Tema 8.2: Lema de Schwarz. Automorfismos conformes del disco unidad. Isomorfismos conformes entre discos y semiplanos

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Consideremos el caso de una función holomorfa f en un disco de la forma $D(0,R)$ y continua en su cierre $\overline{D(0,R)}$. Es conocido ya por nosotros que si $|f|$ se mantiene mayorada, digamos por $M > 0$, sobre la frontera del disco, entonces M también será cota para $|f|$ sobre el interior. Además, la igualdad se va a alcanzar cuando la función sea una constante (con valor absoluto M). Por tanto, si se sabe que $|f(w)| < M$ para algún valor en el disco, es razonable esperar la obtención de una mejor estimación.

Los teoremas en esta línea serán interesantes; y el que sigue, responde a ello. Su presentación atiende a una "normalización" de condiciones más generales sobre ciertos hechos que serán aclarados más adelante, como colofón del tema.

Lema de Schwarz Sea $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$ tal que $f(0) = 0$ y $|f(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{D}$. Entonces:

i. $|f(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}$;

ii. $|f'(0)| \leq 1$;

iii. si existe $z_0 \in \mathbb{D}\backslash\{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, o bien $|f'(0)| = 1$, entonces es un giro; es decir:

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : f(z) = e^{i\theta} z, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. Sea la función auxiliar

$$g : \mathbb{D} \to \mathbb{C}; \qquad g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z}, & z \in \mathbb{D}\backslash\{0\} \\ f'(0), & z = 0 \end{cases}.$$

Esta función es holomorfa en todo el disco unidad, por el teorema de Riemann de singularidades evitables.

Para $z \in \mathbb{D}$, fijo pero arbitrario, elegimos $r : |z| < r < 1$. Por el principio del módulo máximo:

$$\begin{aligned} |g(z)| &\leq \max\{|g(w)| : |w| = r\} = \max\left\{\left|\frac{|f(w)|}{w}\right| : |w| = r\right\} \\ &= \frac{1}{r}\max\{|f(w)| : |w| = r\} \leq 1. \end{aligned}$$

Se tiene, por tanto, que $g(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$. Pero esto no es otra cosa que la veracidad de i. y ii.

Sea ahora $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $|g(z_0)| = 1$ (es decir, $z_0 \in \mathbb{D} \backslash \{0\}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, o bien $|f'(0)| = 1$). Quiere ésto decir que la función $|g|$ alcanza máximo absoluto en $\mathbb{D}$: ha de ser constante, de módulo 1 (por el principio del módulo máximo):

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : g(z) = e^{i\theta}, \qquad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Luego queda establecido enteramente el resultado. **Q.E.D.**

Una de las aplicaciones más interesantes del lema de Schwarz va a ser la caracterización de los automorfismos conformes del disco unidad.

Teorema. Si f es un automorfismo conforme del disco unidad, entonces existen $a \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$, tales que

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Demostración. El recíproco de este resultado es cierto y ya conocido por nosotros: todas las funciones f de esta forma son automorfismos (conformes) del disco unidad: $f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$. Pues bien, llamemos $a := f^{-1}(0)$ y sea

$$\varphi_a \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D}); \varphi_a(z) := \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Así, también $g := f \circ \varphi_a^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$, siendo, además, $g(0) = 0$.

Por otra parte, $g^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ (y $g^{-1}(0) = 0$).

Pues bien, vamos a aplicar el lema de Schwarz (apartado i.) a ambos automorfismos:

a. $|g(z)| \leq |z|, \forall z \in \mathbb{D}$
b. $|z| = \left|g^{-1}[g(z)]\right| \leq |g(z)|, \forall z \in \mathbb{D}$

de donde

$$|g(z)| = |z|, \forall z \in \mathbb{D},$$

y (tenemos *un conjunto no numerable de* razones con las que) podemos afirmar, por iii. del lema de Schwarz, que

$$\exists \theta \in \mathbb{R} : g(z) = e^{i\theta} z, \qquad \forall z \in \mathbb{D};$$

es decir:

$$f\left[\varphi_a^{-1}(z)\right] = e^{i\theta} z, \qquad \forall z \in \mathbb{D};$$

o lo que es lo mismo:

$$f(z) = g(\varphi_a(z)) = e^{i\theta} \frac{z-a}{1-\overline{a}z}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Pero, observemos que aún podemos obtener más información. Derivando en esta expresión:

$$f'(z) = e^{i\theta} \frac{1-|a|^2}{(1-\overline{a}z)^2}, \forall z \in \mathbb{D},$$

de donde haciendo $z := a$:

$$f'(a) = e^{i\theta} \frac{1}{1 - |a|^2} \Rightarrow \theta \in \operatorname{Arg}\left(f'(a)\right). \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Corolario. Sea Ω_1 un disco o un semiplano y sea Ω_2 otro disco o semiplano. Todo isomorfismo (conforme) entre ambos dominios es la restricción a Ω_1 de una transformación de Möbius.

Demostración. Llamemos f al tal isomorfismo. Sabemos que existen transformaciones de Möbius (de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$) que proporcionan convenientes isomorfismos:

$$\Phi : \mathbb{D} \to \Omega_1 \text{ y } \Psi : \Omega_2 \to \mathbb{D}.$$

De este modo, resulta que $\Psi \circ f \circ \Phi$ es un automorfismo conforme del disco unidad; es decir, $\Psi \circ f \circ \Phi$ ha de ser una transformación de Möbius. Pero, en tal caso, hemos concluido, pues

$$f = \Psi^{-1} \circ [\Psi \circ f \circ \Phi] \circ \Phi^{-1} \in \mathcal{M}(\mathbb{C}). \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Teorema (de Pick). Sea $f \in \mathcal{H}(D(0,R))$ y supongamos que $f(D(0,R) \subset D(0,M)$. Entonces, para $z, z_0 \in D(0,R)$:

$$\left| M \frac{f(z) - f(z_0)}{M^2 - \overline{f(z_0)} f(z)} \right| \leq \left| R \frac{z - z_0}{R^2 - \overline{z_0} z} \right|. \qquad [1]$$

Si consideramos el caso $R = M = 1$, entonces:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}, \forall z_0 \in \mathbb{D}. \qquad [2]$$

Demostración. Consideremos $z_0 \in D(0,R)$, fijo en toda la demostración, pero arbitrario, por tanto. Llamemos $w_0 := f(z_0)$. Sean Φ y Ψ las dos transformaciones de Möbius dadas por

$$\Phi^{-1}(z) := R \frac{z - z_0}{R^2 - \overline{z_0} z}, \qquad \forall z \in D(0,R)$$

y

$$\Psi(w) := M \frac{w - w_0}{M^2 - \overline{w}_0 w}, \qquad \forall w \in D(0,M).$$

Φ y Ψ verifican (confirma estos detalles):

$$\begin{cases} \Phi(\mathbb{D}) = D(0,R) : \Phi(0) = z_0 \\ \Psi(D(0,M)) = \mathbb{D} : \Psi(w_0) = 0 \\ \Psi \circ f \circ \Phi \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : \begin{cases} (\Psi \circ f \circ \Phi)(0) = 0 \\ |\Psi \circ f \circ \Phi|(z) < 1, \forall z \in \mathbb{D}. \end{cases} \end{cases}$$

Pues bien, aplicando i. del lema de Schwarz a la función $\Psi \circ f \circ \Phi$, tendremos la desigualdad [1] deseada. (Confírmalo.)

Y aplicándole ii. de dicho lema: $\left|(\Psi \circ f \circ \Phi)'\right|(0) \leq 1$. Hagamos ahora $M = R = 1$ y usemos adecuadamente la regla de la cadena:

$$\begin{aligned}
1 \quad \geq \quad & |\Psi' [(f \circ \Phi)(0)]| \, |f'(\Phi(0))| \, |\Phi'(0)| = |\Psi'(w_0)| \, |f'(z_0)| \, |\Phi'(0)| \\
\Rightarrow \quad & |\Psi'(w_0)| \, |f'(z_0)| \leq \frac{1}{|\Phi'(0)|} = \left|\left(\Phi^{-1}\right)'(\Phi(0))\right| \\
\Rightarrow \quad & \frac{1}{1 - |w_0|^2} |f'(z_0)| \leq \frac{1}{1 - |z_0|^2} \\
\Rightarrow \quad & |f'(z_0)| \leq \frac{1 - |f(z_0)|^2}{1 - |z_0|^2}.
\end{aligned}$$

¿Recuerdas qué restricciones tenía z_0 en $\mathbb{D}$? Pues éso: ninguna, y así [2] es cierta. **Q.E.D.**

Aplicación. El máximo del conjunto

$$\left\{ \left| f'\left(\frac{1}{3}\right) \right| : f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}), f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D} \right\}$$

se alcanza cuando $f(1/3) = 0$.

Demostración. Razonamos por reducción al absurdo: supongamos que el máximo se alcanza para una cierta función f_0 con $\alpha := f_0(1/3) \neq 0$. Para cada f en las condiciones dictadas por la familia en consideración, podemos estudiar el automorfismo de $\mathbb{D}$ asociado:

$$\varphi_f(z) := \frac{f(z) - \alpha}{1 - \overline{\alpha} f(z)}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Su derivada es

$$\varphi_f'(z) = f'(z) \frac{1 - |\alpha|^2}{(1 - \overline{\alpha} f(z))^2}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Pero, entonces, para nuestra f_0 particular:

$$|\varphi_0'(1/3)| \geq |f_0'(1/3)| \frac{1 - |\alpha|^2}{|1 - \overline{\alpha}\alpha|^2} = \frac{|f_0'(1/3)|}{|1 - \overline{\alpha}\alpha|} > |f_0'(1/3)|,$$

lo cual sería contradictorio. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea f una función holomorfa en el disco abierto unidad verificando:

$$f(0) = i; \quad \operatorname{Im} f(z) > 0, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Prueba que

$$|f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

2. Prueba que toda función f holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ y con valores en el semiplano de la derecha, verifica

$$\begin{cases} \frac{1-|z|}{1+|z|}\,|f(0)| \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}\,|f(0)|\,, \quad \forall z\in\mathbb{D} \\ |f'(0)| \leq |2\operatorname{Re} f(0)|\,. \end{cases}$$

3. Sea f una función holomorfa e inyectiva en el disco unidad. Prueba que para cualquier función g holomorfa en el disco unidad que verifique $g(0) = f(0)$ y $g(\mathbb{D}) \subset f(\mathbb{D})$, entonces:

$$g(D(0,r)) \subset f(D(0,r)), \qquad \forall r \in \,]0,1[\,.$$

4. Sea $f \in \mathcal{H}\,(D(0,2))$ tal que $|f| \leq 10$ y $f(1) = 0$. Encuentra la mejor cota posible para $|f(1/2)|$.

5. Sea $f \in \mathcal{H}\,(\mathbb{C})$ tal que $f\,(\mathbb{T}) \subset \mathbb{T}$. Prueba que ha de existir una constante α y un natural n tales que

$$f(z) = \alpha z^n, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

6. Encuentra las funciones f holomorfas en el semiplano superior Ω que satisfacen las siguientes condiciones:

$$f(z) \leq 1, \quad \forall z \in \Omega; \qquad f(i) = 0 \qquad \text{y} \qquad |f'(i)| = \frac{1}{2}.$$

7. Pruébese, directamente (sin recurrir a transformaciones de Möbius), que la transformación

$$z \to e^{i\theta}\,\frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

(para $a \in \mathbb{D}$ y $\theta \in \mathbb{R}$) es un automorfismo conforme del disco unidad $\mathbb{D}$.

8. Sea una función holomorfa en el disco unidad, $f \in \mathcal{H}\,(\mathbb{D})$, verificando

$$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Sean $a_1, a_2, ..., a_n$ (los) ceros de f en $\mathbb{D}$. Prueba que

$$|f(z)| \leq \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z-a_k}{1-\overline{a}_k z} \right|, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

9. Sea una función holomorfa en el disco unidad, $f \in \mathcal{H}\,(\mathbb{D})$, verificando

$$|f(z)| \leq 1, \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Prueba que si existe $\alpha \in \mathbb{D}$ tal que $f(\alpha) \neq 0$, entonces existe otra función holomorfa g en el disco unidad con $g\,(\mathbb{D}) \subset \overline{\mathbb{D}}$, pero tal que

$$|g'\,(\alpha)| > |f'\,(\alpha)|\,.$$