Longrightarrow$ i. Si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ es límite de una sucesión de polinomios (p_n) en la topología uniforme sobre compactos, se sigue que

$$\int_\Omega f = \lim \int_\Omega p_n.$$

Pero, cada una de las integrales de esta sucesión es nula y, aplicando ahora v. $\Longrightarrow$ iii. del corolario al teorema de Riemann de representación conforme, se concluye la prueba (dada la arbitrariedad de f en $\mathcal{H}(\Omega)$). **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sean f y g dos funciones enteras. Sean, también, Ω_1 y Ω_2 dos dominios disjuntos del plano $\mathbb{C}$. Supongamos que uno de ellos, Ω_2 por ejemplo, es simplemente conexo y acotado. Prueba que, entonces, existe una sucesión (p_n) de polinomios uniformemente convergente sobre compactos de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ y tal que

$$\lim p_n(z) =: F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \Omega_1 \\ g(z), & z \in \Omega_2. \end{cases}$$

Considera el caso particular $\Omega_1 := \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$ y $\Omega_2 := \mathbb{D}$.

Prueba un caso particular del resultado anterior considerando la sucesión de funciones

$$f_n(z) := \frac{1}{1-z^n}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{T}.$$

2. Prueba que la serie funcional $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{1-z^n}$ converge uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N})$ a una función (holomorfa) f. Encuentra el desarrollo en serie de potencias de f en un entorno del origen.

3. Prueba que la serie funcional $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{z^{2^n} - z^{-2^n}}$ converge uniformemente sobre los compactos de $\mathbb{C}\backslash(\mathbb{T} \cup \{0\})$ a una función (holomorfa) f. Encuentra la tal funcón f.

   Los siguientes tres ejercicios (del 4 al 6) son bastante complicados. (Sus discusiones las puedes encontrar en el texto de Markushevich.)

4. Prueba que existen f y g dos funciones enteras y que existe una sucesión (p_n) de polinomios uniformemente convergente sobre los compactos del plano $\mathbb{C}$, tal que

$$\lim p_n(z) =: F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}) \\ g(z), & z \in \mathbb{Z} \times i\mathbb{Z}. \end{cases}$$

5. (Existencia de la función universal) Existe una función entera f tal que para cualquier dominio Ω acotado y simplemente conexo y cualquier finción holomorfa en él, $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$, existe $(n_k)_{k\geq 1}$ tal que la sucesión

$$f_k(z) := f(z + n_k)$$

   converge a φ uniformemente sobre los compactos de Ω.

6. Una función f definida en el disco unidad $\mathbb{D}$ se dice que tiene límite radial sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ si para cada $\theta \in [0, 2\pi[$

$$\exists \lim_{\rho\to 1^-} f\left(\rho e^{i\theta}\right) \in \mathbb{C}.$$

   Prueba que existen funciones holomorfas f en el disco unidad $\mathbb{D}$, pero sin límite radial en ningún punto de la circunferencia unidad $\mathbb{T}$.

   Con los dos siguientes ejercicios puedes obtener otra reformulación del Teorema de Runge.

7. Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$. Para cada natural n, se definen los conjuntos siguientes:

$$K_n := \overline{D(0,n)} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - w| \geq \frac{1}{n}, \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega \right\}.$$

   Prueba que:

i. Los conjuntos K_n son compactos.

ii. Para cada n, se tiene que $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}$.

iii. Para cada compacto $K \subset \Omega$, existe un natural m tal que

$$K \subset K_{m+p}, \forall p \in \mathbb{N}.$$

iv. Cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus K_n$ contiene una componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$.

8. Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y sea un conjunto $S \subset \overline{\mathbb{C}}$ tal que contiene, al menos, un punto de cada componente conexa de $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Omega$. Prueba que si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces existe una sucesión (R_n) de funciones racionales con sus polos en S uniformemente convergente sobre los compactos de Ω a la función holomorfa f.