Tema 7.3: Principio del argumento. Teoremas de Rouché y Hurwitz

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Ya hemos usado (temas 4.7 y 7.2) las llamadas funciones meromorfas: las funciones holomorfas alvo singularidades donde ninguna de ellas es esencial. Formalizamos ahora el concepto.

Definición. Una función f definida sobre un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ se dice meromorfa en Ω si existe $A \subset \Omega$ tal que:

- **a.** $A' \cap \Omega = \varnothing$,
- **b.** $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A)$, y
- **c.** f tiene un polo en cada punto de A.

El conjunto de todas las funciones meromorfas en un abierto Ω se notará por $\mathfrak{M}(\Omega)$. Para cada $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$ notaremos por $\mathfrak{P}(f)$ al conjunto de todos sus polos en Ω.

Si definimos, para cada $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$, una función

$$\widehat{f} : \Omega \to \mathbb{C}; \widehat{f}(z) := \begin{cases} \infty, & z \in \mathfrak{P}(f) \\ f(z), & z \in \Omega \backslash \mathfrak{P}(f) \end{cases}$$

obtendremos una función continua de Ω en $\overline{\mathbb{C}}$.

Principio de identidad para funciones meromorfas. Sea Ω un dominio del plano complejo y sea f una función meromorfa en él. Sea $\mathfrak{Z}(f) := \{z \in \Omega \backslash \mathfrak{P}(f) : f(z) = 0\}$ (el conjunto de los ceros de f que no son polos en Ω). Si $\mathfrak{Z}(f)' \cap \Omega \neq \varnothing$, entonces $\mathfrak{P}(f) = \varnothing$. Es decir, la única función meromorfa cuyos ceros se acumulan en su dominio de definición es la idénticamente nula.

Demostración. Sea $a \in \mathfrak{Z}(f)' \cap \Omega \neq \varnothing$. Si fuese $a \in \mathfrak{P}(f)$, tendríamos, por un lado

$$\lim_{z \to a} f(a) = \infty,$$

y, por otro,

$$\exists (a_n) \subset \mathfrak{Z}(f) : a = \lim a_n \Rightarrow f(a) = 0 \nrightarrow \infty.$$

Por tanto, será, de hecho

$$a \in \mathfrak{Z}(f)' \cap [\Omega \backslash \mathfrak{P}(f)].$$

El objetivo: probar que $\Omega \backslash \mathfrak{P}(f)$ es dominio, pues la holomorfía de f ahí nos habilita para usar el principio de identidad para funciones holomorfas y concluir que f es idénticamente nula en $\Omega \backslash \mathfrak{P}(f)$ y, por tanto, $\mathfrak{P}(f) = \varnothing$.

Que $\Omega \backslash \mathfrak{P}(f)$ es abierto es claro (¿por qué?). Veamos que es conexo: sean dados dos abiertos G_1 y G_2 no vacíos y disjuntos, tales que

$$\Omega \backslash \mathfrak{P}(f) = G_1 \cup G_2.$$

Sea $b \in \mathfrak{P}(f)$: ha de existir $r_b > 0$ tal que

$$D(b, r_b) \backslash \{b\} \subset \Omega \backslash \mathfrak{P}(f).$$

(Y los discos perforados son conexos, tengámoslo presente.) Sean:

$$\begin{aligned} B_1 &: = \{b \in \mathfrak{P}(f) : D(b, r_b) \backslash \{b\} \subset G_1\} \\ B_2 &: = \{b \in \mathfrak{P}(f) : D(b, r_b) \backslash \{b\} \subset G_2\}. \end{aligned}$$

Ocurre que $G_1 \cup B_1$ y $G_2 \cup B_2$ son abiertos disjuntos y

$$(G_1 \cup B_1) \cup (G_2 \cup B_2) = (G_1 \cup G_2) \cup (B_1 \cup B_2) = (\Omega \backslash \mathfrak{P}(f)) \cup \mathfrak{P}(f) = \Omega,$$

luego, por ser Ω conexo, tenemos la siguiente disyuntiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 \cup B_1 = \varnothing \Rightarrow G_1 = \varnothing \\ G_2 \cup B_2 = \varnothing \Rightarrow G_2 = \varnothing; \end{array} \right.$$

es decir, en cualquier caso, se llegará a una contradicción bajo tal hipótesis de descomposición para $\Omega \backslash \mathfrak{P}(f)$; lo cual prueba que $\Omega \backslash \mathfrak{P}(f)$ es conexo. **Q.E.D.**

Principio del Argumento Generalizado. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$. Sean $\mathfrak{Z}(f)$ y $\mathfrak{P}(f)$ como fueron definidos más arriba. Para cada $a \in \mathfrak{Z}(f)$ y $b \in \mathfrak{P}(f)$, se definen los números enteros no negativos $m(a)$ y $n(b)$, como sus respectivos órdenes de cero y de polo. Sea Γ un ciclo en Ω. Supongamos que Γ es Ω-nulhomólogo y que $\Gamma^* \cap (\mathfrak{Z}(f) \cup \mathfrak{P}(f)) = \varnothing$. Entonces, para cada $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, se tiene:

$$\frac{1}{i2\pi} \int_\Gamma \frac{f'}{f} g = \sum_{a \in \mathfrak{Z}(f)} \mathrm{Ind}_\Gamma(a)\, m(a) g(a) - \sum_{b \in \mathfrak{P}(f)} \mathrm{Ind}_\Gamma(b)\, n(b) g(b).$$

Demostración. Llamemos $S := \mathfrak{Z}(f) \cup \mathfrak{P}(f)$. Si definimos

$$F : \Omega \backslash S \to \mathbb{C}; F(z) := \frac{f'(z)}{f(z)} g(z), \forall z \in \Omega \backslash S$$

tenemos una función holomorfa en $\Omega \backslash S$, donde $\Omega \cap S' = \varnothing$; luego F es holomorfa en Ω salvo singularidades: $F \in \mathcal{H}_S(\Omega)$.

Aplicamos a ella el teorema de los residuos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i2\pi}\int_\Gamma F &= \frac{1}{i2\pi}\int_\Gamma \frac{f'}{f}g \\ &= \sum_{a\in\mathfrak{Z}(f)} \operatorname{Ind}_\Gamma(a)\ \operatorname{Res}(F,a) + \sum_{b\in\mathfrak{P}(f)} \operatorname{Ind}_\Gamma(b)\ \operatorname{Res}(F,b). \qquad [*] \end{aligned}$$

Calculemos estos residuos que aparecen en la fórmula anterior:

a. Sea $a \in \mathfrak{Z}(f)$. Por tanto:

$$\exists r > 0 : 0 < |z-a| < r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z \in \Omega\backslash\mathfrak{P}(f) \\ f(z) \neq 0 \end{array} \right.$$

Consecuentemente,

$$\left. \begin{array}{c} \exists\varphi \in D(a,r) \\ \varphi(z) \neq 0, \forall z \in D(a,r)\backslash\{a\} \end{array} \right\} : f(z) = (z-a)^{m(a)}\,\varphi(z), \forall z \in D(a,r).$$

Si derivamos en esta última fórmula, con $0 < |z-a| < r$:

$$f'(z) = m(a)\,(z-a)^{m(a)-1}\,\varphi(z) + (z-a)^{m(a)}\,\varphi'(z).$$

Por tanto, con $0 < |z-a| < r$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{m(a)}{z-a}g(z) + \frac{\varphi'}{\varphi}(z)g(z) \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{Res}(F,a) = \lim_{z\to a}(z-a)\,F(a) = m(a)g(a). \qquad [\underline{1}] \end{aligned}$$

b. Sea $b \in \mathfrak{P}(f)$. Por tanto:

$$\exists r > 0 : 0 < |z-b| < r \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} z \in \Omega\backslash\mathfrak{P}(f) \\ f(z) \neq 0 \end{array} \right.$$

Consecuentemente,

$$\left. \begin{array}{c} \exists\psi \in D(b,r) \\ \psi(z) \neq 0, \forall z \in D(b,r)\backslash\{b\} \end{array} \right\} : f(z) = (z-b)^{-n(b)}\,\psi(z), \forall z \in D(b,r).$$

Si derivamos en esta última fórmula, con $0 < |z-b| < r$:

$$f'(z) = -n(b)\,(z-b)^{-n(b)-1}\,\psi(z) + (z-b)^{-n(b)}\,\psi'(z).$$

Por tanto, con $0 < |z-b| < r$:

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{-n(b)}{z-b}g(z) + \frac{\psi'}{\psi}(z)g(z) \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{Res}(F,b) = \lim_{z\to b}(z-b)\,F(b) = -n(b)g(b). \qquad [\underline{2}] \end{aligned}$$

En resumen, si sustituimos [$\underline{1}$] y [$\underline{2}$] en [$*$], tendremos lo buscado. **Q.E.D.**

En la práctica, las condiciones en las que se hace uso del teorema anterior suelen ser otras:

Principio del Argumento. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathfrak{M}(\Omega)$. Sean $\mathfrak{Z}(f)$ y $\mathfrak{P}(f)$ como fueron definidos más arriba. Sea Γ un ciclo en Ω. Supongamos que Γ es Ω-nulhomólogo y que $\Gamma^* \cap (\mathfrak{Z}(f) \cup \mathfrak{P}(f)) = \varnothing$. Supongamos que para cada $z \in \Omega \backslash \Gamma^*$, o bien $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$, o bien $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1$. Llamemos $U := \{z \in \Omega : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 1\}$. Designemos por N_0 al número de ceros de f en U, contados tantas veces como indique el orden de multiplicidad de cada uno; y por N_p al número de polos de f en U, contados, asímismo cada uno, tantas veces como indique su orden de multiplicidad. (Ambos números son finitos por el teorema de los residuos.) Entonces:

$$\frac{1}{i2\pi} \int_\Gamma \frac{f'}{f} = N_0 - N_p.$$

A continuación vamos a hacer uso del principio del argumento para resolver el problema de la localización de ceros de funciones holomorfas en ciertas regiones del plano.

Comenzaremos con unos tipos de funciones y de abiertos muy específicos: polinomios sobre secciones circulares. Despúes pasaremos a funciones holomorfas en general sobre dominios o abiertos acotados.

Sea p un polinomio de coeficientes complejos de variable compleja de orden n. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $-\pi < \alpha < \beta \leq \pi$. Se trata de determinar el número de ceros del polinomio dado, contado cada uno tantas veces como indique su orden de multiplicidad, en la región angular

$$U := \{z \in \mathbb{C} \backslash \{0\} : \alpha < \arg(z) < \beta\}.$$

Se supondrá, para ello, que p no se anula en la frontera de dicha región angular; es decir:

$$p\left(te^{i\alpha}\right) \neq 0 \neq p\left(te^{i\beta}\right), \qquad \forall t \geq 0. \qquad (\underline{1})$$

Sea $r_1 := \max\{|z| : z \in U, p(z) = 0\}$. Para $r > r_1$, el número buscado, llamémoslo N, coincide con el de los correspondientes ceros en el sector circular

$$U_r := \{z \in U : |z| < r\}.$$

Dicho N tendrá una expresión integral (mediante el principio del argumento). Consideremos, a fin de confirmar lo dicho, las curvas

$$c_r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C} \text{ y } s_r : [-r, r] \to \mathbb{C},$$

dadas por:

$$c_r(t) := re^{it}, \forall t \in [\alpha, \beta]; \qquad s_r(t) := \begin{cases} -te^{i\beta}, & -r \leq t \leq 0 \\ te^{i\alpha}, & 0 \leq t \leq r \end{cases}$$

y sea $\gamma_r := c_r + s_r$. Claramente, γ_r es un camino (curva regular a trozos) cerrada tal que $\partial U_r = \gamma_r^*$.

La comprobación de las hipótesis del principio del argumento pasarán por ver que:

a. p es una función entera;

b. γ_r es un ciclo $\mathbb{C}$-nulhomólogo (¡como todo buen ciclo que se precie!) que (gracias a (1) y a la elección de r) no pasa por ningún cero de p; y

c. $\operatorname{Ind}_{\gamma_r}(z) = 1$, si $z \in U_r$; e $\operatorname{Ind}_{\gamma_r}(z) = 0$, si $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{U}_r$.

Por tanto, aplicando el citado principio:

$$N = \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{p'}{p} = \frac{1}{i2\pi} \int_{s_r} \frac{p'}{p} + \frac{1}{i2\pi} \int_{c_r} \frac{p'}{p} \qquad (2)$$

Vamos a calcular las correspondientes integrales. Para el primer sumando, observamos que

$$\int_{s_r} \frac{p'}{p} = \int_{-r}^{r} \frac{p'(s_r(t))}{p(s_r(t))} s_r'(t)\, dt = \int_{-r}^{r} \frac{(p \circ s_r)'(t)}{(p \circ s_r)(t)} dt = \int_{p \circ s_r} \frac{dw}{w},$$

por lo que la integral buscada coincide con la variación del logaritmo a lo largo de la curva $p \circ s_r$. En consecuencia (y este va a ser el problema práctico que resolver en cada caso concreto), si disponemos de una determinación continua del argumento (equivalentemente, del logaritmo) a lo largo de la curva $p \circ s_r$, esto es, si disponemos de una función continua

$$\theta_r : [-r, r] \to \mathbb{R}; \qquad \theta_r(t) \in \operatorname{Arg}[(p \circ s_r)(t)], \forall t \in [-r, r],$$

tendremos que

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{s_r} \frac{p'}{p} = \frac{1}{i2\pi} \ln \left| \frac{(p \circ s_r)(r)}{(p \circ s_r)(-r)} \right| + \frac{1}{2\pi} (\theta_r(r) - \theta_r(-r)). \qquad (3)$$

Para la segunda de las integrales en (2), razonamos de la siguiente manera: podemos escribir

$$\frac{p'(z)}{p(z)} = \frac{n}{z} + \frac{p_1(z)}{p_2(z)},$$

donde p_1 y p_2 son polinomios con $\operatorname{grad}(p_2) - \operatorname{grad}(p_1) \geq 2$. Es claro que

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{c_r} \frac{n}{z} dz = \frac{n}{i2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = \frac{n(\beta - \alpha)}{2\pi}; \qquad (4)$$

y sólo resta tratar con la integral $\int_{c_r} \frac{p_1}{p_2}$.

La relación entre los polinomios p_1 y p_2 nos permite afirmar que:

$$\exists r_2, M > 0 : |z| > r_2 \Rightarrow \left| \frac{p_1(z)}{p_2(z)} \right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Por tanto, para $r > r_2$:

$$\left| \frac{1}{i2\pi} \int_{c_r} \frac{p_1(z)}{p_2(z)} dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M}{|z|^2} (\beta - \alpha) r,$$

luego:

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{i2\pi}\int_{c_r}\frac{p_1(z)}{p_2(z)}dz=0;$$

y usando (4), tenemos:

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{i2\pi}\int_{c_r}\frac{p'(z)}{p(z)}dz=\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}. \qquad (5)$$

Haciendo ahora $r\to+\infty$ en (2) y teniendo en cuenta (3) y (5), obtenemos:

$$N-\frac{n(\beta-\alpha)}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\lim_{r\to+\infty}(\theta_r(r)-\theta_r(-r)). \qquad \blacksquare$$

Con todo, hemos probado el siguiente resultado relativo a la localización de ceros de polinomios en sectores circulares, de gran utilidad práctica:

Proposición Sea $p:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ un polinomio de coeficientes complejos de grado n. Supongamos que p no se anula en la frontera de la región angular

$$\{z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}:\alpha<\arg z<\beta\} \qquad (-\pi<\alpha<\beta\leq\pi).$$

Supongamos, igualmente, la existencia de una función continua tal que

$$\begin{array}{rcl}\theta_R & : & [-R,R]\to\mathbb{R}\\ \theta_R(t) & \in & \operatorname{Arg}(p(s_R(t))),\forall t\in[-R,R],\end{array}$$

donde la función $s_R:[-R,R]\to\mathbb{C}$, está dada por:

$$s_R(t):=\left\{\begin{array}{ll}-te^{i\beta}, & -R\leq t\leq 0\\ te^{i\alpha}, & 0\leq t\leq R\end{array}\right.$$

Entonces, el número de ceros de p en dicha región angular, contado cada uno tantas veces como indique su orden de multiplicidad, viene dado por

$$n\frac{\beta-\alpha}{2\pi}+\frac{1}{2\pi}\lim_{R\to+\infty}[\theta_R(R)-\theta_R(-R)].$$

Ejemplo. Se quiere conocer la distribución por cuadrantes de los ocho ceros del polinomio

$$p(z):=z^8+z^5-z^4+3z^3+6z^2+2z+5, \qquad \forall z\in\mathbb{C}$$

Resolución. Comenzamos razonando sobre el semiplano derecho: $\alpha:=\frac{-\pi}{2}$ y $\beta:=\frac{\pi}{2}$, en la proposición anterior. Por tanto:

$$\begin{array}{rcl}s_r(t) & : & =-it, \qquad \forall t\in\mathbb{R}\\ p(s_r(t)) & = & p(-it)\\ & = & t^8-it^5-t^4+3it^3-6t^2-2it+5,\end{array}$$

de donde se sigue que

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Re} p\left(s_r\left(t\right)\right) & = & t^8 - t^4 - 6t^2 + 5 \\ \operatorname{Im} p\left(s_r\left(t\right)\right) & = & -t^5 + 3t^3 - 2t = -\left(t^4 - 3t^2 + 2\right)t \\ & = & -t\left(t-1\right)\left(t+1\right)\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t+\sqrt{2}\right). \end{array}$$

Así:

$$\operatorname{Im} p\left(s_r\left(t\right)\right) = 0 \Leftrightarrow t \in \{-\sqrt{2}, -1, 0, 1, \sqrt{2}\};$$

con

$$\begin{array}{rcl} t & = & 0 \Rightarrow \operatorname{Re} p\left(s_r\left(0\right)\right) = 5 > 0 \\ |t| & = & 1 \Rightarrow \operatorname{Re} p\left(s_r\left(t\right)\right) = -1 < 0 \\ |t| & = & \sqrt{2} \Rightarrow \operatorname{Re} p\left(s_r\left(t\right)\right) = 5 > 0, \end{array}$$

de donde, al no anularse p sobre el soporte de γ (es decir, no tiene raíces en el eje imaginario $z \in i\mathbb{R}$), podemos aplicar el principio del argumento.

Ahora bien, el argumento principal presenta problemas de discontinuidad, en este ejemplo que nos ocupa, cuando $|t| = 1$. Razonaremos como sigue, a fin de evitar estos problemas y obtener una determinación continua del argumento θ_r:

$$t \in [-r, -1[\Rightarrow \theta_r(t) := \arg\left[p(-it)\right]. \qquad [\underline{1}]$$

Si

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in \left[-\sqrt{2}, -1\right[\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} p\left(s_r\left(t\right)\right) < 0 \\ \operatorname{Re} p\left(s_r\left(t\right)\right) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{t \to -1^-} \arg\left[p(-it)\right] = -\pi \\ t \in \left]-1, 0\right[\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} p\left(s_r\left(t\right)\right) > 0 \\ \operatorname{Re} p\left(s_r\left(t\right)\right) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{t \to -1^+} \arg\left[p(-it)\right] = \pi \end{array} \right\}$$

entonces

$$t \in [-1, 0[\Rightarrow \theta_r(t) := \arg\left[p(-it)\right] - 2\pi. \qquad [\underline{2}]$$

Si (considerando la θ_r recién definida)

$$\left\{ \begin{array}{l} t \in [0, 1[\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} p\left(s_r\left(t\right)\right) < 0 \\ \operatorname{Re} p\left(s_r\left(t\right)\right) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{t \to 1^-} \arg\left[p(-it)\right] - 2\pi = -3\pi \\ t \in \left]1, \sqrt{2}\right[\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} p\left(s_r\left(t\right)\right) > 0 \\ \operatorname{Re} p\left(s_r\left(t\right)\right) < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim\limits_{t \to 1^+} \arg\left[p(-it)\right] - 2\pi = \pi \end{array} \right\}$$

luego nos exige hacer:

$$t \in [1, r[\Rightarrow \theta_r(t) := \arg\left[p(-it)\right] - 4\pi. \qquad [\underline{3}]$$

Consecuentemente, de [$\underline{1}$], [$\underline{2}$] y [$\underline{3}$], concluimos que una buena elección del argumento continuo es

$$\theta_r : [-r, r] \to \mathbb{C}$$

$$\theta_r(t) := \left\{ \begin{array}{ll} \arg\left[p(-it)\right], & \ldots -r \leq t \leq -1 \\ \arg\left[p(-it)\right] - 2\pi, & \ldots -1 \leq t \leq 1 \\ \arg\left[p(-it)\right] - 4\pi, & \ldots 1 \leq t \leq r \end{array} \right.$$

Por tanto, tenemos una función continua θ_r tal que

$$\theta_r(t) \in \operatorname{Arg}\left[(p \circ s_r)(t)\right], \qquad \forall t \in [-r, r].$$

Calculemos sus valores en $-r$ y r:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_r(-r) = \arg\left[p(-i(-r))\right] = \arctan \frac{r^5 - 3r^3 + 2r}{r^8 - r^4 - 6r^2 + 5} \\ \theta_r(r) = \arg\left[p(-ir)\right] - 4\pi = \arctan \frac{-r^5 + 3r^3 - 2r}{r^8 - r^4 - 6r^2 + 5} - 4\pi \end{array} \right\} \Rightarrow$$

se sigue que en el semiplano de la derecha el número de ceros del polinomio p es:

$$N = 8\frac{\pi}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(-4\pi) = 2.$$

Consecuentemente, en el semiplano izquierdo serán 6 el número de ceros que presenta el polinomio p.

Nos resta razonar, y es lo que vamos a hacer, que no tiene raíces reales (de modo que tendrá un cero en cada uno de los cuadrantes 1^o y 4^o y tres ceros en cada uno de los cuadrantes 2^o y 3^o):

$$\begin{array}{rcl} x & \geq & 1 \Rightarrow p(x) = x^8 + \left(x^5 - x^4\right) + 3x^3 + 6x^2 + 2x + 5 > 0 \\ x & \in & [0,1] \Rightarrow p(x) = x^8 + x^5 + 3x^3 + 6x^2 + 2x + \left(5 - x^4\right) > 0 \end{array}$$

luego $x \geq 0 \Rightarrow p(x) \neq 0$.

Razonemos ahora para $p(-x)$, con $x \geq 0$:

$$p(-x) = x^8 - x^5 - x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 2x + 5 \Rightarrow$$

ocurre quesi $x \in [0,1]$:

$$\left\{ \begin{array}{c} 3x^3 + 2x \leq 5 \\ 6x^2 \geq 2x^2 \geq x^4 + x^5 \end{array} \right\} \Rightarrow p(-x) > 0;$$

y si $x \geq 1 \overset{?}{\Rightarrow} x^8 + 6x^2 + 5 > x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x$; pues sí, ésto último es también cierto:

Hagamos $x = 1 + y$ (con $y \geq 0$), entonces

$$\begin{array}{rcl} x^8 + 6x^2 + 5 & = & y^8 + 8y^7 + 28y^6 + 56y^5 + 70y^4 + 56y^3 + 34y^2 + 20y + 12 \\ & > & y^5 + 6y^4 + 17y^3 + 25y^2 + 20y + 7 = x^5 + x^4 + 3x^3 + 2x, \end{array}$$

luego $x \geq 1 \Rightarrow p(-x) > 0$, y se concluye que, efectivamente, no tiene raíces reales. ■

Damos paso ya a los famosos teoremas de Rouché y de Hurwitz. Comenzamos con un lema interesantísimo sobre construcción de ciclos Γ en un abierto Ω que rodeen de una manera convenientemente "ajustada" a un compacto dado K:

Lema. Sea un abierto Ω del plano $\mathbb{C}$ y sea $K \subset \Omega$ un subconjunto compacto. Entonces, existe un ciclo en $\Omega \backslash K$ verificando:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \Omega \text{ e } \operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 1, \forall z \in K.$$

Demostración. Si $\Omega = \mathbb{C}$, para K compacto, existe $r > 0$ tal que $D(0, r) \supset K$. Basta que tomemos $\Gamma := C(0, r+1)$.

Sea $\Omega \neq \mathbb{C}$ y llamemos $\rho := \operatorname{dist}(K, \mathbb{C} \backslash \Omega)$. Sea también $\lambda > 0$ tal que $\lambda\sqrt{2} < \rho$; y consideremos

$$\{C_{p,q} : p, q \in \mathbb{Z}\}$$

la cuadriculación de lado λ en $\mathbb{C}$, donde:

$$C_{p,q} := \{z \in \mathbb{C} : p\lambda \leq \operatorname{Re} z \leq (p+1)\lambda \curlywedge q\lambda \leq \operatorname{Im} z \leq (q+1)\lambda\}.$$

Es claro que el conjunto

$$\{(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : C_{p,q} \cap K \neq \varnothing\}$$

es finito; pongamos

$$\{(p_1, q_1), ..., (p_n, q_n)\}$$

y llamemos $C_k := C_{p_k, q_k}$ $(1 \leq k \leq n)$ a cada una de las cuadrículas correspondientes.

Para cada $k \in \{1, ..., n\}$, consideremos el camino cerrado γ_k dado por la poligonal

$$[p_k\lambda + iq_k\lambda, (p_k+1)\lambda + iq_k\lambda, (p_k+1)\lambda + i(q_k+1)\lambda, p_k\lambda + i(q_k+1)\lambda, p_k\lambda + iq_k\lambda]$$

y el ciclo $\Gamma_1 := \gamma_1 + ... + \gamma_n$. Y observamos cómo cada uno de los n caminos cerrados γ_k, se puede considerar, a su vez, como la suma de sus cuatro lados:

$$\gamma_k = \gamma_k^{(1)} + \gamma_k^{(2)} + \gamma_k^{(3)} + \gamma_k^{(4)}.$$

Llamemos Γ_2 a la cadena suma de todas estas últimas curvas:

$$\Gamma_2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{4} \gamma_k^{(j)}.$$

El ciclo Γ_1 es Ω-nulhomólogo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma_1^* = \cup_{k=1}^n \gamma_k^* = \cup_{k=1}^n \partial C_k = \cup_{k=1}^n C_k \subset \Omega; \text{ y} \\ z \notin \Omega \Rightarrow z \notin \cup_{k=1}^n C_k \Rightarrow \operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0, 1 \leq k \leq n \Rightarrow \operatorname{Ind}_{\Gamma_1}(z) = 0. \end{array} \right.$$

Además, Γ_2 es equivalente a Γ_1.

Sea ahora Γ_3 la cadena que se obtiene al suprimir en Γ_2 los segmentos que cortan a K; es decir:

$$\Gamma_3 := \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{4} \alpha_{k,j} \gamma_k^{(j)}; \qquad \alpha_{k,j} := \left\{ \begin{array}{l} 0,\dots \text{ si } \left(\gamma_k^{(j)}\right)^* \cap K \neq \varnothing \\ 1,\dots \text{ si } \left(\gamma_k^{(j)}\right)^* \cap K = \varnothing \end{array} \right.$$

Ocurre que las cadenas Γ_3 y Γ_2 son equivalentes, y existe un ciclo Γ equivalente a Γ_3 con igual soporte.

Así pues, $\Gamma^* = \Gamma_3^* \subset \Omega \backslash K$, y como Γ es equivalente a Γ_1:

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \Omega.$$

Sea ahora $z \in K \subset \cup_{k=1}^n C_k = \left(\cup_{k=1}^n \overset{\circ}{C}_k \right) \cup (\cup_{k=1}^n \partial C_k)$. Esta descomposición de K, nos permite razonar así: ha de existir $j \in \{1, ..., n\}$ tal que $z \in C_k$. A su vez, tenemos la disyuntiva siguiente:

O bien

$$z \in \overset{\circ}{C}_j \Rightarrow z \notin \Gamma_1^* \implies \text{Ind}_\Gamma(z) = \text{Ind}_{\Gamma_1}(z) = 1;$$

o bien

$$z \in \partial C_j \Rightarrow \exists (z_m) \subset \overset{\circ}{C}_j : z_m \to z,$$

de donde por argumentos de continuidad:

$$1 = \text{Ind}_\Gamma(z_n) \to \text{Ind}_\Gamma(z). \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Teorema de Rouché. Sea Ω un abierto acotado del plano complejo $\mathbb{C}$. Sean φ y ψ dos funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que se verifica

$$|\varphi(z) - \psi(z)| < |\varphi(z)| + |\psi(z)|, \qquad \forall z \in \partial\Omega.$$

Entonces φ y ψ tiene el mismo número de ceros (contados los órdenes de multiplicidad) en Ω.

Demostración. Obsérvese que la desigualdad de la hipótesis obliga a que los ceros de φ y ψ no puedan estar en la frontera $\partial\Omega$. Comenzamos razonando que los conjuntos $\mathfrak{Z}(\varphi)$ y $\mathfrak{Z}(\psi)$ son finitos.

Si $\mathfrak{Z}(\varphi)$ fuera infinito, al ser $\overline{\Omega}$ compacto, $\mathfrak{Z}(\varphi)$ tendría acumulación en $\overline{\Omega}$. Pero como φ no se anula, según hipótesis, en $\partial\Omega$, concluimos que tal punto ha de estar en el interior de Ω. Por tanto, φ es idénticamente nula en alguna componente conexa de Ω; y, por argumentos de continuidad, se anulará en la frontera de esta componente. Pero este conjunto estará en $\partial\Omega$, lo cual es contradictorio.

El razonamiento será literal para $\mathfrak{Z}(\psi)$.

Sea ahora

$$K := \{z \in \overline{\Omega} : |\varphi(z) - \psi(z)| = |\varphi(z)| + |\psi(z)|\}.$$

Como φ y ψ son continuas, se sigue que K es cerrado. Y como es subconjunto de un compacto, $K \subset \overline{\Omega}$, también lo va a ser el propio K.

Además,

$$K \subset \Omega \text{ y } \mathfrak{Z}(\varphi) \cup \mathfrak{Z}(\psi) \subset K.$$

Aplicando el lema anterior: existe un ciclo Γ con soporte $\Gamma^* \subset \Omega \backslash K$, y tal que

$$\text{Ind}_\Gamma(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \Omega \text{ e } \text{Ind}_\Gamma(z) = 1, \forall z \in K.$$

Y aplicando el principio del argumento generalizado a φ y ψ:

$$\frac{1}{i2\pi}\int_\Gamma \frac{\varphi'}{\varphi} = \sum_{a\in\mathfrak{Z}(\varphi)} \mathrm{Ind}_\Gamma(a)\, m(a) = \sum_{a\in\mathfrak{Z}(\varphi)} m(a) = N(\varphi)$$

y

$$\frac{1}{i2\pi}\int_\Gamma \frac{\psi'}{\psi} = \sum_{a\in\mathfrak{Z}(\psi)} \mathrm{Ind}_\Gamma(a)\, m(a) = \sum_{a\in\mathfrak{Z}(\psi)} m(a) = N(\psi),$$

donde $N(\varphi)$ y $N(\psi)$ son, respectivamente, el número de ceros de la citada función, contados el orden de multiplicidad con el que se presentan.

Objetivo: probar que

$$\int_\Gamma \frac{\varphi'}{\varphi} = \int_\Gamma \frac{\psi'}{\psi}. \qquad (*)$$

Sea

$$h(z) := \log\left(\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}\right), \forall z\in\Omega\backslash K.$$

Es una función bien definida:

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} &\in \ ]-\infty,0] \Rightarrow \varphi(z) = -\rho\psi(z) : \rho\geq 0 \\ &\Rightarrow |\varphi(z)-\psi(z)| = (1+\rho)|\psi(z)| = |\varphi(z)|+|\psi(z)| \Rightarrow z\in K;\end{aligned}$$

en conclusión:

$$z\in\Omega\backslash K \Rightarrow \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \in \mathbb{C}\backslash\,]-\infty,0].$$

Por tanto,

$$h\in\mathcal{H}(\Omega\backslash K) : h'(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} - \frac{\psi'(z)}{\psi(z)}, \forall z\in\Omega\backslash K.$$

Pero, que h' admita primitiva en $\Omega\backslash K$ es equivalente a que

$$\int_\Gamma h' = 0,$$

lo cual no es ni más ni menos que $(*)$. **Q.E.D.**

Corolario. Sea Ω un abierto acotado del plano complejo $\mathbb{C}$. Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que (f_n) converge uniformemente a cierta función f que no se anula en ningún punto de $\partial\Omega$. Entonces, existe $n\in\mathbb{N}$ tal que si $m\geq n$, podemos asegurar que las funciones f_m y f tienen el mismo número (finito) de ceros en Ω.

Demostración. Como $\partial\Omega$ es compacto y f no se anula en él, existe $\rho > 0$ tal que

$$|f(z)| \geq \rho, \forall z \in \partial\Omega.$$

Haciendo uso de la hipótesis de la convergencia uniforme:

$$\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f(z) - f_n(z)| < \rho, \forall z \in \partial\Omega.$$

Así, razonando para $n \geq m$, $f, f_n \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathcal{H}\left(\Omega\right)$ y para $z \in \partial\Omega$:

$$|f(z) - f_n(z)| < \rho \leq |f(z)| \leq |f(z)| + |f_n(z)|\,.$$

Usando Rouché, ambas funciones han de tener el mismo número de ceros en Ω. (La misma desigualdad anterior obliga a que no se anulen en la frontera: la tesis es válida en $\overline{\Omega}$.) **Q.E.D.**

Teorema de Hurwitz. Sea Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$. Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en Ω tales que ninguna se anula en ningún punto. Supongamos que (f_n) converge uniformemente sobre los compactos de Ω a cierta función f. Entonces o bien f es idénticamente nula, o bien f no se anula en ningún punto de Ω.

Demostración. La holomorfía de la función f en el abierto Ω nos la da el teorema de convegencia de Weierstrass. Razonaremos por reducción al absurdo:

Supongamos que f no es idénticamente nula en Ω, pero existe $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$. Los ceros de f han de ser aislados:

$$\exists\overline{D(a,r)} \subset \Omega : 0 < |z-a| \leq r \Rightarrow f(z) \neq 0.$$

Podemos aplicar, así, el corolario anterior: para n suficientemente grande, f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a,r)$. Por tanto, f_n tiene, al menos, un cero en $D(a,r)$, lo cual es contradictorio con la hipótesis. **Q.E.D.**

Existen sucesiones de funciones enteras que no se anulan en ningún punto del plano $\mathbb{C}$, y que, sin embargo, convergen a la constantemente cero (en la topología de $\mathcal{H}\left(\mathbb{C}\right)$): por ejemplo, $f_n(z) := 1/n, \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Corolario. Sea Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$. Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas e inyectivas en Ω. Supongamos que (f_n) converge uniformemente sobre los compactos de Ω a cierta función f. Entonces o bien f es inyectiva, o bien f es constante en Ω.

Demostración. Supongamos que f no sea constante. Tomamos $a \in \Omega$ fijo, pero arbitrario. En el dominio $\Omega\backslash\{a\}$ definimos las funciones:

$$\begin{aligned} g, g_n &: \Omega\backslash\{a\} \to \mathbb{C}; \\ g\left(z\right) &: = f(z) - f(a), \\ g_n(z) &: = f_n(z) - f_n(a), \forall z \in \Omega\backslash\{a\}. \end{aligned}$$

Claramente la sucesión (g_n) converge a g en la topología de $\mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$. En consecuencia, como la sucesión (g_n) no se anula en ningún punto de $\Omega\backslash\{a\}$, en aplicación del teorema de Hurwitz, o bien g es idénticamente nula, lo cual no puede suceder al ser f no constante, o bien g no se anula en ningún punto de $\Omega\backslash\{a\}$, de donde se sigue la inyectividad de f (debido a la arbitrariedad de a). **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea una función continua en el disco unidad cerrado y holomorfa en el disco unidad abierto, $f \in \mathcal{C}\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$. Supongamos que f lleva la frontera del disco unidad en el interior del propio disco, $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{D}$. Prueba que f tiene, exactamente, un punto fijo en el disco unidad abierto $\mathbb{D}$.

2. Si φ es una función holomorfa sobre un abierto Ω tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$ y verifica la condición $\varphi\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \subset \mathbb{D}$, ¿cuántas raíces tiene la ecuación

$$z = \varphi(z)$$

en el disco unidad $\mathbb{D}$? ¿Cambia algo si la condición es sólo $\varphi(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$?

3. Prueba que todos los ceros del polinomio

$$p(z) := z^8 + 3z^3 + 7z + 5$$

se hallan situados en el anillo $A\left(0; \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y que, exactamente, dos de ellos se encuentran en el primer cuadrante.

4. Prueba que todos los ceros del polinomio

$$p(z) := z^4 + iz^3 + 1$$

pertenecen al disco $D(0, \frac{3}{2})$ y determina cuántos de ellos se hallan en el primer cuadrante.

5. Prueba que para $e < a \in \mathbb{R}$, la ecuación $e^z = az^n$ tiene, exactamente, n soluciones distintas en el disco unidad $\mathbb{D}$.

6. Determina el número de ceros del polinomio

$$p(z) := z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$$

en el semiplano de la derecha.

7. Prueba que el polinomio

$$p_n(z) := 1 + 2z + 3z^2 + ... + nz^{n-1},$$

para $\rho \in \left]0, 1\right[$ y n suficientemente grande, no tiene ceros en el disco $D(0, \rho)$.

8. Localiza en el disco $D(0,R)$, $0<R$, el número de ceros del polinomio

$$p(z) := z^4 + iz^2 + 2.$$

9. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación

$$e^z - 4z^n + 1 = 0$$

en el disco unidad $\mathbb{D}$ según los valores del natural n?

10. Prueba que la ecuación

$$z = \lambda - e^{-z}$$

tiene (con $\lambda > 1$) una única raíz en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Además, se prueba que tal raíz es real.

11. Evalúa la integral

$$\int_{\mathbb{T}} ze^z \tan(\pi z)\, dz.$$

12. Evalúa la integral

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{\cosh z}{\tan z} dz.$$

13. Sean a y b dos números reales no nulos. Determínese, para cada natural n, el número de ceros del polinomio

$$p(z) := z^{2n} + a^2 z^{2n-1} + b^2$$

que se hallen situados en el semiplano de la derecha.

14. Determina el número de ceros en el disco unidad $\mathbb{D}$ de cada uno de los dos polinomios siguientes:

a. $p(z) := z^4 - 5z + 1$; b. $q(z) := z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$.

¿Cuántas de las raíces de p se hallan en el anillo $A(0;1,2)$?

15. Determina el número de ceros del polinomio

$$p(z) := z^6 + z^5 + 6z^4 + 5z^3 + 8z^2 + 4z + 1$$

en el semiplano de la derecha.

16. Prueba que la función $f_n : \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, dada por

$$f_n(z) := 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z} + ... + \frac{1}{n!z^n},$$

para $\rho \in \,]0,1[$ y n suficientemente grande, tiene todos sus ceros en el disco $D(0,\rho)$.

17. Determina el número de ceros del polinomio

$$p(z) := z^6 - 3z^5 + 2z^2 + 5$$

en el semiplano de la derecha.

18. Hallar la distribución por cuadrantes de los ceros del polinomio

$$p(z) := z^8 + z^5 - z^4 + 3z^3 + 6z^2 + 2z + 5.$$

19. Calcula el número de ceros en el disco unidad $\mathbb{D}$ de los polinomios

a. $p(z) := z^5 - 2z^4 + z^3 - 6z^2 + 1$; b. $q(z) := z^5 - 2z^4 + z^3 - 5z^2 + 1$.

20. Prueba que el polinomio

$$p(z) := z^6 - 5z^2 + 10$$

tiene todas sus raíces en el anillo $A(0; 1, 2)$.

21. Usa el teorema de Rouché para dar otra demostración del Teorema Fundamental del Álgebra.

22. Halla el número de ceros del polinomio

a. $p(z) := z^8 - 4z^5 + z^2 - 1$; b. $q(z) := z^9 - 2z^6 + z^2 - 8z - 2$;
c. $r(z) := 2z^5 - z^3 + 3z^2 - z + 8$; d. $s(z) := z^7 - 5z^4 + z^2 - 2$.

en el interior del disco unidad $\mathbb{D}$.

23. ¿Cuántos ceros del polinomio

$$p(z) := z^4 - 8z + 10$$

se encuentran en el disco unidad $\mathbb{D}$? ¿Y cuántos en el anillo $A\,(0; 1, 3)$?

24. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación

$$e^z - 4z^n + 1 = 0$$

en el disco unidad $\mathbb{D}$ según los valores del natural n?

25. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación

$$e^z - az^n = 0$$

en el disco $D(0, R)$ según los valores del natural n (con $a \in \mathbb{C}$, fijo) si se verifica la condición $|a| > \frac{e^R}{R^n}$?

26. Prueba que la ecuación

$$z = \lambda - e^{-z}$$

tiene (con $\lambda > 1$) una única raíz en el semiplano $\operatorname{Re} z > 0$. Además, se prueba que tal raíz es real.

27. Sea f un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$. Prueba que f es sobreyectiva. De hecho, puedes probar que la ecuación

$$f(z) = w$$

tiene n raíces para cada $w \in \mathbb{C}$.

28. Halla el número de raíces en el disco unidad $\mathbb{D}$ de la ecuación

$$z^8 - 6z^6 - z^3 + 2 = 0.$$

29. Halla el número de raíces en el anillo $A(0; 2, 3)$ de la ecuación

$$4z^4 - 29z^2 + 25 = 0.$$

30. Con $\alpha \in D(0, 9)$, ¿cuántas raíces tiene en el disco unidad $\mathbb{D}$ la ecuación

$$z^6 - \alpha z + 10 = 0?$$

Haciendo $\alpha = 8$, ¿cuántas raíces tendrá tal ecuación en el anillo $A(0; 1, 3)$?

31. Sea φ es una función holomorfa sobre un abierto Ω tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$ y verifica las condiciones $f(0) = 1$ y $\varphi(\mathbb{T}) \subset \mathbb{C} \backslash \overline{D(0, 2)}$. ¿Cuántos ceros tiene φ en el disco unidad $\mathbb{D}$?

32. Considera el polinomio $f(z) := z^3 - 4z^2 + z - 4$. ¿Cómo habrá de elegirse $r > 0$ para que f tenga, exactamente, dos soluciones en $D(0, r)$?

33. Localiza los ceros del polinomio $z^4 - z + 5 = 0$.

34. Sean dos funciones enteras f y g verificando que

$$|f(z)| \leq |g(z)|, \forall z \in \mathbb{C}.$$

¿Qué conclusiones se pueden sacar?

35. Sea f una función entera para la que existe constantes reales positivas A, B, k tales que

$$|f(z)| \leq A + b|z|^k, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Prueba que tal f debe ser un polinomio. Aplicación: Prueba que ha de ser constante una función entera f que verifique

$$|z| \geq 1 \Rightarrow |f(z)| \leq 5\sqrt{|z|}.$$

36. Prueba el siguiente teorema de Hurwitz: Sea (f_n) una sucesión (de funciones holomorfas) en un dominio Ω uniformemente convergente a una función f no idénticamente nula. Si $a \in \Omega$ es un cero de f, entonces para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar un natural m tal que

$$0 \in f_n(D(a, \varepsilon) \cap \Omega), \quad \forall n \geq m.$$

37. Evalúa la integral

$$\int_{C(0,3)} \frac{\sin(\pi z/2)\left[3z^2-4z-1\right]}{z^3-2z^2-z+2}dz.$$

38. Evalúa la integral

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{1}{z^3+1}dz.$$

39. Sea un camino γ en el plano y sean dados $n+1$ números complejos $a_0, a_1, ..., a_n$. Supongamos que para $z \in \gamma^*$ y que para algún $k \in \{0, 1, ..., n\}$, se tiene que

$$\left|a_k z^k\right| > \left|\sum_{\substack{j=0 \\ j\neq k}}^{n} a_j z^j\right|.$$

Entonces, para el polinomio

$$p(z) := \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

se prueba que

i. tiene k ceros en el interior de $\gamma \Leftrightarrow z = 0$ está en el interior de la curva γ.

ii. no tiene ceros en el interior de $\gamma \Leftrightarrow z = 0$ no está en el interior de la curva γ.

40. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación

$$z^n + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

en el disco unidad $\mathbb{D}$ si $|a_2| > |a_1| + |a_0| + 1$?

41. Sean dados $n+1$ números reales verificando $0 < a_0 < a_1 < ... < a_n$. Prueba que todas las raíces del polinomio

$$p(z) := \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

están en el disco unidad $\mathbb{D}$.

42. Sea f un polinomio de grado $n \in \mathbb{N}$. Prueba que f es sobreyectiva. De hecho, puedes probar que la ecuación

$$f(z) = w$$

tiene n raíces para cada $w \in \mathbb{C}$.

43. Prueba que la argumentación siguiente es falsa: *para cada función holomorfa f en el anillo $A\left(0; \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ existe un polinomio p tal que*

$$|f(z) - p(z)| < \frac{1}{2}, \quad \forall z \in \mathbb{T}.$$

44. Sean, para enteros $n = 1, -2, 3, -4, ..,$ los polinomios

$$\text{a. } p_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}; \qquad \text{b. } q_n(z) := p_n(z) - 1.$$

¿Qué se puede decir de la situación de los ceros de uno y otro para $|n|$ suficientemente grande?

45. Evalúa la integral

$$\int_{C\left(1,\frac{1}{5}\right)} \frac{3(z-1)^2 - 1}{z^3 - 3z^2 + 4z - 2} dz.$$