Tema 7.2: Teorema de los residuos. Aplicaciones del cálculo con residuos

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

La teoría de residuos proporciona una técnica de evaluación (rápida y) efectiva de integrales de la forma

$$\int_\gamma f : \left\{ \begin{array}{l} \gamma \text{ camino cerrado o ciclo} \\ f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A) : A = \{z \in \Omega : z \text{ singularidad aislada de } f\} \end{array} \right. \qquad [*]$$

El punto esencial de esta teoría lo encontramos en el hecho de que Laurent nos permite expresiones de la forma

$$c_n = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}} dw, \qquad \forall n \in \mathbb{Z}$$

para (f, γ) en las condiciones $[*]$ (con la curva γ alrededor de la singularidad a): resulta que, si integramos en el desarrollo de Laurent de f en un entorno punteado de la singularidad a, tendremos que

$$\int_\gamma f = \int_\gamma \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n \right) dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \int_\gamma (z-a)^n dz = c_{-1} i2\pi.$$

Es decir, todos los términos desaparecen, menos uno, el "residuo" que queda, c_{-1}. Surge así la importante fórmula

$$c_{-1} = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma f$$

que nos habilita para la obtención de integrales complejas sobre curvas.

Definición. Dado un abierto Ω del plano complejo, para $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$, llamamos residuo de la función f en el punto a al término c_{-1} del desarrollo en serie de Laurent de f en un entorno (perforado) de a. Se notará

$$\operatorname{Res}(f, a) := c_{-1}.$$

A los puntos $a \in \Omega$ donde f no es holomorfa se les llama singularidades de f. Diremos que f es holomorfa en Ω salvo singularidades si $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A)$ donde

$A = \{z \in \Omega : z$ singularidad aislada de $f\}$. (Recordemos que los puntos de no holomorfía, es decir, de singularidad, se clasifican en polos, si $\exists \lim_{z\to a} f(z) = \infty$, y en esenciales, si $\nexists \lim_{z\to a} f(z)$.)

Será de sumo interés que las singularidades sean aisladas, que no se acumulen en Ω (¿por qué?). Y nos acostumbraremos a escribir por $f \in \mathcal{H}_s(\Omega)$ al conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω salvo singularidades:

$$\mathcal{H}_s(\Omega) := \cup \{\mathcal{H}(\Omega \backslash A) : A \subset \Omega, A' \cap \Omega = \varnothing\}.$$

Por ejemplo, las funciones racionales son holomorfas en $\mathbb{C}$ salvo singularidades. También lo son las llamadas funciones meromorfas, que son los cocientes de funciones enteras (corolario al teorema de factorización de Weierstrass en el tema 4.7).

Propiedades primeras de los residuos.

a. La representación integral de los coeficientes de la serie de Laurent para $f \in \mathcal{H}(D(a,r)\backslash\{a\})$ nos dice que

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} f, \qquad \forall \rho \in]0,r[. \qquad [**]$$

b. Más general: si γ es un camino cerrado o un ciclo en $\Omega := D(a,r)\backslash\{a\}$, con

$$\operatorname{Ind}_\gamma(a) = 1 \text{ e } \operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0, \forall z \notin D(a,r),$$

entonces aún vale $[**]$.

c. Aplicación del teorema de existencia de primitivas a la teoría de residuos: Sea $k \in \mathbb{Z}$. Entonces, son equivalentes:

i. $\operatorname{Res}(f,a) = k$.

ii. La función $z \to f(z) - \frac{k}{z-a}$ admite primitiva en un entorno perforado de a.

i. $\Rightarrow$ ii. La función $z \to f(z) - \frac{k}{z-a}$ admite un desarrollo en serie de Laurent en un entorno perforado de a; pongamos

$$f(z) - \frac{k}{z-a} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n,$$

el cual admite como primitiva a la función dada por la serie

$$F(z) := \sum_{-1\neq n=-\infty}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(z-a)^{n+1}.$$

ii. $\Rightarrow$ i. Por admitir primitiva en, pongamos, $D(a,r)\backslash\{a\}$, para cada $\rho \in]0,r[$, su integral sobre cada camino cerrado en $D(a,r)\backslash\{a\}$ -en particular, para $C(0,\rho)$-, es nula. Pero también

$$\int_{C(a,\rho)} \left(f(z) - \frac{k}{z-a} \right) dz = i2\pi \left(\mathrm{Res}\,(f,a) - k \right),$$

de donde $\mathrm{Res}(f,a) = k$. ■

Y ya, el gran esperado:

Teorema de los Residuos Consideremos $f \in \mathcal{H}_s(\Omega)$ una función holomorfa salvo singularidades en un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$. Llamemos $A = \{z \in \Omega : z \text{ singularidad aislada de } f\}$. Entonces, para cada Γ ciclo nulhomólogo en $\Omega\backslash A$ se verifican:

i. $\{a \in A : \ \mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\}$ es un conjunto finito.

ii. $\int_\Gamma f = i2\pi \sum_{a\in A} \mathrm{Res}(f,a)\mathrm{Ind}_\Gamma(a)$. (Aquí: $\sum_\varnothing := 0$.)

Demostración. **i.** El conjunto

$$K := \Gamma^* \cup \{z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma^* : \ \mathrm{Ind}_\Gamma(z) \neq 0\},$$

es un cerrado, pues su complementario

$$\{z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma^* : \ \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}$$

es un abierto. (¿Por qué?).

Llamemos

$$M := \max\{|w| : w \in \Gamma^*\}.$$

Así, si $z \in K$, entonces $|z| \leq M$ o bien $\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \neq 0$. En cualquier caso,

$$\{z \in \mathbb{C} : |z| > M\} \subset \mathbb{C}\backslash K,$$

y, por tanto, $K \subset \overline{D(0,M)}$. En resumen, K es compacto de $\mathbb{C}$.

Pero, por otro lado, como Γ es Ω-nulhomólogo, $K \subset \Omega$.

Finalmente, si $K \cap A$ fuese infinito, por Bolzano-Weierstrass, sería $A' \cap \Omega \neq \varnothing$, lo cual no puede suceder al tratarse de singularidades aisladas. Luego $K \cap A$ es finito y i. es cierto.

ii. La serie a sumar es finita, por lo probado en i.; podemos poner, por tanto,

$$\{a \in A : \ \mathrm{Ind}_\Gamma(a) \neq 0\} = \{a_1, ..., a_n\}.$$

Llamemos

$$m_k := \ \mathrm{Ind}_\Gamma(a_k) \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}; \qquad 1 \leq k \leq n.$$

Para cada k existe $\rho_k > 0$ tal que $\overline{D(a_k,\rho_k)} \cap A = \{a_k\}$ y $\overline{D(a_k,\rho_k)} \subset \Omega$. (Razónese.) Sean ahora, también, para cada k:

$$\gamma_k := -m_k C(a_k, \rho_k);$$

y definamos el ciclo

$$\Sigma := \Gamma + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k.$$

Veamos que es $\Omega \backslash A$-nulhomólogo, pues, en tal caso, la fórmula general de Cauchy nos va a decir que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} f = \int_{\Gamma} f - \sum_{k=1}^{n} m_k \int_{C(a_k,\rho_k)} f \\ &= \int_{\Gamma} f - i2\pi \sum_{a\in A} \operatorname{Res}(f,a) \operatorname{Ind}_{\Gamma}(a). \end{aligned}$$

Vamos, por tanto, a ver que Σ es $\Omega\backslash A$-nulhomólogo: claramente, $\Sigma^* \subset \Omega\backslash A$. Y podemos razonar en estas dos situaciones:

1. Si $z \notin \Omega$, entonces $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$ y, también, si $z \notin \overline{D(a_k,\rho_k)}$, entonces $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0$ para $1 \leq k \leq n$. En cualquier caso,

$$z \notin \Omega \Rightarrow \operatorname{Ind}_{\Sigma}(z) = 0.$$

2. $z \in A \Rightarrow z = a \in A \Rightarrow$ otras dos posibilidades:

2.1 Si $z = a_h$ para $h \in \{1,...,n\}$, entonces $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = m_h$. Pero:

$$\left\{ \begin{array}{l} k \neq h \Rightarrow a_h \notin D(a_k,\rho_k) \Rightarrow \operatorname{Ind}_{\gamma_k}(a_h) = 0 \\ k = h \Rightarrow \operatorname{Ind}_{\gamma_h}(a_h) = -m_h \end{array} \right\} \Rightarrow \operatorname{Ind}_{\Sigma}(a) = 0.$$

2.2 Si $z \neq a_h$ para $h \in \{1,...,n\}$, entonces $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = 0$; y si $z \notin \overline{D(a_k,\rho_k)}$, entonces $\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0$ para $1 \leq k \leq n$. Por tanto, también en este caso, es $\operatorname{Ind}_{\Sigma}(a) = 0$. **Q.E.D.**

En este resultado rivalizan interés y... engorro: ¡hay que calcular tantas series de Laurent para f como singularidades aisladas tenga en Ω para calcular la correspondiente integral! (¿Acaso a ti te consuela el hecho de que A esté en biyección con una parte finita de $\mathbb{N}$!) Por tanto, se hacen imprescindibles algunos procedimientos satisfactorios para el cálculo de residuos de manera expeditiva.

Proposición. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$. Supongamos que f tiene un polo de orden k en a. Entonces

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k f(z) \right].$$

Demostración. Consideremos $\overline{D(a,R)} \subset \Omega$. Sabemos que

$$f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \forall z \in D(a,R)\backslash\{a\}.$$

Sea la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$, dada por

$$g(z) := \left\{ \begin{array}{ll} (z-a)^k f(z), ... & z \in \Omega \backslash \{a\} \\ a_{-k}, ... & z = a \end{array} \right. .$$

Observemos que $g \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$ y $g \in \mathcal{C}(\Omega)$ (justifíquese), luego el teorema de singularidades de Riemann es quien nos dice que $g \in \mathcal{H}(\Omega)$.

En consecuencia:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(f, a) &= a_{-1} = \frac{g^{k-1)}(a)}{(k-1)!} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} g^{k-1)}(z) \\ &= \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[(z-a)^k f(z) \right]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo. Evalúa la integral compleja

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2}$$

donde γ es el camino cerrado formado por $[-R, R]$ y la parte parte superior de la circunferencia de centro 0 y radio $R > 1$, recorrido en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj).

Resolución. La función $f : z \to \frac{1}{(z^2+1)^2}$ presenta dos polos de orden 2; pero a los efectos que nos interesan, sólo es relevante $z = i$. (¿Por qué?) Consiste pues, según el teorema de los residuos en calcular $\operatorname{Res}(f, i)$, pues el teorema nos dice que

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2} = i2\pi \operatorname{Res}(f, i).$$

Consiste, por tanto, en derivar la función

$$\varphi(z) = (z-i)^2 f(z),$$

evaluar su límite en $z = i$, y multiplicarlo por $\frac{1}{(2-1)!} = 1$: ése será el residuo buscado.

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= (z-i)^2 f(z) = (z+i)^{-2} \\ &\Rightarrow \varphi'(z) = -2(z+i)^{-3} \Rightarrow \varphi'(i) = -\frac{i}{4} \\ &\Rightarrow \operatorname{Res}(f, i) = -\frac{i}{4}, \end{aligned}$$

de donde

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \pi/2. \quad \blacksquare$$

Atención: Aún puede ocurrir que este mismo método sea engorroso para determinados casos. Por ejemplo: si buscamos el residuo en el origen de la función $z \xrightarrow{f} \frac{1}{z^2 \sin(z)}$, tendremos un polo triple. Así, calcular

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[z^3 f(z)\right]$$

es muy complicado (puedes intentarlo y, así, lo confirmas). En este caso, puede merecer la pena un recurso alternativo *ad hoc*:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2 \sin(z)} &= \frac{1}{z^2}\left(z - \frac{z^3}{6} + O\left(z^5\right)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1 - \frac{z^2}{6} + O\left(z^4\right)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{z^3}\left(1 + \frac{z^2}{6} + O\left(z^4\right)\right) \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{Res}\,(f, a) = 1/6.
\end{aligned}$$

Corolario. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}\left(\Omega \backslash \{a\}\right)$. Supongamos que

$$\exists \lim_{z \to a} (z - a)\, f(z) \in \mathbb{C}.$$

Entonces

$$\mathrm{Res}\,(f, a) = \lim_{z \to a} (z - a)\, f(z).$$

Demostración. Si tal límite, que existe, vale 0, tendremos que f tiene una regularidad en el punto a. (Y hemos concluido: $\mathrm{Res}(f, a) = 0$.) Si, por el contrario, es no nulo, aplicamos la proposición anterior, pues f tiene, en este caso, un polo simple en a. **Q.E.D.**

Ejemplo. Evaluación de la integral

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z^2 + 1} dz$$

donde γ es cualquier camino cerrado alrededor de i y $-i$.

Resolución. Observamos que la función $f(z) := \frac{\sin(\pi z)}{z^2+1}$ tiene polos simples en los puntos indicados. Por tanto, es susceptible de serle aplicado el corolario anterior:

$$z = -i \Rightarrow \ \mathrm{Res}\,(f, -i) = \lim_{z \to -i} (z + i)\, f(z) = \lim_{z \to -i} \frac{\sin(\pi z)}{z - i} = \frac{\sinh(\pi)}{2}$$

(donde hemos usado la relación del seno trigonométrico con el hiperbólico: $\sin(iz) = i \sinh(z)$). De modo análogo,

$$z = i \Rightarrow \ \mathrm{Res}\,(f, i) = \frac{\sinh(\pi)}{2}.$$

En consecuencia:

$$\int_\gamma \frac{\sin(\pi z)}{z^2+1}dz = i2\pi\,\{\ \mathrm{Res}(f,-i) + \ \mathrm{Res}(f,i)\} = i2\pi \sinh(\pi)\,. \qquad \blacksquare$$

Observación: Esta técnica todavía puede resultar engorrosa, aún para casos "sencillos" de polos simples como pone de manifiesto el ejemplo de la función

$$z \to \frac{1}{z^4+1}$$

si la queremos integrar sobre el camino cerrado γ formado por $[-R, R]$ y la parte parte superior de la circunferencia de centro 0 y radio $R > 1$, recorrido en el sentido positivo (contrario a las agujas del reloj). (Aquí $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ son los dos polos simples a considerar.)

Para éste y otros casos, es útil la siguiente

Proposición. Sean g y h funciones holomorfas en un disco $D(a,r)$. Si $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$ y $h'(a) \neq 0$, entonces $f := \frac{g}{h}$ tiene un polo simple en a, y

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

Demostración. Por ser polo simple (confirma que, en efecto, lo es):

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}(f,a) &= \lim_{z\to a}(z-a)\,f(z) \\ &= \lim_{z\to a}\frac{z-a}{h(z)-0}g(z) = \frac{g(a)}{h'(a)}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Ejemplo. Cálculo de

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4+1}dz$$

cuando queremos integrar sobre el camino cerrado γ formado por $[-R, R]$ y la parte parte superior de la circunferencia de centro 0 y radio $R > 1$, recorrido en el sentido positivo.

Resolución. Observamos cómo los polos simples de la función f a integrar, y relevantes para la integración, son $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ y $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$, que están en la componente conexa acotada de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$. Para cada uno de ellos:

$$\mathrm{Res}(f,z_j) = \frac{g(z_j)}{h'(z_j)} = \frac{1}{4z_j^3}.$$

De este modo:

$$\mathrm{Res}(f,z_1) = \frac{1}{4e^{i3\pi/4}} = \frac{1}{4}e^{-i3\pi/4} = \frac{1}{4}\left(\cos\frac{3}{4}\pi - \ \mathrm{sen}\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1+i}{4\sqrt{2}},$$

y, análogamente,

$$\text{Res}\,(f, z_2) = \frac{1-i}{4\sqrt{2}};$$

de donde el teorema de los residuos concluye que:

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4+1} dz = i2\pi \left\{\text{Res}\,(f, z_1) + \text{Res}\,(f, z_2)\right\} = \pi/\sqrt{2}. \qquad \blacksquare$$

Otro ejemplo. Calcula $\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2-1)z^2}$

Resolución. Llamemos f a la función a integrar. Resulta que

$$f \in \mathcal{H}\,(\mathbb{C}\backslash\{-1,0,1\}) \text{ con } \{-1,0,1\}' = \varnothing.$$

Por tanto, podemos aplicar el teorema de los residuos:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2-1)\,z^2} = i2\pi \left\{\text{Res}\,(f,-1) + \text{Res}\,(f,0) + \text{Res}\,(f,1)\right\}.$$

Para 1 y -1 razonamos como polos de orden 1 que son:

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f,-1) &= \lim_{z\to-1} (z+1)\,f(z) = \lim_{z\to-1} \frac{1}{(z-1)\,z^2} = -\frac{1}{2} \\
\text{Res}\,(f,1) &= \lim_{z\to 1} (z-1)\,f(z) = \lim_{z\to-1} \frac{1}{(z+1)\,z^2} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

y como en el origen se trata de un polo de orden 2:

$$\begin{aligned}
\text{Res}\,(f,0) &= \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[z^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}\left[\left(z^2-1\right)^{-1}\right] = \\
&= \lim_{z\to 0} \frac{2z}{\left(1-z^2\right)^2} = 0.
\end{aligned}$$

En conclusión:

$$\int_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2-1)\,z^2} = 0. \qquad \blacksquare$$

Otro más, aún. Calcula $\int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{\sin(z)}$

Resolución. Llamamos $f(z) = \frac{1}{\sin(z)}$ para $z \in \mathbb{C}\backslash\pi\mathbb{Z}$. Como $(\pi\mathbb{Z})' = \varnothing$, podemos aplicar el teorema de los residuos. Pero, además, sólo nos interesa el residuo en el origen (¿por qué?). Por tanto,

$$\text{Res}\left(\frac{1}{\sin(z)}, 0\right) = \frac{1}{\sin'(0)} = \frac{1}{\cos(0)} = 1,$$

e

$$\text{Ind}_{\mathbb{T}}\,(k\pi) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$$

En resumen:

$$\int_{\mathbb{T}} \frac{dz}{\sin(z)} = i2\pi \ \mathrm{Res}(\csc, 0) \ \mathrm{Ind}_{\mathbb{T}}(0) = i2\pi. \qquad \blacksquare$$

La proposición anterior admite el siguiente generalización a modo de corolario:

Corolario. Sean g y h funciones holomorfas en un disco $D(a, r)$. Supongamos que a es, respectivamente, un cero de orden k y de orden $k+1$, para g y h. Entonces, $\frac{g}{h}$ tiene un polo simple en a, y

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g}{h}, a\right) = (k+1) \frac{g^{k)}(a)}{h^{k+1)}(a)}.$$

Demostración. El teorema de Taylor es la clave. Y otra demostración alternativa puede darse, también, vía teorema de L'Hôpital. $\blacksquare$

A modo de ejecicios al lector, dejamos enunciadas las tres siguientes proposiciones (que no serán usadas en ningún momento).

Proposición. Sean g y h funciones holomorfas en un disco $D(a, r)$. Si $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) = 0$ y $h''(a) \neq 0$, entonces $f := \frac{g}{h}$ tiene un polo de orden dos en a, y

$$\mathrm{Res}(f, a) = 2\frac{g'(a)}{h''(a)} - \frac{2}{3}\frac{g(a)h'''(a)}{[h''(a)]^2}.$$

Proposición. Sean g y h funciones holomorfas en un disco $D(a, r)$. Si $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$, $h(a) = 0$, $h'(a) = 0$, $h''(a) = 0$ y $h'''(a) \neq 0$, entonces $f := \frac{g}{h}$ tiene un polo de orden dos en a, y

$$\mathrm{Res}(f, a) = 3\frac{g''(a)}{h'''(a)} - \frac{2}{3}\frac{g'(a)h^{4)}(a)}{[h'''(a)]^2}.$$

Proposición. Sean g y h funciones holomorfas en un disco $D(a, r)$. Si $g(a) \neq 0$, $h(a) = 0 = h'(a) = \cdots = h^{k-1)}(a) = 0$ y $h^{k)}(a) \neq 0$, entonces $f := \frac{g}{h}$ tiene un polo de orden k en a, y el número $\mathrm{Res}(f, a)$ vale:

$$\left[\frac{k!}{h^{k)}(a)}\right]^k \times \begin{vmatrix} \frac{h^{k)}(a)}{k!} & 0 & 0 & \cdots & 0 & g(a) \\ \frac{h^{k+1)}(a)}{(k+1)!} & \frac{h^{k)}(a)}{k!} & 0 & \cdots & 0 & g'(a) \\ \frac{h^{k+2)}(a)}{(k+2)!} & \frac{h^{k+1)}(a)}{(k+1)!} & \frac{h^{k)}(a)}{k!} & \cdots & 0 & \frac{g''(a)}{2!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{h^{2k-1)}(a)}{(2k-1)!} & \frac{h^{2k-2)}(a)}{(2k-2)!} & \frac{h^{2k-3)}(a)}{(2k-3)!} & \cdots & \frac{h^{k+1)}(a)}{(k+1)!} & \frac{g^{k-1)}(a)}{(k-1)!} \end{vmatrix}$$

donde $|\circ|$ denota el determinante de una matriz cuadrada de orden k.

Aplicaciones del Cálculo con Residuos.

Uno de los hechos verdaderamente atractivos del análisis complejo es su capacidad de darnos demostraciones elegantes, a la vez que sencillas, de resultados del análisis real. Concretamente, el cálculo de residuos nos va a proporcionar una herramienta eficaz para el cálculo de algunas integrales definidas y de algunas sumas de series.

Resultará especialmente interesante cuando no podamos obtener una primitiva en términos de funciones elementales. Pero, incluso en alguno de estos casos, nos pueden ahorrar trabajo.

Lo más llamativo, y sorprendente, es que se aplique el cálculo de integrales complejas sobre curvas cerradas para calcular integrales reales sobre la recta real. En cada caso, veremos cómo se aplican diversas técnicas especiales para este fin. Las agrupamos en cuatro métodos.

I. Contorno semicircular para cálculo de integral real.

El teorema de los residuos nos dijo que

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

donde γ es la suma de las curvas

$$\begin{array}{rcll} \gamma_1(t) & : & = t, & -r \le t \le r \\ \gamma_2(t) & : & = re^{it}, & 0 < t < \pi \end{array}$$

para $r > 1$. Así,

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_{-r}^{r} \frac{dt}{t^4+1} + \int_0^\pi \frac{ire^{it}}{r^4e^{i4t}+1}dt.$$

Por tanto, y como

$$\left| \int_0^\pi \frac{ire^{it}}{r^4e^{i4t}+1}dt \right| \le \frac{\pi r}{r^4-1} \to 0, \qquad r \to +\infty,$$

obtendríamos, tomando límites formales, el llamado valor principal de Cauchy:

$$\lim_{0<x\to+\infty} \int_{-x}^{x} \frac{dt}{t^4+1} =: (vp) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$

Pero, a su vez, y como

$$\frac{1}{t^4+1} \simeq \frac{1}{t^4}, \qquad t \to +\infty,$$

las integrales $\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{t^4+1}$ e $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$ convergen (es decir, existe

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \int_a^b f$$

tomando límites por separado en ambos extremos). Por tanto, podemos concluir que el valor principal de Cauchy para $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1}$ es, realmente, el valor de la propia integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}. \qquad \blacksquare$$

(Resulta que el valor $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4+1} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ se puede obtener igualmente por métodos reales, pero son largos y tediosos.)

Otro ejemplo: Comprobemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Con γ como arriba, pudimos obtener (en el primero de los ejemplos) que

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z^2+1)^2} = \frac{\pi}{2};$$

concretamente

$$\frac{\pi}{2} = \int_{-r}^{r} \frac{dt}{(t^2+1)^2} + \int_0^\pi \frac{ire^{it}}{(r^2e^{i2t}+1)^2}dt,$$

donde

$$\left| \int_0^\pi \frac{ire^{it}}{(r^2e^{i2t}+1)^2}dt \right| \leq \frac{\pi r}{(r^2-1)^2} \to 0, \qquad r \to +\infty,$$

y así

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

(Hemos dispensado el uso del valor principal de Cauchy para el cálculo de la integral; pero, la integral es, también ahora, convergente.) $\blacksquare$

Ahora, en este ejemplo, las técnicas reales no son ya tan complicadas: haciendo el cambio de variables $t = \tan\theta$, tendremos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{(t^2+1)^2} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{\sec^2\theta}{\sec^4\theta} d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Las dos integrales que aparecen en los ejemplos precedentes son casos particulares del siguiente teorema:

Teorema. Sea f una función compleja de variable compleja definida sobre un abierto Ω que contiene al cierre del semiplano superior de $\mathbb{C}$. Supongamos que se verifican:

a. f es meromorfa en Ω con un número finito de polos $p_1, ..., p_n$.

b. f no tiene polos en el eje real ($\operatorname{Im} p_k > 0, 1 \leq k \leq n$).

c. $zf(z) \to 0$ uniformemente en Ω, si $|z| \to +\infty$.

d. $\int_0^{+\infty} f$ e $\int_{-\infty}^0 f$ convergen.

Entonces
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f = i2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, p_k).$$

Demostración. Sea γ la frontera del semicírculo superior de centro en el origen y radio arbitrario $r > 0$:

$$\int_\gamma f = \int_{-r}^{r} f + \int_0^\pi f\left(re^{i\theta}\right) ire^{i\theta}\theta d\theta.$$

Por c., dado $\varepsilon > 0$, existe $k > 0$ tal que

$$z \in \Omega : |z| > k \Rightarrow |zf(z)| < \varepsilon.$$

Así,
$$r > k \Rightarrow \left|\int_0^\pi f\left(re^{i\theta}\right) ire^{i\theta} d\theta\right| < \pi\varepsilon,$$

luego haciendo $r \to +\infty$ y aplicando el teorema de los residuos, nos queda:

$$(vp)\int_{-\infty}^{+\infty} f = i2\pi \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, p_k).$$

Finalmente, la condición d. nos hace despreciar (vp). **Q.E.D.**

Ejemplo. Calculemos
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 2x + 4} dx$$

Resolución. No siempre va a ser fácil dar con la función compleja a considerar. En este caso, por ejemplo, estaremos motivados, sin duda, a elegir

$$f(z) := \frac{\cos z}{z^2 + 2z + 4}, \qquad \forall z \in \Omega\backslash\{-1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3}\},$$

donde el abierto está en las condiciones del teorema. (Vale, por ejemplo, $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -1\}$. La clave: contener a todo el semiplano superior y dejar fuera cuantos más polos, mejor.) Pero esta elección para la función f no es buena:
$$\cos(iy) = \cosh(y) \simeq \frac{1}{2}e^y, y \to +\infty,$$

de donde se sigue que falla la hipótesis c. en el teorema.

Sin embargo, muy relacionada con la anterior estará la función

$$f(z) := \frac{\exp(iz)}{z^2+2z+4}, \qquad \forall z \in \Omega \backslash \{-1+i\sqrt{3}\},$$

donde $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > -1\}$. Aquí, usando que $\left|e^{ix}\right| = 1$, $|e^{-y}| < 1$ y para $|z|$ suficientemente grande:

$$|zf(z)| = \left|\frac{z\exp(iz)}{z^2+2z+4}\right| = \left|\frac{z\exp(ix)\exp(-y)}{z^2+2z+4}\right| \leq \frac{|z|}{|z|^2 - 2|z| - 4} \to 0.$$

Calculamos el valor del único residuo relevante de cara al resultado:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}\left(f, -1+i\sqrt{3}\right) &= \\
& \left\{\begin{array}{c} f := \frac{g}{h}; g, h \in \mathcal{H}(\Omega) \\ h(-1+i\sqrt{3}) = 0 \neq h'(-1+i\sqrt{3}), \Rightarrow \\ \operatorname{Res}\left(\frac{g}{h}, -1+i\sqrt{3}\right)\right) = \frac{g'}{h'}(-1+i\sqrt{3}) \end{array}\right\} \\
&= \frac{e^{i\left(-1+i\sqrt{3}\right)}}{2(-1+i\sqrt{3})+2} = \frac{e^{-i}e^{-\sqrt{3}}}{i2\sqrt{3}} \\
&= \frac{e^{-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}\left[\frac{1}{i}\cos(-1) + \sin(-1)\right] \\
&= \frac{e^{-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}\left[-\sin(1) - i\cos(1)\right],
\end{aligned}$$

con lo que el teorema anterior nos dice que:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ix)}{x^2+2x+4}dx = i2\pi \operatorname{Res}\left(f, -1+i\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}e^{-i},$$

de donde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+2x+4}dx = \frac{\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\cos 1;$$

y, de propina,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2+2x+4}dx = \frac{-\pi}{\sqrt{3}}e^{-\sqrt{3}}\sin 1. \blacksquare$$

II. Integrales definidas de funciones trigonométricas.

Consideremos ahora integrales de la forma

$$\int_0^{2\pi} f\left(\cos(at), \sin(bt)\right) dt.$$

Es razonable ver esta integral como el resultado de una parametrización sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, con

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) : \Omega \supset \mathbb{T}.$$

(El abierto Ω será convenientemente elegido, además, para que "seleccione" los polos de la función que vengan bien a la hora de calcular los correspondientes residuos: los polos han de estar en la componente conexa acotada de la curva γ.)

Así:

$$z = e^{it} : 0 \leq t \leq 2\pi,$$

nos da que

$$\left.\begin{array}{r} \cos(at) = \frac{e^{iat}+e^{-iat}}{2} = \frac{z^a+z^{-a}}{2} \\ \sin(bt) = \frac{e^{ibt}-e^{-ibt}}{i2} = \frac{z^b-z^{-b}}{i2} \\ \frac{dz}{iz} = dt \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \int_0^{2\pi} f(\cos(at), \sin(bt))\, dt = \int_{\mathbb{T}} f\left(\frac{z^a+z^{-a}}{2}, \frac{z^b-z^{-b}}{i2}\right) \frac{dz}{iz};$$

y es buen momento para ejemplificarlo:

Ejemplo. Calculemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$

Resolución: Realizamos cálculos directamente:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta} &= \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2+\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)} \frac{dz}{iz} = \int_{\mathbb{T}} \frac{-i2}{z^2+4z+1} dz \\ &= \int_{\mathbb{T}} \frac{-i2}{\left(z+2+\sqrt{3}\right)\left(z+2-\sqrt{3}\right)} dz \\ &= i2\pi \ \mathrm{Res}\left(f := \frac{g}{h}, -2+\sqrt{3}\right) \\ &= i2\pi \frac{-i2}{2\left(-2+\sqrt{3}\right)+4} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

(Observemos aquí que $-2-\sqrt{3}$ está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$. Podemos considerar, por ejemplo, $\Omega = D(0,2)$.) ■

III. Más sobre integrales reales: el lema de Jordan.

El siguiente resultado se conoce como lema de Jordan:

Teorema. Sea f una función meromorfa con un número finito $p_1, ..., p_n$ de polos en el semiplano superior abierto $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}\, z > 0\}$. Supongamos que no tiene polos en la recta real y que

$$\lim_{\substack{z\to\infty \\ \mathrm{Im}\, z>0}} f(z) = 0.$$

Entonces, para $a > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{iax} dx = i2\pi \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Res}\,(g, p_j),$$

donde $g(z) := f(z)e^{iaz}$.

Demostración. Para $\varepsilon > 0$, fijo pero arbitrario, elijamos $R > 0$, tal que:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } |p_j| < R, & 1 \leq j \leq n \\ \text{b. } |f(z)| \leq \varepsilon, & z : |z| \geq R, \operatorname{Im} z > 0 \\ \text{c. } xe^{-ax} \leq 1, & x \geq R \end{array}$$

Ahora, para $u, v \in \,]R, +\infty[$, denotemos por γ el camino determinado por la poligonal

$$[-u, v, v + i\,(u + v)\,, -v + i\,(u + v)\,, -u]\,.$$

El teorema de los residuos nos da que (téngase presente que los polos de g son los mismos de f):

$$\int_\gamma g = i2\pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\,(g, p_j)\,.$$

Pero, por otra parte:

$$\begin{aligned} \int_\gamma g \quad &= \quad \int_{-u}^{v} f(x)e^{iax}dx + \int_0^{u+v} f(v+iy)e^{iav-ay}dy - \\ &- \int_{-u}^{v} f(x+i(u+v))e^{iax-a(u+v)}dx - \int_0^{u+v} f(-u+iy)e^{iau-ay}dy. \end{aligned}$$

Veamos cómo son las tres últimas integrales de esta expresión. Tengamos presentes las condiciones bajo las que han sido elegidas x, y y $u + v$:

$$\begin{aligned} \left|\int_0^{u+v} f(v+iy)e^{iav-ay}dy\right| &\leq \varepsilon \left|\int_0^{u+v} e^{-ay}dy\right| \\ &= \frac{\varepsilon}{a}\left(1 - e^{-a(u+v)}\right) \leq \frac{\varepsilon}{a} \\ \left|\int_{-u}^{v} f(x+i(u+v))e^{iax-a(u+v)}dx\right| &\leq \varepsilon \left|\int_{-u}^{v} e^{-a(u+v)}dx\right| \\ &= \varepsilon\,(u+v)\,e^{-a(u+v)} \leq \varepsilon \\ \left|\int_0^{u+v} f(-u+iy)e^{iau-ay}dy\right| &\leq \varepsilon \left|\int_0^{u+v} e^{-ay}dy\right| \leq \frac{\varepsilon}{a} \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\left|\int_{-u}^{v} f(x)e^{iax}dx - i2\pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\,(g, p_j)\right| \leq \varepsilon\left(\frac{2}{a} + 1\right)$$

de donde se sigue lo deseado sin más que hacer $u, v \to +\infty$. **Q.E.D.**

Observación: si en vez del contorno γ hubiésemos optado por la semicircunferencia superior de radio $r > 0$, el resultado obtenido hubiera sido:

$$(vp)\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx = i2\pi \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res}\,(g, p_j)\,.$$

Es decir, que podría ser que obtuviésemos un resultado incoherente caso de no existir la integral.

Ejemplo. Calcula
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+b^2}dx, \qquad b>0.$$

Resolución. Pongámonos en las condiciones del lema de Jordan:
$$f(z) := \frac{z}{z^2+b^2},$$
con $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{ib\})$, $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : -0.5 < \operatorname{Im} z\}$ y $a := 1$.

Así, el único residuo lo presenta la función en $p = ib$. Y su valor es, para $g(z) := e^{iz}f(z)$:
$$\operatorname{Res}(g, ib) = \frac{ibe^{-b}}{i2b} = \frac{e^{-b}}{2},$$
y, por tanto,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{ix}}{x^2+b^2}dx = i\pi e^{-b},$$
de donde, igualando partes imaginarias:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+b^2}dx = \pi e^{-b}.$$
Ahora bien, la función a integrar es par; por tanto:
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin(x)}{x^2+b^2}dx = \frac{\pi e^{-b}}{2}.$$

Observemos que, como extra, obtenemos algo que ya conocemos para las funciones impares:
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x}{x^2+b^2}dx = 0. \qquad \blacksquare$$

El resultado anterior admite una extensión muy interesante, que posibilita el aceptarlo bajo la hipótesis de que f tenga alguno de los polos $p_1, ..., p_n$ sobre la recta real:

Lema. Supongamos que la función f tiene un polo simple en un punto a. Sea γ_r un arco circular de radio $r>0$ con vértice en a. (Por ejemplo, consideremos $\gamma_r := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3$, la suma de las tres curvas
$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &: = a + te^{i\alpha}, \forall t \in [0,r] \\ \gamma_2(t) &: = a + re^{i\alpha}, \forall \theta \in [\alpha,\beta] \\ \gamma_3(t) &: = a + (r-t)\,e^{i\beta}, \forall t \in [0,r] \end{aligned}$$
para $r>0$ y $0<\beta-\alpha<2\pi$.) Entonces:
$$\lim_{r\to 0} \int_{\gamma_r} f = i(\beta-\alpha)\ \operatorname{Res}(f,a).$$

Demostración. El desarrollo en serie de Laurent de f en un entorno perforado $D(a,r)\backslash\{a\}$ de a, nos da:

$$f(z) = \frac{\text{Res}\,(f,a)}{z-a} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-a)^n\,.$$

Si definimos la función

$$g(z) := f(z) - \frac{\text{Res}\,(f,a)}{z-a}$$

para todo $z \in D(a,\rho)$, tendremos una función holomorfa en el disco (¿por qué?). En particular, estará acotada, digamos por un $M > 0$; es decir:

$$\left.\begin{array}{r} z \in D(a,\rho) \\ 0 < r < \rho \end{array}\right\} \Rightarrow \left|\int_{\gamma_r} g\right| \leq Mr\,(\beta-\alpha)\,,$$

y, por tanto,

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_r} g = 0.$$

Ahora bien, como

$$\int_{\gamma_r} \frac{\text{Res}\,(f,a)}{z-a}dz = \text{Res}\,(f,a)\int_\alpha^\beta \frac{rie^{i\theta}}{re^{i\theta}}d\theta = i\ \text{Res}\,(f,a)\,(\beta-\alpha)\,,$$

dado un $\varepsilon > 0$, para r suficientemente pequeño, podemos razonar así:

$$\left|\int_{\gamma_r} f - i\ \text{Res}\,(f,a)\,(\beta-\alpha)\right| = \left|\int_{\gamma_r} g\right| \leq Mr\,(\beta-\alpha) < \varepsilon. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Veamos cómo es efectivo este lema mediante un ejemplo concreto:

Ejemplo. Comprueba que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$$

Resolución. Consideremos $g(z) := \frac{e^{iz}}{z}$. Esta función tiene un polo simple en el origen, con residuo $\frac{e^{i0}}{1} = 1$. Observamos que las condiciones del lema de Jordan se satisfacen para $f(z) := \frac{1}{z}$, con la notación de dicho lema, salvo que presenta un polo en $\mathbb{R}$. Consecuentemente, hay que hacer algún artificio: vamos a modificar ligeramente el camino γ en las cercanías del origen del siguiente modo: γ será la (curva cerrada regular a trozos) suma de las curvas

$$\begin{aligned} \gamma_1 \quad &: \quad = [r, v, v+i\,(u+v)\,, -u+i\,(u+v)\,, -u, -r]\,; 0 < r < u, v \\ \gamma_2\,(t) \quad &: \quad = -re^{-it}, \qquad 0 \leq t \leq \pi \end{aligned}$$

Todo queda análogo al lema de Jordan, salvo la integral sobre $\mathbb{R}$. Nuevamente, el teorema de los residuos viene en nuestra ayuda:

$$\left(\int_{-\infty}^{-r} - \int_{\gamma_2} + \int_{r}^{+\infty}\right) g = 0 \qquad \left(= \sum_{\varnothing}\right)$$

(donde el signo negativo en la segunda integral indica el recorrido en sentido negativo que se ha considerado).

Aplicando el lema:

$$\lim_{r\to 0}\int_{\gamma_2} \frac{e^{iz}}{z}dz = i\pi;$$

luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g = i\pi,$$

de donde, tomando partes imaginarias en cada miembro, se obtiene lo deseado, pues se trata de una función par. ■

Observación: al tomar partes reales en la resolución del ejemplo anterior, se puede ver cómo se tendría que:

$$\lim_{r\to 0^+}\left(\int_{-\infty}^{-r} \frac{\cos x}{x}dx + \int_{+r}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx\right) = 0,$$

lo cual es obvio por ser impar la función del integrando. Pero, tan obvio como lo anterior es que la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x}dx,$$

no existe, pues

$$\frac{\cos x}{x} \simeq \frac{1}{x}, \qquad x \to 0.$$

IV. Integral impropia que involucra funciones racionales

Sean p y q dos polinomios primos entre sí. Supongamos que

$$q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \wedge \ \mathrm{grad}\,(q) - \mathrm{grad}\,(p) \geq 2.$$

En estas circunstancias, la función

$$f(x) := \frac{p(x)}{q(x)}, \forall x \in \mathbb{R}$$

es impropiamente integrable en $\mathbb{R}$, y nuestro propósito es obtener

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx.$$

El método, que lo presentaremos en cinco pasos, se puede enunciar del siguiente modo:

Proposición. Con p y q polinomios primos entre sí, tales que

$$q(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R} \text{ y } \operatorname{grad}(q) - \operatorname{grad}(p) \geq 2,$$

se tiene que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx = i2\pi \sum_{\substack{q(a)=0 \\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}\left(\frac{p}{q}, a\right).$$

Demostración. Paso 1^o: Elección de la conveniente función compleja a integrar:

$$f(z) := \frac{p(z)}{q(z)}, \forall z \in \mathbb{C} \backslash A; \qquad A := \{z \in \mathbb{C} : q(z) = 0\}.$$

Paso 2^o: Elección del ciclo sobre el que integrar: para $\alpha, \beta, \rho > 0$, sea

$$\gamma := [-\alpha, \beta, \beta + i\rho, -\alpha + i\rho, -\alpha]$$

(con orientación positiva, contraria a la de las agujas del reloj, de modo que el paso al límite con α y β tendiendo a $+\infty$, tenga coherencia con la integración en $\mathbb{R}$).

Paso 3^o: Aplicación del teorema de los residuos. Para ello, bastará tomar:

$$\left.\begin{array}{r} \beta > \max\{\operatorname{Re} z : z \in A\} \\ -\alpha < \min\{\operatorname{Re} z : z \in A\} \\ \rho > \max\{\operatorname{Im} z : z \in A\} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \gamma^* \cap A = \varnothing \\ \gamma \text{ es } \mathbb{C}\text{-nulhomólogo,} \end{array}\right.$$

de donde

$$\int_\gamma f = i2\pi \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(f, a) \ \operatorname{Ind}_\gamma(a).$$

Paso 4^o: Cálculo efectivo de residuos e índices.

$$a \in A \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{Im} a > 0 \Rightarrow \operatorname{Ind}_\gamma(a) = 1 \\ \operatorname{Im} a < 0 \Rightarrow \operatorname{Ind}_\gamma(a) = 0 \end{array}\right.$$

de donde

$$\int_\gamma f = i2\pi \sum_{\substack{a \in A \\ \operatorname{Im} a>0}} \operatorname{Res}(f, a)$$

Paso 5^o: Encontrar la relación entre las integrales $\int_\gamma f(z)dz$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$.
Llamemos $I := \int_\gamma f(z)dz$, e igualmente, demos nombres:

$$\gamma_1 := [\beta, \beta + i\rho]; \quad \gamma_2 := [\beta + i\rho, -\alpha + i\rho]; \quad \gamma_3 := [-\alpha + i\rho, -\alpha],$$

y también

$$I_k := \int_{\gamma_k} f; \quad k \in \{1, 2, 3\}.$$

De este modo
$$\int_\gamma f =: I = \int_{-\alpha}^{\beta} f(x)dx + \sum_{k=1}^{3} I_k.$$
Objetivo: reducir el sumatorio a cero... y ¿cosas de la vida?, ¡éllo se logrará cuando $\alpha, \beta \to +\infty$!

Como existe $\lim_{z\to\infty} \frac{z^2 p(z)}{q(z)} \in \mathbb{C}$, existirán también $R, M > 0$ tales que
$$|z| > R \Rightarrow |f(z)| = \left|\frac{p}{q}(z)\right| \leq \frac{M}{|z|^2},$$
y
$$z \in \gamma_2^*, \rho \in [R, |z|] \Rightarrow |I_2| \leq \frac{M}{\rho^2} (\alpha + \beta),$$
pues $|f(z)| \leq \frac{M}{\rho^2}$, en este caso.

Por otro lado, si $\beta \geq R$:
$$\begin{aligned} |I_1| &= \left|\int_0^\rho f(\beta + it)\, idt\right| \leq \int_0^\rho |f(\beta + it)|\, dt \\ &\leq \int_0^\rho \frac{M}{\beta^2 + t^2} dt = \frac{M}{\beta} \arctan \frac{\rho}{\beta} \leq \frac{\pi M}{2\beta}. \end{aligned}$$
También tenemos, razonando de modo análogo, que
$$\alpha \geq R \Rightarrow |I_3| \leq \frac{\pi M}{2\alpha}.$$
En resumen:
$$\left|I - \int_{-\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) + \frac{\alpha + \beta}{\rho^2}\right] M, \qquad \forall \alpha, \beta, \rho \geq R.$$
Pues bien, para $\alpha, \beta \geq R$ fijos, haciendo $\rho \to +\infty$, se tiene que
$$\left|I - \int_{-\alpha}^{\beta} f(x)dx\right| \leq \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) M,$$
de donde haciendo lo propio con α y β, se sigue lo deseado. **Q.E.D.**

Ejemplo. Calculemos
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1 + x^2)^n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

Resolución. Llamemos f a la función del integrando en su forma compleja: presenta un único polo (a considerar) de orden n en $a = i$. Así, como las integrales $\int_\gamma f(z)dz$ e $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ son iguales:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= i2\pi \operatorname{Res}(f,i) \\
&= i2\pi \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to i} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \left[\frac{1}{(z+i)^n} \right] \\
&= \frac{i2\pi}{(n-1)!} \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{(n-1)!2^{2n-1}i^{2n-1}} \\
&= \frac{(2n-2)!\pi}{(n-1)!^2 2^{2n-2}}. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Aún un quinto método que nos va a ayudar; ahora, en el cálculo de sumas de series mediante la técnica de los residuos:

V. Suma de series.

Una de las aplicaciones más espectaculares del cálculo con residuos será su utilidad para obtener sumas de series de números reales (aunque no exclusivamente reales). La clave la encontramos en el comportamiento de dos funciones complejas de variable compleja muy concretas, la cotangente y la cosecante:

$$z \to \cot(\pi z), \qquad z \to \csc(\pi z)$$

las cuales tienen, ambas, polos simples en cada $z \in \mathbb{Z}$. De hecho, éstos son sus únicos polos, pues

$$\sin(\pi z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{Z}.$$

En la práctica, las series que nos van a ocupar serán cocientes de polinomios y, aunque se podrían enunciar resultados más generales para funciones meromorfas bajo ciertas restricciones, nos conformaremos con enunciarlos y probarlos para funciones racionales R en el plano complejo $\mathbb{C}$. Concretamente, para $R := p/q$, con p y q polinomios primos entre sí, veremos dos resultados; el primero para $\operatorname{grad}(q) - \operatorname{grad}(p) \geq 2$, y el segundo cuando $\operatorname{grad}(q) = 1 + \operatorname{grad}(p)$.

Comenzamos con un sugestivo lema sobre acotación de las dos funciones arriba citadas:

Lema. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el camino γ_n dado por

$$\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)(-1-i), \left(n+\frac{1}{2}\right)(1-i), \left(n+\frac{1}{2}\right)(1+i), \left(n+\frac{1}{2}\right)(-1-i) \right]$$

Sea $B := \cup_n \gamma_n^*$. Entonces existen constantes positivas k_1 y k_2 tales que:

$$|\cot(\pi z)| \leq k_1, \quad |\csc(\pi z)| \leq k_2, \qquad \forall z \in B.$$

Demostración. Probaremos la primera de las desigualdades; en la segunda se puede proceder de modo análogo. Para $z = x + iy$ se tienen

$$|\sin(z)| \geq |\sinh(y)| \ \text{ y } \ |\cos(z)| \leq |\cos(x)| + |\sinh(y)|,$$

y, con $z \in B$, existe un natural n tal que $z \in \gamma_n^*$. Y así, tendremos dos posibilidades:

a. $|x| = n + \frac{1}{2}$ y $|y| \leq n + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y \neq 0 \Rightarrow |\cot(\pi z)| \leq 1 \\ y = 0 \Rightarrow |\cot(\pi z)| = 0 \leq 1 \end{cases}$$

b. $|y| = n + \frac{1}{2}$ y $|x| \leq n + \frac{1}{2} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} |\cot(\pi z)| &\leq \frac{1 + |\sinh(\pi y)|}{|\sinh(\pi y)|} = 1 + \frac{1}{|\sinh(\pi y)|} \\ &= 1 + \frac{2}{|e^{\pi y} - e^{-\pi y}|} = 1 + \frac{2}{e^{\pi|y|} - e^{-\pi|y|}} \\ &\leq 1 + \frac{2}{e^{\frac{3\pi}{2}} - 1} =: k \end{aligned}$$

En cualquier caso, haciendo $k_1 := \max\{k, 1\}$, tenemos lo deseado. **Q.E.D.**

Teorema. Sean p y q polinomios primos entre sí, y tales que $\mathrm{grad}(q) - \mathrm{grad}(p) \geq 2$. Entonces:

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ q(k)\neq 0}}^{+\infty} \frac{p}{q}(k) = -\sum_{q(a)=0} \operatorname{Res}(g, a),$$

donde

$$g(z) := \pi \cot(\pi z) \frac{p(z)}{q(z)}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup A),$$

siendo A el conjunto de los ceros de q.

Demostración. Consideremos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$n + 1/2 > \max\{|\operatorname{Re} a|, |\operatorname{Im} a|; a \in A\}.$$

Aplicando el teorema de los residuos:

$$\int_{\gamma_n} g = i2\pi \left(\sum_{a \in A} \operatorname{Res}(g, a) + \sum_{\substack{k=-n \\ k \notin A}}^{+n} \operatorname{Res}(g, k) \right).$$

Como para los polos de g que no son ceros de q podemos razonar así:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}(g, k) &= \lim_{z \to k} (z - k)\, g(z) = \lim_{z \to k} (z - k)\, \pi \cot(\pi z) \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \lim_{z \to k} \frac{z\pi - k\pi}{\sin(\pi z) - \sin(\pi z)} \cos(\pi z) \frac{p(z)}{q(z)} \\ &= \frac{\cos(\pi z)}{\cos(\pi z)} \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{q(z)}, \end{aligned}$$

la fórmula anterior, nos dice

$$\int_{\gamma_n} g = i2\pi \left(\sum_{a \in A} \operatorname{Res}(g,a) + \sum_{\substack{k=-n \\ q(k)\neq 0}}^{+n} \frac{p}{q}(k) \right),$$

y, por tanto, el objetivo es hacer cero el primer miembro cuando hagamos $n \to +\infty$.

Pero, por otro lado, como $\operatorname{grad}(q) - \operatorname{grad}(p) \geq 2$,

$$\exists R, M > 0 : |z| \geq R \Rightarrow \left| \frac{p}{q}(k) \right| \leq \frac{M}{|z|^2}.$$

Si, además,

$$z \in \gamma_n^* : n > R \Rightarrow |z| \geq n + 1/2 > R \Rightarrow \left| \frac{p}{q}(k) \right| \leq \frac{M}{n^2}.$$

Usando $k_1 > 0$ del lema:

$$\left| \frac{1}{i2\pi} \int_{\gamma_n} g \right| \leq \frac{1}{2\pi} \pi k_1 \frac{M}{n^2} (8n+4) \to 0, \qquad \text{si } n \to +\infty,$$

de donde

$$\lim_n \sum_{\substack{k=-n \\ q(k)\neq 0}}^{+n} \frac{p}{q}(k) = - \sum_{a \in A} \operatorname{Res}(g,a). \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Ejemplo. Comprobemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Resolución. Llamemos $p(z) := 1, q(z) := z^2$, para $z \in \mathbb{C}$. Así

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ q(k)\neq 0}}^{+\infty} \frac{p}{q}(k) = \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = - \sum_{q(a)=0} \operatorname{Res}(g,a) = - \operatorname{Res}(g,0),$$

donde

$$g(z) := \frac{\pi \cot(\pi z)}{z^2}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{Z}.$$

Como

$$\operatorname{Res}(g,0) = -\frac{\pi^2}{3},$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{\pi^2}{3} \right) = \frac{\pi^2}{6}. \qquad \blacksquare$$

Teorema. Sean p y q polinomios primos entre sí, y tales que $\mathrm{grad}(q) > \mathrm{grad}(p)$. Entonces:

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ q(k)\neq 0}}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{p}{q}(k) = - \sum_{q(a)=0} \operatorname{Res}(g,a)\,,$$

donde

$$g(z) := \pi \, \csc(\pi z) \, \frac{p(z)}{q(z)}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus (\mathbb{Z} \cup A)\,,$$

siendo A el conjunto de los ceros de q.

Demostración. Razonando como en la demostración anterior, ahora para $k \in \mathbb{Z} \setminus A$:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}(g,k) &= \lim_{z\to k} (z-k)\,\pi \frac{1}{\sin(\pi z)} \frac{p(z)}{q(z)} \\
&= \lim_{z\to k} \frac{z\pi - k\pi}{\sin(\pi z) - \sin(\pi z)} \frac{p(z)}{q(z)} \\
&= \cos(\pi k) \, \frac{p(z)}{q(z)} = (-1)^k \, \frac{p(z)}{q(z)}.
\end{aligned}$$

Por tanto, el teorema de los residuos nos da:

$$\int_{\gamma_n} g = i2\pi \left(\sum_{a\in A} \operatorname{Res}(g,a) + \sum_{\substack{k=-n \\ q(k)\neq 0}}^{+n} (-1)^k \, \frac{p}{q}(k) \right).$$

Ahora, si $\mathrm{grad}(q) - \mathrm{grad}(p) \geq 2$, razonaríamos como arriba. Supongamos, por tanto que $\mathrm{grad}(q) - \mathrm{grad}(p) = 1$. En esta situación, han de existir $\lambda \in \mathbb{C}$ y p_0 y q_0 primos entre si, con $\mathrm{grad}(q_0) - \mathrm{grad}(p_0) \geq 2$, verificando

$$\frac{p}{q}(z) = \frac{\lambda}{z} + \frac{p_0}{q_0}(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus A;$$

y, por tanto,

$$\int_{\gamma_n} g = \int_{\gamma_n} \frac{\pi\lambda \, \csc(\pi z)}{z} dz + \int_{\gamma_n} \pi \, \csc(\pi z) \, \frac{p_0(z)}{q_0(z)} dz =: I_1 + I_2.$$

Pero, $I_1 = 0$ (por ser la integral de una función par) e $I_2 \to 0$ cuando $n \to +\infty$. Luego el resultado es el deseado. **Q.E.D.**

Ejemplo. Calculemos

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \, n}{n^2+1}.$$

Resolución. Como la función

$$z \to \frac{z}{z^2+1}$$

tiene polos simples en i y $-i$, consiste en calcular los rediduos en dichos puntos para la función

$$z \to g(z) := \frac{\pi z \csc(\pi z)}{z^2+1}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1} &= \frac{1}{2}(-1)\left[-\operatorname{Res}(g,-i) - \operatorname{Res}(g,i)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{Res}(g,-i) + \operatorname{Res}(g,i)\right] = \frac{\pi}{4}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Supongamos que a es un polo simple para f. ¿Puede ser $\operatorname{Res}(f,a) = 0$?

2. ¿Existen funciones f con polos de orden $k \geq 2$ en a y tales que $\operatorname{Res}(f,a) = 0$?

3. Sean f y g dos funciones holomorfas en un entorno perforado de $a \in \mathbb{C}$. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Prueba que

$$\operatorname{Res}(\alpha f + \beta g) = \alpha \operatorname{Res}(f,a) + \beta \operatorname{Res}(g,a).$$

4. Considera

$$f(z) := \exp\left(\frac{1}{z}\right)\exp(2z), \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\},$$

y calcula $\operatorname{Res}(f,0)$.

5. Prueba que

$$\frac{1}{1-\cos z} = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{z^2}{120} + o\left(z^3\right)$$

y aplícalo para calcular $\operatorname{Res}(f,0)$, donde

$$f(z) := \frac{1}{z^3(1-\cos z)}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

6. Prueba que

$$\frac{1}{\sin z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + o\left(z^4\right)$$

y aplícalo a la determinación de $\operatorname{Res}(f,0)$, donde

$$f(z) := \frac{1}{z^4 \sin z}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}.$$

7. Sea a un cero de orden n para una función holomorfa g. Prueba que, para $\delta > 0$ conveniente, la función

$$f(z) := \frac{1}{g(z)}, \forall z \in D(a, \delta) \setminus \{a\}$$

tiene un polo de orden n en a. ¿Cuánto vale $\text{Res}(f, a)$?

8. Sea g una función holomorfa en a. Calcula $\text{Res}(fg, a)$ cuando:

   (a) f tiene polo simple en a con residuo α.

   (b) f tiene polo de orden k en a con parte principal

$$\frac{c_{-1}}{z-a} + \frac{c_{-2}}{(z-a)^2} + ... + \frac{c_{-k}}{(z-a)^k}.$$

9. Sea a una singularidad aislada de una función f. Prueba que también lo es para su derivada f'. ¿Cuánto vale $\text{Res}(f', a)$?

10. Sea f una función holomorfa en un entorno perforado de $a \in \mathbb{C}$. Calcula $\text{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right)$ si:

    (a) a es cero de orden n de f.

    (b) a es polo de orden n de f.

    Prueba que, en ambos casos, a es polo simple de $\frac{f'}{f}$.

11. Sean $f \in \mathcal{H}(D(a,r) \setminus \{a\})$ y $\varphi \in \mathcal{H}(D(a,r))$. Calcula $\text{Res}\left(\varphi \frac{f'}{f}, a\right)$ si:

    (a) a es cero de orden n de f.

    (b) a es polo de orden n de f.

12. Sean $\varphi \in \mathcal{H}(D(a,r))$ y $f \in \mathcal{H}(D(\varphi(a), \rho) \setminus \{\varphi(a)\})$, con $\varphi(a) \neq 0$ un polo simple de f con residuo a_{-1}. Calcula $\text{Res}(f \circ \varphi, a)$.

13. Calcula la integral $\int_\gamma f(z)\, dz$, donde $f(z) := \frac{1}{z(z-1)}$, $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ y γ es cualquier camino cerrado rodeando a 1 y tal que $\gamma^* \subset \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}\, z > 0\}$. (Resuélvelo tanto mediante el teorema de los residuos como por la fórmula de Cauchy. Compara métodos y saca conclusiones.)

14. Calcula, mediante el teorema de los residuos, la integral

$$\int_{C(1,6)} \frac{dz}{z(1+z)}.$$

15. Prueba que para cada natural n, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2\cos t)^n \cos nt}{3 + 2\cos t} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} \left(3 - \sqrt{5}\right)^n.$$

16. Prueba que, para $0 < a < 1$, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3t}{1 + a^2 - 2a\cos 2t} dt = \pi \frac{a^2 - a + 1}{1 - a}.$$

17. Prueba que para cualquier $a > 0$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^6 dx}{\left(x^4 + a^4\right)^2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a}.$$

18. Integrando la función

$$z \to \frac{z}{a - e^{-iz}}$$

$(a > 1)$ a lo largo de la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$ $(n \in \mathbb{N})$, prueba que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + a^2 - 2a\cos x} dx = \frac{2\pi}{2} \ln\left(\frac{1 + a}{a}\right).$$

19. Dado un número natural $n \geq 2$, intégrese una función compleja adecuada a lo largo de la frontera del sector circular

$$D(0, R) \cap \left\{ z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\},$$

para probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n} \csc \frac{\pi}{n}.$$

20. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; \varepsilon, R)$, prueba que para $-1 < \alpha < 3$, se verifica

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{\left(1 + x^2\right)^2} dx = \frac{\pi}{4}(1 - \alpha)\sec\frac{\alpha\pi}{2}.$$

21. En los siguientes ejercicios consiste en probar las fórmulas dadas o bien obtener las sumas correspondientes:

a. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 - a^4} = \frac{1}{2a^4} - \frac{\pi}{4a^3}[\cot(\pi a) + \coth(\pi a)] \quad (a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z});$

b. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(3n+1)^2};$

c. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n+a)^2} = \pi^2 \csc(\pi a) \quad (a \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z});$

d. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{\pi^2}{12};$

e. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90};$

f. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} = \frac{\pi^3}{32}.$

22. Como arriba, consiste en probar las fórmulas dadas o bien obtener las sumas correspondientes:

a. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{1}{2a} \coth(\pi a) - \frac{1}{2a^2} \quad (0 < a < 1)$; b. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+a^2}$;

c. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n+a)^2} = \pi^2 \csc(\pi a) \cot(\pi a)$; d. $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$;

23. Sea Ω un abierto del plano que contenga al disco unidad cerrado, $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$. Sea φ una función holomorfa en Ω tal que $\varphi(0) = 0$ y $\varphi(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Llamemos

$$v(x, y) := \operatorname{Im} \varphi(z) = \operatorname{Im} \varphi(x + iy), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

Prueba que

$$\int_0^{2\pi} \frac{x \sin\theta}{1 - 2x\cos\theta + x^2} v(\cos\theta, \sin\theta)\, d\theta = \pi\varphi(x), \quad \forall x \in \left]-1, 1\right[.$$

24. Evalúa las siguientes integrales usando el método de los residuos y discute su eventual resolución mediante teoremas o fórmulas de tipo Cauchy:

a. $\int_{|z|=2} \exp\left(\frac{1}{z^2}\right) dz$ b. $\int_{|z|=2} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

c. $\int_{|z|=2} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$ d. $\int_{|z|=2} \frac{1}{z} \sin\left(\frac{1}{z}\right) dz$

e. $\int_{|z|=2} \frac{1}{z} \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$ f. $\int_{|z+i+1|=4} z^3 \cos\left(\frac{1}{z}\right) dz$

g. $\int_{|z|=4} \frac{1}{(z-1)(z-3)} dz$ h. $\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1} dz$

i. $\int_{|z|=1} \frac{\sin z}{z \sinh z} dz$ j. $\int_{|z|=R>1} \frac{1}{z^2+1} dz$

25. Prueba que

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^{100} + 1} = \frac{\pi/100}{\sin(\pi/100)}.$$

26. Prueba, usando el teorema de los residuos, que para $0 < b < a$, se tiene

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t}{a + b\cos t} dt = \frac{\pi}{b^2} \left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right).$$

27. Prueba que para cualesquiera $a, b > 0$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = \frac{\pi(a + 2b)}{2ab^3(a + b)^2}.$$

28. Integrando la función

$$z \to \frac{1 - e^{2iz}}{z^2}$$

a lo largo de la mitad superior del anillo $A(0; \varepsilon, R)$, prueba que

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sin x)^2}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

29. Calcula, mediante el teorema de los residuos, la integral

$$\int_{C(1,6)} \frac{dz}{z\,(1+z)}.$$

30. Calcula

$$\int_{|z|=2} z \sin \frac{1}{z} dz.$$

¿Podrías hacerlo con ayuda de teoremas o fórmulas de tipo Cauchy?

31. Responde a las siguientes cuestiones:

(a) Explica porqué no se puede evaluar la integral $\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx$ por medio de un contorno semicircular en ninguno de los dos hemisferios (semiplanos superior e inferior).

(b) Para $r > 1$, considera la curva γ dada por

$$[ir, 0] + [0, r] + \left\{ re^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi/2 \right\}.$$

Prueba que

$$\int_0^r \frac{x}{x^4+1} dx - \int_r^0 \frac{y}{y^4+1} dy + \int_\gamma \frac{z}{z^4+1} dz = i2\pi \sum \operatorname{Res} \left(\frac{z}{1+z^4}, a \right)$$

donde el sumatorio es en los polos a del primer cuadrante.

(c) Prueba que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4+1} dx = \pi/4.$$

32. Prueba que para enteros no nulos m y n, con $n - m \geq 2$, se tiene que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^m dx}{x^n + 1} = \frac{\pi}{n \sin\left[\pi\,(m+1)\,/n\right]}.$$

(Indicación: usa el método del ejercicio anterior y el contorno de "la porción de pizza" de ángulo $2\pi/n$ y radio r.)

33. Sean l y k enteros tales que $l > 0$ y $l\,(k-1) \geq 2$. Prueba que

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{1/l}}{u^k+1} du = \frac{\pi}{k \sin\left[\pi\,(l+1)\,/\,(lk)\right]}$$

suponiendo $u^{1/l}$ real no negativa en su intervalo de integración. (Indicación: hágase $x := u^{1/l}$ y aplica el ejercicio anterior.)

34. Prueba que para cada natural n, se tiene

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos\left(nt - \sin t\right) dt = \frac{2\pi}{n!}.$$

35. Prueba que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(\pi x)}{x^2 - 5x + 6} dx = -5\pi.$$

36. Prueba que para $0 < \alpha < 2$, se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{1 + e^x + e^{2x}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha - 1}}{1 + t + t^2} dt = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin \frac{\pi}{3}(1 - \alpha)}{\sin(\alpha\pi)}.$$

37. Intenta sumar la serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}.$$

(No se conoce la respuesta exacta a este problema tan sencillo aparentemente. Su valor aproximado es de 1.201 y la función ζ de Riemann tiene mucho que ver con ella.)

38. Evalúa la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{1 + 2x \cos\theta + x^2} dx$$

donde $\alpha \in]-1, 1[$, $\theta \in]-\pi, \pi[$ y $\alpha\theta \neq 0$.