Tema 8.1: Familias normales de funciones holomorfas. Teoremas de Montel y Vitali

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Este tema se dedica al estudio de la compacidad del espacio $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas definidas sobre un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$. Vuelve la topología de la convergencia uniforme sobre compactos a recuperar un papel central.

El punto de partida será el concepto de familia normal de funciones continuas en Ω. La propiedad de Bolzano-Weierstrass la caracterizará en espacios métricos. Será esta la base de la prueba de que las familias normales están puntualmente acotadas y son puntualmente equicontinuas.

El teorema de Ascoli-Arzelà será el encargado de probar que ambas condiciones son suficientes para la normalidad de una familia de funciones; de este modo, se obtendrá una caracterización de la normalidad muy útil, a posteriori, cuando introduzcamos la holomorfía en el juego: como con Weierstrass tenemos que el cierre para familias de funciones coincide en los espacios de funciones continuas y de funciones holomorfas, concluiremos que una familia será normal si, y sólo si, es un cerrado y acotado de $\mathcal{H}(\Omega)$.

Definición. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas sobre un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ se dice normal cuando en $\mathcal{C}(\Omega)$ es un conjunto relativamente compacto.

Es bien conocida la caracterización de Bolzano-Weierstrass de los conjuntos relativamente compactos en espacios métricos (que enunciamos sin demostración):

Lema (Propiedad de Bolzano-Wierstrass). Un conjunto F de un espacio métrico es relativamente compacto si, y sólo si, toda sucesión de elementos de F admite una parcial convergente (no necesariamente en F).

A continuación damos dos condiciones necesarias de normalidad.

Proposición A. Las familias $\mathcal{F}$ normales de funciones continuas sobre abiertos Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ están puntualmente acotadas. (Es decir, para cada $a \in \Omega$, $\{f(a) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado.)

Demostración. Basta con observar que para cada $a \in A$, la aplicación $f \to f(a)$ de $\mathcal{C}(\Omega)$ en $\mathbb{C}$ es continua. **Q.E.D.**

Proposición B. Las familias $\mathcal{F}$ normales de funciones continuas sobre abiertos Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ son puntualmente equicontinuas:

$$\left.\begin{array}{c}\forall a \in \Omega \\ \forall \varepsilon > 0\end{array}\right\} \exists \delta > 0 : \left\{\begin{array}{c}|z-a| < \delta \\ z \in \Omega\end{array}\right\} \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$$

Demostración. Fijemos a en Ω y $\varepsilon > 0$. Ha de existir $\rho > 0$ tal que $K := \overline{D(a,\rho)}$. Por otro lado, la familia

$$\left\{U\left(f, K, \frac{\varepsilon}{3}\right) : f \in \overline{\mathcal{F}}\right\}$$

es cubrimiento de $\overline{\mathcal{F}}$, luego podemos elegir un recubrimiento finito que lo contenga:

$$\exists f_1, ..., f_n \in \overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{F}} \subset \cup_{k=1}^{n} U\left(f_k, K, \frac{\varepsilon}{3}\right).$$

Razonamos por continuidad para cada k:

$$\exists 0 < \delta_k < \rho : |z-a| < \delta_k \Rightarrow |f_k(z) - f_k(a)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

y elegimos $\delta := \min\{\delta_1, ..., \delta_n\}$.

Ahora, tomemos cualesquiera $f \in \mathcal{F}$ y $|z-a| < \delta$. Para algún k, $f \in U\left(f_k, K, \frac{\varepsilon}{3}\right)$. Así:

$$|f(z) - f(a)| \le |f(z) - f_k(z)| + |f_k(z) - f_k(a)| + |f_k(a) - f(a)| < \varepsilon. \textbf{ Q.E.D.}$$

Las dos condiciones necesarias obtenidas en las proposiciones A y B para que una familia de funciones continuas sea normal son también suficientes: es lo que nos dirá, más adelante, el teorema de Ascoli-Arzelá. Para ponermos en la dirección de este resultado precisamos de dos lemas.

Lema 1. Sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$. Supongamos que la familia $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es puntualmente equicontinua. Supongamos que (f_n) converge puntualmente en cada punto de un subconjunto $A \subset \Omega$ denso en Ω. Entonces (f_n) es uniformemente convergente sobre los compactos de Ω.

Demostración. Fijado un compacto arbitrario $K \subset \Omega$, probaremos que la sucesión (f_n) es uniformemente de Cauchy en él. Sea $\varepsilon > 0$. Por argumentos de equicontinuidad puntual, para cada $z \in \Omega$, existe $\delta = \delta(z) > 0$, tal que

$$w \in \Omega, |w-z| < \delta \Rightarrow |f_n(z) - f_n(w)| < \frac{\varepsilon}{5}, \forall n \in \mathbb{N}. \qquad [\underline{1}]$$

Por argumentos, ahora, de compacidad:

$$\exists z_1, ..., z_m \in K : K \subset \cup_{j=1}^{m} D(z_j, \delta(z_j));$$

lo que permite afirmar (justifícalo) que

$$\exists a_1, ..., a_m \in A : a_j \in D(z_j, \delta(z_j)), \forall j \in \{1, ..., m\}.$$

Como hay convergencia puntual en los puntos del conjunto denso A, la sucesión $(f_n(a))$ es, en particular, de Cauchy:

$$j \in \{1,...,m\} \Rightarrow \exists n_j \in \mathbb{N} : p,q \geq n_j \Rightarrow |f_p(a_j) - f_q(a_j)| < \frac{\varepsilon}{5}. \qquad [\underline{2}]$$

Sea $n_0 := \max\{n_1,...,n_m\}$ y sean $p,q \geq n_0$ y $z \in K$. Habrá de existir algún $j \in \{1,...,m\}$ tal que $z \in D(z_j, \delta(z_j))$, de modo que (usando una vez [2] y dos veces [1]):

$$\begin{aligned} |f_p(z) - f_q(z)| &\leq |f_p(z) - f_p(z_j)| + |f_p(z_j) - f_p(a_j)| + \\ &\quad + |f_p(a_j) - f_q(a_j)| + |f_q(a_j) - f_q(z_j)| + |f_q(z_j) - f_q(z)| \\ &< 5\varepsilon/5 = \varepsilon, \end{aligned}$$

luego (f_n) es uniformemente de Cauchy en K. **Q.E.D.**

Para el siguiente lema, se avisa: estaremos en una demostración de tipo diagonalización de Cantor, realmente espectacular. Disfrutémosla.

Lema 2. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones continuas sobre un abierto Ω, puntualmente acotada en Ω. Sean A un subconjunto (infinito) numerable de Ω y $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{F}$. Entonces existe una parcial $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ convergente en cada punto de A.

Demostración. (Parte constructiva.) Anotemos $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Como la sucesión de complejos $(f_n(a_1))_n$ está acotada, admitirá una parcial convergente; llamémosla $\left(f_{\sigma_1(n)}(a_1)\right)_n$. Del mismo modo, la sucesión $\left(f_{\sigma_1(n)}(a_2)\right)_n$ está acotada: vamos a escribir como $\left(f_{\sigma_2(n)}(a_2)\right)_n$ la parcial convergente que admite. Observa que, de paso, y esto es lo importante, estamos garantizando que $\left(f_{\sigma_2(n)}(a_1)\right)_n$ converge, pues $\left(f_{\sigma_2(n)}\right)_n$ es parcial de $\left(f_{\sigma_1(n)}\right)_n$. Escribamos, para precisar la notación, como sigue:

$$\exists \tau_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente tal que } \sigma_2 = \sigma_1 \circ \tau_1.$$

Procedemos por inducción: dadas aplicaciones $\sigma_k, \tau_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente crecientes con

$$\left(f_{\sigma_k(n)}(a_j)\right)_n \text{ convergente para } 1 \leq j \leq k$$

podemos definir $\sigma_{k+1} = \sigma_k \circ \tau_k$. Razonamos ahora que la sucesión $\left(f_{\sigma_k(n)}(a_{k+1})\right)_n$ está acotada y, por tanto, admite una parcial $\left(f_{\sigma_{k+1}(n)}(a_{k+1})\right)_n$ convergente, que garantiza la convergencia de $\left(f_{\sigma_{k+1}(n)}(a_j)\right)_n$ para $1 \leq j \leq k+1$.

(Parte calculística.) Pues bien, llamemos $\varphi(n) := \sigma_n(n)$, para cada natural (¡cómo huele a final!): el objetivo ya es probar que, en efecto, la sucesión $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ es una parcial de (f_n) que converge en todo punto de A.

Que es parcial es trivial:

$$\begin{aligned} \varphi(n+1) &= \sigma_{n+1}(n+1) = (\sigma_n \circ \tau_n)(n+1) = \sigma_n[\tau_n(n+1)] \\ &\geq \sigma_n[\tau_n(n)] = (\sigma_n \circ \tau_n)(n) = \varphi(n). \end{aligned}$$

Para $p \in \mathbb{N}$, veamos que la sucesión $\left(f_{\varphi(n)}\left(a_p\right)\right)_n$ es convergente. Para ello, bastará probar que $\left(f_{\varphi(p+n)}\left(a_p\right)\right)_n$ es convergente. Y ello lo vamos a lograr viendo que, de hecho es parcial de $\left(f_{\sigma_p(n)}\left(a_p\right)\right)_n$, la cual es, evidentemente, convergente. (Disfrutas, ¿no?) Vamos a probar, por tanto (pues es suficiente) que

$$\exists \psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente tal que } \varphi_{p+n} = \sigma_p \circ \psi_n.$$

Como

$$\begin{aligned}
\varphi\left(p+n\right) &= \sigma_{p+n}\left(p+n\right) = \left(\sigma_{p+n-1} \circ \tau_{p+n-1}\right)\left(p+n\right) \\
&= \sigma_{p+n-1}\left[\tau_{p+n-1}\left(p+n\right)\right] \\
&= \left(\sigma_{p+n-2} \circ \tau_{p+n-2}\right)\left[\tau_{p+n-1}\left(p+n\right)\right] \\
&= \left(\sigma_{p+n-2} \circ \tau_{p+n-2} \circ \tau_{p+n-1}\right)\left(p+n\right) \\
\ldots &= \left(\sigma_p \circ \tau_p \circ \ldots \circ \tau_{p+n-1}\right)\left(p+n\right) =: \sigma_p\left[\psi_n\right],
\end{aligned}$$

y es

$$\begin{aligned}
\psi_{n+1} &: = \left(\tau_p \circ \ldots \circ \tau_{p+n-1} \circ \tau_{p+n}\right)\left(p+n+1\right) \\
&> \left(\tau_p \circ \ldots \circ \tau_{p+n-1}\right)\left(p+n\right) =: \psi_n,
\end{aligned}$$

luego llegamos a la meta. **Q.E.D.**

Teorema de Ascoli-Arzelà. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones continuas sobre un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ es normal si, y sólo si, está puntualmente acotada y es puntualmente equicontinua en Ω.

Demostración. Basta probar la suficiencia. Sea A un subconjunto denso y numerable de Ω (¡razona la existencia de tal conjunto!). Si consideramos una sucesión (f_n) de elementos de $\mathcal{F}$, por el lema 2 tenemos que existe una parcial $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ convergente en cada punto de A. Como la equicontinuidad puntual se hereda por subfamilias, $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ lo habrá de ser en A, y es posible aplicarle el lema 1: $\left(f_{\varphi(n)}\right)$ converge uniformemente sobre compactos de Ω.

Ahora ya basta aplicar el lema (Propiedad de Bolzano-Weierstrass) que encabezaba este tema. **Q.E.D.**

Observación: $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}\left(\Omega\right) \subset \mathcal{C}\left(\Omega\right)$ y $\mathcal{H}\left(\Omega\right)$ es cerrado en $\mathcal{C}\left(\Omega\right)$ (teorema de Weierstrass) $\Rightarrow$

$$\overline{\mathcal{F}}^{\mathcal{H}(\Omega)} = \overline{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}(\Omega)};$$

y, por tanto, para $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}\left(\Omega\right)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \text{ es normal} &\Leftrightarrow \overline{\mathcal{F}}^{\mathcal{C}(\Omega)} \text{ es compacto de } \mathcal{C}\left(\Omega\right) \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \overline{\mathcal{F}}^{\mathcal{H}(\Omega)} \text{ es compacto de } \mathcal{H}\left(\Omega\right).
\end{aligned}$$

Para las familias de funciones holomorfas se puede eliminar la condición de equicontinuidad puntual a cambio de endurecer la acotación puntual. Concretamente:

Primer teorema de Montel. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones holomorfas sobre un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ es normal si, y sólo si, está uniformente acotada en cada compacto de Ω.

Demostración. ($\Leftarrow$) Condición suficiente: el objetivo será probar las condiciones que caracterizan la normalidad en el teorema de Ascoli-Arzelá.

Sea $K \subset \Omega$ un compacto. La acotación uniforme (sobre compactos) nos da que

$$\exists M_K > 0 : |f(z)| \leq M_K, \forall z \in K, \forall f \in \mathcal{F}.$$

En particular, $\mathcal{F}$ está puntualmente acotada en Ω.

Sean ahora $a \in \Omega$ y $\varepsilon > 0$. Para ellos, otra vez la acotación uniforme sobre compactos:

$$\exists \overline{D(a,R)} \subset \Omega, \exists M > 0 : |f(w)| \leq M, \forall w \in C(a,R), \forall f \in \mathcal{F}.$$

Por la fórmula elemental de Cauchy, si $z \in D(a, \frac{R}{2})$:

$$\begin{aligned}
|f(z) - f(a)| &= \left| \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-z} dw - \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,R)} \frac{f(w)}{w-a} dw \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{C(a,R)} f(w) \frac{z-a}{(w-z)(w-a)} dw \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} 2\pi R M \frac{|z-a|}{\frac{R}{2} R} = \frac{2M}{R} |z-a| .
\end{aligned}$$

Si elegimos $\delta := \min \left\{ \frac{\varepsilon R}{2M}, \frac{R}{2} \right\}$, entonces

$$|z-a| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(a)| < \varepsilon, \forall f \in \mathcal{F}$$

luego la familia $\mathcal{F}$ es puntualmente equicontinua en Ω, y el teorema de Ascoli-Arzelà nos da normalidad.

($\Rightarrow$) Para un compacto arbitrario $K \subset \Omega$ la familia

$$\left\{ U(f, K, 1) : f \in \overline{\mathcal{F}} \right\}$$

es un cubrimiento por abiertos del compacto $\overline{\mathcal{F}}$, del que, por tanto, se puede extraer un recubrimiento finito:

$$\exists f_1, ..., f_n \in \overline{\mathcal{F}} : \overline{\mathcal{F}} \subset \cup_{k=1}^{n} U(f_k, K, 1) .$$

Ahora, por argumentos de continuidad:

$$\forall j \in \{1, ..., n\}, \exists M_j > 0 : |f_j(z)| \leq M_j, \forall z \in K.$$

(Haz explícitos los cálculos.) Sea, ahora, $M := 1 + \max \{M_1, ..., M_n\}$. Para $f \in \mathcal{F}$ y $z \in K$, se tiene que

$$\exists j \in \{1, ..., n\} : f \in U(f_j, K, 1)$$

y

$$|f(z)| \leq |f(z) - f_j(z)| + |f_j(z)| < 1 + M_j \leq M,$$

luego se sigue su acotación uniforme sobre K. **Q.E.D.**

Corolario. Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos de $\mathbb{C}$. Supongamos que Ω_2 está acotado. Entonces la familia

$$\{f \in \mathcal{H}(\Omega_1) : f(\Omega_1) \subset \Omega_2\}$$

es normal.

Demostración. Claramente, para cada compacto $K \subset \Omega_1$, la familia dada estará uniformemente acotada (¡por estarlo Ω_2!). El (primer) teorema de Montel se encarga del resto. **Q.E.D.**

Concluimos ya este tema con una consecuencia de la normalidad para familias de funciones holomorfas. Será consecuencia de un lema, el cual se inspira en el siguiente resultado que enunciamos a continuación (y que no probaremos ya que sólo nos interesará a modo de curiosidad informativa):

Segundo teorema de Montel. (Montel-Caratheòdory) Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq \beta$. Entonces, cualquier familia de la forma

$$\{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(\Omega) \subset \mathbb{C} \setminus \{\alpha, \beta\}\}$$

es normal.

Lema Sea $(x_n)_n$ una sucesión no convergente en un espacio métrico compacto E. Entonces existen sucesiones parciales $\left(x_{\sigma(n)}\right)$ y $\left(x_{\tau(n)}\right)$, y $a, b \in E$, $a \neq b$, tales que $x_{\sigma(n)} \to a$ y $x_{\tau(n)} \to b$.

Demostración. Por argumentos de compacidad, existe una parcial convergente:

$$\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \text{ estrictamente creciente y } \exists a \in E : x_{\sigma(n)} \to a.$$

Por otro lado, al ser $(x_n)_n$ una sucesión no convergente, para algún $\varepsilon > 0$, el conjunto

$$A := \{n \in \mathbb{N} : \ \mathrm{dist}\,(x_n, a) \geq \varepsilon\}$$

es infinito. Y, por tanto,

$$\exists \rho : \mathbb{N} \to A \text{ estrictamente creciente.}$$

Pero, a su vez, esta parcial $\left(x_{\rho(n)}\right)$ admitirá otra (sub)parcial convergente, que denotaremos por $\left(x_{\rho(\varphi(n))}\right)$, y que tendrá como límite a cierto b.

Ahora bien, como

$$\varepsilon \leq \ \mathrm{dist}\,(a, x_n)\,, \forall n \in A,$$

y, en particular,

$$\varepsilon \leq \ \mathrm{dist}\left(a, x_{\rho(\varphi(n))}\right), \forall n \in A,$$

se sigue (por la continuidad de la función distancia) que

$$\varepsilon \leq \operatorname{dist}(a,b),$$

de donde $a \neq b$ y basta hacer $\tau := \rho \circ \varphi$ para completar la demostración. **Q.E.D.**

Llamamos la atención sobre el condimento de conexión que se introduce en el próximo resultado: el principio de identidad entrará en juego en el momento decisivo.

Teorema de Vitali. Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas uniformente acotada en cada compacto de un dominio Ω del plano complejo $\mathbb{C}$. Supongamos que (f_n) converge puntualmente en un conjunto A tal que $A' \cap \Omega \neq \varnothing$. Entonces (f_n) converge uniformemente sobre compactos de Ω.

Demostración. La familia $\mathcal{F} := \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es normal (primer teorema de Montel) y resulta que su cierre es un espacio métrico compacto (en $\mathcal{H}(\Omega)$). Llamémoslo E (... ¡lo cual es un acierto!) para aplicarle el lema precedente: si razonamos por reducción al absurdo, podemos encontrar f y g en E, tales que, para conveniente aplicaciones estrictamente crecientes $\sigma, \tau : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se verifican:

$$f_{\sigma(n)} \to f \text{ y } f_{\tau(n)} \to g.$$

Por el teorema de convergencia de Weierstrass, tenemos que $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Ahora bien, si $a \in A$, la convergencia de la sucesión $(f_n(a))$ nos conduce a que:

$$f(a) = \lim f_{\sigma(n)}(a) = \lim f_{\tau(n)}(a) = g(a);$$

luego f y g coinciden sobre A.

Finalmente, principio de identidad para funciones holorfas: ¡pa qué te quiero! **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ una familia no acotada de funcions holomorfas en Ω. Prueba que existe, al menos, un $a \in \Omega$ tal que $\mathcal{F}$ no está uniformemente acotado en ningún entorno de a.

2. Sea $\{\Omega_j; j \in I\}$ una famila de abiertos del plano $\mathbb{C}$. Sea $\Omega := \underset{I}{\cup}\Omega_j$. Llamemos

   $$\mathcal{F} := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{C} : f \in \underset{I}{\cap}\mathcal{H}(\Omega_j), f \text{ acotada} \right\}.$$

   Prueba que $\mathcal{F}$ ha de estar acotada en $\mathcal{H}(\Omega)$.

3. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{C}$ y $M > 0$. Consideremos la familia

   $$\left\{ f \in \mathcal{H}(\Omega) : \int_{\Omega} |f(z)|^2 \, dz \leq M \right\}.$$

   Prueba que $\mathcal{F}$ está acotada en $\mathcal{H}(\Omega)$.

4. Sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Supongamos que la familia $\mathcal{F}' := \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ sea un conjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ y que el conjunto $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado. Prueba que $\mathcal{F}$ también es un conjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ .Prueba que dada una sucesión (f_n) de funciones holomorfas en un dominio Ω, no ha de existir, necesariamente una parcial $\left(f_{\sigma(n)}\right)$ que converja uniformemente en Ω. (Considera lo que ocurre con las sucesiones $z, 2z, 3z, ..., nz, ...$ en $\mathbb{D}$, o bien $z, z^2, z^3, ..., z^n, ...$ en $D(0,2)$.)

5. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que $f(\Omega) \subset \Omega$ y $f(a) = a$ para algún $a \in \Omega$.

   (a) Sean $f_1 := f$ y $f_{n+1} := f \circ f_n$, $n \geq 1$. Calcula $f_n'(a)$ y deduce que $|f'(a)| \leq 1$.

   (b) Supongamos que $f'(a) = 1$. Prueba que $f(z) = z$, $\forall z \in \Omega$.

   (c) Prueba que si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $[f'(a)]^k = 1$, entonces f ha de ser biyección de Ω en Ω.

6. Prueba que el conjunto

$$\{f \in \mathcal{H}(\Omega) : f(\Omega) \subset \Omega \text{ y } f(a) = a \text{ para algún } a \in \Omega\}$$

   es cerrado para la convergencia uniforme sobre compactos. Dedúzcase que si $|f'(a)| = 1$, entonces f ha de ser biyección de Ω en Ω con inversa holomorfa.

7. La familia $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ de los automorfismos conformes del disco unidad, ¿es un conjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$?

8. Sea la familia $\mathcal{F} \subset \mathcal{H}(\mathbb{D})$ verificando las dos condiciones siguientes:

   (a) $\mathrm{Re}\, f(z) > 0, \forall z \in \mathbb{D}, \forall f \in \mathcal{F}$; y

   (b) el conjunto $\{f(0) : f \in \mathcal{F}\}$ está acotado.

   Prueba que $\mathcal{F}$ es un conjunto relativamente compacto de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

9. Prueba que la familia

$$\left\{f \in \mathcal{H}(\mathbb{D}) : f(0) = 0, \left|f^{n)}(0)\right| \leq (n+1)!, \forall n \in \mathbb{N}\right\}$$

   es un compacto de $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.