Tema 8.3: Teorema de Riemann (fundamental) de la Representación Conforme. Clasificación de los abiertos simplemente conexos del plano

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

En este tema se prueba que todo dominio simplemente conexo Ω del plano que no sea el propio plano ($\Omega \subsetneqq \mathbb{C}$) es isomorfo al disco unidad $\mathbb{D}$; es decir, que sólo existen (salvo isomorfismos conformes) dos dominios simplemente conexos en el plano complejo; a saber: el propio $\mathbb{C}$ y el disco unidad $\mathbb{D}$.

Este resultado será consecuencia de otro más "técnico" y, por supuesto, menos "transparente":

Teorema de Riemann. Sea Ω un dominio propio del plano complejo y sea $a \in \Omega$. Supongamos que las funciones holomorfas que no se anulen en Ω admiten raíz cuadrada holomorfa en él:

$$\varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : 0 \notin \varphi(\Omega) \Rightarrow \exists \psi \in \mathcal{H}(\Omega) : \psi^2 \equiv \varphi.$$

Entonces, existe un único isomorfismo conforme $F : \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $F(a) = 0$ y $F'(a) \in \mathbb{R}^+$.

Observemos que, una vez probado este resultado, tendremos que

Corolario. Dado Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$, son equivalentes:

- **i.** O bien $\Omega = \mathbb{C}$, o bien Ω es isomorfo a $\mathbb{D}$.
- **ii.** Ω es homeomorfo a $\mathbb{D}$.
- **iii.** Ω es simplemente conexo.
- **iv.** Ω es homológicamente conexo.
- **v.** $\int_\Gamma f = 0, \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \forall \Gamma$ ciclo en Ω.
- **vi.** $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F' \equiv f$ en Ω.
- **vii.** $\forall u \in \mathcal{A}(\Omega), \exists f \in \mathcal{H}(\Omega) : u \equiv \operatorname{Re} f$ en Ω.
- **viii.** $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega) : 0 \notin f(\Omega), \exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : e^g \equiv f$ en Ω.
- **ix.** $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega) : 0 \notin f(\Omega), \exists \varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : \varphi^2 \equiv f$ en Ω.
- **x.** $\mathbb{C} \backslash \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas.

xi. $\overline{\mathbb{C}} \backslash \Omega$ es conexo.

Demostración. Por el teorema de Riemann: ix. $\Rightarrow$ i., y serán equivalentes de i. a ix.: sabemos que, para Ω abierto, se tiene i. $\Rightarrow$ ii. $\Rightarrow$ iii. $\Rightarrow$ iv.; e igualmente conocido es, para Ω dominio, que iv. $\Leftrightarrow$ v. $\Leftrightarrow$ vi. $\Leftrightarrow$ vii. $\Leftrightarrow$ viii. $\Leftrightarrow$ ix.

Por tanto, dispondremos del siguiente hecho:

Corolario. Sea Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$. Entonces:

i. Todo dominio simplemente conexo Ω del plano $\mathbb{C}$ es homeomorfo al propio plano $\mathbb{C}$.

ii. Todo dominio simplemente conexo Ω del plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$, o bien es homeomorfo al plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$ o bien lo es al propio plano $\mathbb{C}$.

Veamos que x. $\Rightarrow$ iv. $\Rightarrow$ xi. $\Rightarrow$ x. en el corolario anterior, para concluir su prueba. Pero, la primera implicación es conocida; y la tercera es evidente: si $\mathbb{C} \backslash \Omega$ tuviese alguna componente conexa acotada, a los elementos de ésta no los podríamos conectar mediante arcos con ∞. Luego resta probar iv. $\Rightarrow$ xi.. Razonaremos por reducción al absurdo. Supongamos que existen A y B dos cerrados disjuntos de $\mathbb{C}$ tales que

$$\overline{\mathbb{C}} \backslash \Omega = A \cup B : A \neq \varnothing \text{ e } \infty \in B.$$

Observemos que A es compacto de $\mathbb{C}$ (pues si no estviese acotado, $\infty \in A' \subset \overline{A} = A$, de donde $A \cap B \neq \varnothing$; ¡contradicción!). Por ser $B \backslash \{\infty\}$ un cerrado de $\mathbb{C}$,

$$\exists r > 0 : D(a, r) \cap (B \backslash \{\infty\}) = \varnothing, \qquad \forall a \in A;$$

luego

$$\exists r > 0 : D(a, r) \cap B = \varnothing, \qquad \forall a \in A.$$

En resumen, y por ser, $\overline{\mathbb{C}} = \Omega \cup A \cup B$, se tiene que $\Omega \cup A$ es un abierto que contiene al compacto A.

Por fin, y usando el lema al teorema de Rouché, podemos construir un ciclo Γ en $(\Omega \cup A) \backslash A \subset \Omega$ tal que

$$\mathrm{Ind}_{\Gamma}(a) = 1, \qquad \forall a \in A,$$

de modo que Γ no es ciclo nulhomólogo respecto de Ω, y así es como Ω no puede ser homológicamente conexo. **Q.E.D.**

Aplicación. Un anillo y una banda no pueden ser isomorfos.

La estrategia de la prueba consistirá en ver que (a) los anillos no son simplemente conexos, mientras que sí que lo son las bandas; y que (b) no es posible establecer un isomorfismo entre dos dominios que sean uno simplemente conexo y el otro no. Concretamente, probaremos que la imagen de un dominio simplemente conexo en otro dominio por un isomorfismo conforme, es otro (dominio) simplemente conexo.

(a) Los anillos no son homológicamente conexos; mucho menos simplemente conexos.

Las bandas pueden estrellarse en cualquiera de sus puntos, luego cualquier curva cerrada en ella es homótopa a un punto; y así es como se prueba que una banda sea simplemente conexa.

(b) Sea φ un isomorfismo conforme del dominio simplemente conexo Ω_1 en el dominio Ω_2; y sea γ una curva cerrada en Ω_2. Así, $\widetilde{\gamma} := \varphi^{-1} \circ \gamma$ es otra curva cerrada en Ω_1. Pero entonces, si llamamos H a la homotopía que reduce a $\widetilde{\gamma}$ a un punto de Ω_1, $\varphi \circ H$ será la homotopía que reduce a γ a un punto de Ω_2. **Q.E.D.**

Demostración (del teorema de Riemann de representación conforme)... ¡AL FIN, EL FIN!

Unicidad: Sean F y G dos tales isomorfismos. Así, $G \circ F^{-1}$ será un automorfismo confome del disco unidad $\mathbb{D}$ que deja fijo el origen: el (corolario al) lema de Schwarz, nos dice que se ha de tratar de un giro:

$$\left[G \circ F^{-1}\right](z) = e^{i\theta} \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha} z} \text{ y } \alpha = 0 \Rightarrow \left[G \circ F^{-1}\right](z) = e^{i\theta} z.$$

Así,

$$e^{i\theta} = \left(G \circ F^{-1}\right)'(0) = G'\left(F^{-1}(0)\right)\left(F^{-1}\right)'(0) = \frac{G'(a)}{F'(a)} \in \mathbb{R}^+;$$

luego $e^{i\theta} = 1$, y, por tanto:

$$\left[G \circ F^{-1}\right](z) = z, \qquad \forall z \in \mathbb{D},$$

de donde la unicidad.

Existencia: la probaremos en tres etapas.

1^a etapa: Objetivo: Probaremos que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ e inyectiva, tal que $f(\Omega) \subset \mathbb{D}$, $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$.

Sea $b \in \mathbb{C} \backslash \Omega$ (que es no vacío, por hipótesis). La función $z \to z - b$ de Ω en $\mathbb{C}$ es holomorfa y no se anula: admite raíz cuadrada holomorfa:

$$\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : g^2(z) = z - b, \forall z \in \Omega.$$

Esta aplicación es inyectiva (pruébalo), lo que junto al hecho de que el abierto Ω sea conexo, nos permite asegurar que g es una aplicación abierta. Por ello:

$$\exists w_0 \in \mathbb{C}, \exists r > 0 : D(w_0, r) \subset g(\Omega);$$

y, como $0 \notin g(\Omega)$, $r \leq |w_0|$.

Comprobemos que $D(-w_0, r) \cap g(\Omega) = \varnothing$. Razonando por reducción al absurdo:

$$\begin{aligned} \exists w &\in D(-w_0, r) \cap g(\Omega) \Rightarrow w = g(z_1) : z_1 \in \Omega \\ &\Rightarrow -w \in D(w_0, r) \subset g(\Omega) \Rightarrow -w = g(z_2) : z_2 \in \Omega \\ &\Rightarrow z_1 - b = g^2(z_1) = w^2 = (-w)^2 = g^2(z_2) = z_2 - b \\ &\Rightarrow z_1 = z_2 \Rightarrow w^2 = 0 \Rightarrow w = 0, \end{aligned}$$

lo cual es contradictorio con el hecho de que g no se anule nunca. Luego la intersección es, efectivamente, vacía. En consecuencia,

$$|g(z) + w_0| \geq r, \forall z \in \Omega,$$

y definimos la función auxiliar $h : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$h(z) := \frac{r}{2(g(z) + w_0)}, \forall z \in \Omega.$$

Ocurre que $h \in \mathcal{H}(\Omega)$, $h(\Omega) \subset \mathbb{D}$ y h es inyectiva en Ω, que es dominio, luego $h'(a) \neq 0$.

Como la transformación de Möbius

$$\frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{z - h(a)}{1 - \overline{h(a)}z}, \forall z \in \mathbb{C}$$

es un automorfismo conforme del disco unidad, se concluye que la función

$$f(z) := \frac{|h'(a)|}{h'(a)} \frac{h(z) - h(a)}{1 - \overline{h(a)}h(z)}, \forall z \in \Omega$$

es la que nos permite un final exitoso en esta primera etapa. (En particular, se tiene $f'(a) = \frac{|h'(a)|}{1-|h'(a)|^2}$.)

2^a etapa: Con la etapa anterior logramos probar que la familia

$$\mathcal{F} := \{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f \text{ es inyectiva}, f(\Omega) \subset \mathbb{D}, f(a) = 0, f'(a) > 0\}$$

es no vacía. El objetivo, ahora: Probaremos que existe F en $\mathcal{F}$ tal que $F'(a) \geq f'(a)$, para toda f en $\mathcal{F}$.

El teorema de Montel nos garantiza que se trata de una familia normal; luego su cierre $\overline{\mathcal{F}}$ es un conjunto compacto en $\mathcal{H}(\Omega)$. Ahora, el teorema de convergencia de Weierstrass nos asegura que la aplicación

$$T : \mathcal{H}(\Omega) \to \mathbb{C}; \qquad T(f) := f'(a)$$

es continua. Y como $T(\mathcal{F}) \subset \mathbb{R}^+$, entonces

$$T\left(\overline{\mathcal{F}}\right) \subset \overline{T(\mathcal{F})} \subset \overline{\mathbb{R}}^+ = [0, +\infty[\,.$$

Aplicando la compacidad de $\overline{\mathcal{F}}$, la continuidad de T, y el hecho de que $T\left(\overline{\mathcal{F}}\right) \subset [0,+\infty[$, tendremos que

$$\exists F \in \overline{\mathcal{F}} : F'(a) \geq f'(a), \forall f \in \overline{\mathcal{F}}.$$

Resta probar que, de hecho, es $F \in \mathcal{F}$.

$F'(a) > 0$, pues al ser $\mathcal{F}$ no vacía, existe alguna f en ella para la que $F'(a) \geq f'(a) > 0$.

Por argumentos topológicos, existe $(f_n) \subset \mathcal{F}$ tal que $f_n \to F$ en $\mathcal{H}(\Omega)$. En particular,

$$F(z) = \lim f_n(z), \forall z \in \Omega;$$

lo cual nos lleva a que

$$F(a) = 0 \text{ y } F(\Omega) \subset \overline{\mathbb{D}}.$$

Pero realmente la inclusión anterior es en el propio disco unidad: F no es constante (pues $F'(a) > 0$), de donde el teorema de la aplicación abierta nos dice que $F(\Omega)$ es abierto, y así $F(\Omega) \subset \mathbb{D}$.

La inyectividad de F está garantizada por el teorema de Hurwitz; y la segunda etapa, finiquitada.

3^a etapa: Objetivo final: Probar que $F(\Omega) = \mathbb{D}$. (Ya sabemos que $F(\Omega) \subset \mathbb{D}$.)

Vamos a razonar por reducción al absurdo:

$$\exists \alpha \in \mathbb{D}\backslash\{0\} : \alpha \notin F(\Omega).$$

Por tanto,

$$\exists \varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : \varphi^2(a) = \frac{F(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha}F(z)}, \forall z \in \Omega;$$

y definamos la función auxiliar

$$G(z) := \frac{|\varphi'(a)|}{\varphi'(a)} \frac{\varphi(z) - \varphi(a)}{1 - \overline{\varphi(a)}\varphi(z)}, \forall z \in \Omega.$$

Esta G es un elemento de $\mathcal{F}$ (recuérdese cómo se argumentó en la primera etapa para f); pero:

$$\left.\begin{array}{l} 2\varphi(a)\varphi'(a) = \left(1 - |\alpha|^2\right) F'(a) \\ (\varphi(a))^2 = -\alpha \Rightarrow |\varphi(a)|^2 = |\alpha| \end{array}\right\} \Rightarrow |\varphi'(a)| = \frac{\left(1 - |\alpha|^2\right) F'(a)}{2\sqrt{|\alpha|}},$$

de donde se tiene que

$$G'(a) = \frac{F'(a)\frac{1-|\alpha|^2}{2\sqrt{|\alpha|}}}{1 - |\alpha|} = F'(a)\frac{1 + |\alpha|}{2\sqrt{|\alpha|}} > F'(a),$$

lo cual es absurdo; y la etapa tercera concluye su misión.

Resumimos: hemos logrado una función F holomorfa e inyectiva en Ω, y tal que

$$F(\Omega) = \mathbb{D}, F(a) = 0 \text{ y } F'(a) > 0.$$

¿Qué nos resta para? Usar el teorema de la función inversa: él es quien nos da la holomorfía de su inversa F^{-1} y, por tanto, se trata, en efecto, de un isomorfismo conforme de Ω en $\mathbb{D}$. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Determina todos los isomorfismos conformes
   (a) del primer cuadrante sobre el semiplano superior;
   (b) de la banda $\{z \in \mathbb{C} : -1 < \operatorname{Re} z < 1\}$ sobre el disco unidad.

2. Sea $f : \Omega \to \mathbb{D}$ una aplicación conforme y sea $a \in \Omega$. Encuentra otra aplicación conforme $g : \Omega \to \mathbb{D}$ tal que $g(a) = 0$ y $g'(a) > 0$. (Consiste en verificar la tesis de la representación conforme en este ejemplo.)

3. Sea Ω un dominio simplemente conexo y sean a,$b \in \Omega$. Prueba que existe una aplicación conforme $\varphi : \Omega \to \Omega$ tal que $\varphi(a) = b$. (Cuando $\Omega = \mathbb{C}$ es muy sencillo, ¿no?)

4. Sea Ω un dominio simplemente conexo del plano tal que $\Omega \neq \mathbb{C}$. Prueba que no existe ningún isomorfismo conforme de $\mathbb{C}$ en Ω.

5. Encuentra todos los isomorfismos conformes entre los discos $D(a, r)$ y $D(b, s)$ que llevan a en b.

6. Encuentra todos los isomorfismos conformes que llevan el semiplano superior $\mathbb{C}^{\uparrow}$ en el disco unidad $\mathbb{D}$, de modo que i es la preimagen del origen.

7. Sea $f : \Omega \to \mathbb{D}$ una aplicación conforme y sea $a \in \Omega$. Sea la familia

   $$G := \{g : \Omega \to \mathbb{D} : g \in \mathcal{H}(\Omega), g'(a) > 0\}.$$

   (a) Prueba que $\sup\limits_{g \in G} g'(a) =: M < +\infty$.
   (b) Supongamos que existe $\Phi \in G$ tal que $\Phi'(a) = M$. Prueba que Φ es biyección de Ω en $\mathbb{D}$.

   (Los elementos de G no precisan ser biyecciones. Para a. prueba que $\overline{D(a, \delta)} \subset \Omega \Rightarrow |g'(a)| < 1/\delta$. Para b. se probará que la tal Φ es el isomorfismo conforme dado por el Teorema de Riemann de Representación Conforme.)

8. Con la notación del Teorema de Riemann de Representación Conforme, si el punto $a \in \mathbb{R}$ y el dominio Ω es simétrico respecto del eje real, prueba que $F(\overline{z}) = \overline{F(z)}$. (Indicación: usa la unicidad.)

9. Comprueba que se trata de isomorfismos conformes entre los dominios indicados:

   (a) La aplicación
   $$z \to \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2$$
   es isomorfismo conforme del disco unidad $\mathbb{D}$ en $\mathbb{C}\backslash\{z : \operatorname{Re} z < 0 \text{ e } \operatorname{Im} z = 0\}$.

   (b) La aplicación
   $$z \to \frac{z-i}{z+i}$$
   es isomorfismo conforme del semiplano superior $\mathbb{C}^{\uparrow}$ en el disco unidad $\mathbb{D}$.

   (c) La aplicación
   $$z \to -z^2$$
   es isomorfismo conforme del semiplano superior $\mathbb{C}^{\uparrow}$ en $\mathbb{C}\backslash\{z : \operatorname{Re} z < 0 \text{ e } \operatorname{Im} z = 0\}$.

10. Sea una función holomorfa en el disco unidad, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, verificando
   $$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$
   Prueba que si existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que $f(\alpha) \neq 0$, entonces podemos encontrar otra función holomorfa g en el disco unidad con $g(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, pero tal que
   $$|g'(\alpha)| > |f'(\alpha)|.$$