Tema 7.1: Desarrollo en serie de Laurent. Clasificación de singularidades. Teorema de Casorati-Weierstrass

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

La fórmula de Cauchy nos permitió, en su día, obtener el desarrollo de Taylor de una función analítica en un entorno de un punto.

Cabe ahora pensar que si disponemos de una forma general de dicho resultado, es natural que podamos llegar a conclusiones que antes nos eran inaccesibles.

Así es como llegaremos al llamado desarrollo en serie de Laurent; será aplicable ahora a situaciones donde antes, con Taylor, no se daba respuesta (v.g., funciones tan naturales como $z \to \frac{1}{z}$ o bien $z \to \frac{e^z}{z^2}$, para $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, no se pueden estudiar en torno al origen).

Las series de Laurent serán una buena genaralización de las de Taylor: allí donde Taylor daba respuesta (donde hay analiticidad), ambas coincidirán; allí donde Taylor no llegaba (ausencia de analiticidad: puntos no regulares), Laurent nos ayudará a clasificar los distintos tipos de discontinuidad.

Comencemos por una discusión de tipo heurístico. Sea admitido el siguiente *desarrollo en serie de potencias con radio de convergencia* $r > 0$ para una función en un entorno de un punto dado:

$$f(z) = a_0 + a_1 (z - z_0)^{-1} + a_2 (z - z_0)^{-2} + ... + a_n (z - z_0)^{-n} + ...$$

No nos supone un gran esfuerzo aceptarlo: al fin y al cabo, haciendo $\xi := \frac{1}{z - z_0}$, tenemos una expresión holomorfa del tipo

$$g(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + ... + a_n\xi^n + ...$$

Así,

$$R := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

nos dice, al hacer $r := \frac{1}{R}$, que:

$$\left.\begin{array}{r} R = 0 \Rightarrow g \text{ conv. en } 0 \\ R \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow g \text{ conv. en } D(0, R) \\ R = +\infty \Rightarrow g \text{ conv. en } \mathbb{C} \end{array}\right\} \underset{\text{resp.}}{\Rightarrow} \left\{\begin{array}{l} r = +\infty \Rightarrow f \text{ conv. en } \mathbb{C} \\ r \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow f \text{ conv. en } \mathbb{C}\backslash\overline{D(z_0, \frac{1}{r})} \\ r = 0 \Rightarrow f \text{ conv. en } z = z_0 \end{array}\right.$$

de donde se sigue el hecho de que para

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} a_{-n} (z-z_0)^{-n}, \end{aligned}$$

se tiene validez del desarrollo para $z \in \left]\frac{1}{R^-}, R^+\right[$ (y se hace imprescindible que $\frac{1}{R^-} < R^+$) donde

$$R^- := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}}, \quad R^+ := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \quad ;$$

es decir, R^+ es el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0} a_n w^n$, mientras que R^- es el correspondiente a $\sum_{n\geq 0} a_{-n} w^n$ (por ello es por lo que luego R^- se invierte al hacer $w \to \frac{1}{w}$).

Definiciones. **a.** Dados $a \in \mathbb{C}$ y $0 \leq r < R \leq +\infty$, se define el anillo de centro a y radios r y R, como el conjunto

$$A(a; r, R) := \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}.$$

b. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $\{a_n; n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Consideremos

$$\begin{cases} f_0(z) = a_0, & \forall z \in \mathbb{C} \\ f_n(z) = a_n (z-a)^n + a_{-n} (z-a)^{-n}, & \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{a\}, \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Llamamos serie de Laurent de centro a y coeficientes a_n a la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} f_n$.

c. La serie de Laurent, que se acostumbra a escribir como $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$, se dice no trivial cuando $\frac{1}{R^-} < R^+$ (y aquí valen $\frac{1}{0} := +\infty$ y $\frac{1}{+\infty} := 0$). En este caso, se define su anillo de convergencia como el conjunto $A\left(a; \frac{1}{R^-}, R^+\right)$. Supondremos, desde ahora en adelante, series de Laurent no triviales.

Teorema. Sea $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n (z-a)^n$ una serie de Laurent y sea $A\left(a; \frac{1}{R^-}, R^+\right)$ su anillo de convergencia. Entonces la serie converge absoluta y uniformemente sobre cada compacto del anillo y no converge en ningún punto de $\mathbb{C}\setminus\overline{A\left(a; \frac{1}{R^-}, R^+\right)}$. Además, la función

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \qquad \forall z \in A\left(a; \frac{1}{R^-}, R^+\right)$$

es holomorfa en el anillo de convergencia donde está definida y se puede derivar término a término.

Demostración. La primera parte es ya evidente después de todo lo expuesto arriba. El "además" es consecuencia del teorema de Weierstrass. **Q.E.D.**

La importancia del desarrollo en serie de Laurent viene dada por el hecho de su unicidad (amén de su existencia):

Teorema del desarrollo en serie de Laurent. Sean $a \in \mathbb{C}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$ y $f \in \mathcal{H}(A(a;r,R))$. Entonces existe una única serie de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n (z-a)^n$ cuyo anillo de convergencia contiene a $A(a;r,R)$ y que verifica

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \qquad \forall z \in A(a;r,R).$$

Además, se tiene que

$$c_n = \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \qquad \forall \rho \in]r,R[, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo. Se nos pide calcular la integral

$$\int_\gamma z^k \sin\frac{1}{z} dz$$

donde $k \in \mathbb{Z}$ y γ es un camino en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ que rodea el origen.

Es evidente que el teorema de Cauchy para dominios estrellados no nos es válido aquí (ni $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ es estrellado, ni $f : z \to \sin 1/z$ es holomorfa en el origen). Aquí, el desarrollo en serie de Laurent (que, sin embargo, tendrá la forma de serie de Taylor) nos va a echar una mano; la razón: no exige holomorfía en el origen.

El razonamiento será el siguiente: usando Taylor (y tal cosa no puede ser otra que su desarrollo en serie de Laurent, por unicidad) para $w \to \sin(w)$, se tiene:

$$z^k \sin\frac{1}{z} = z^k \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{k-(2n+1)}}{(2n+1)!}.$$

Integrando término a término en dicha expresión:

$$\begin{aligned} \int_\gamma z^k \sin\frac{1}{z} dz &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int_\gamma z^{k-(2n+1)} dz \\ &= \begin{cases} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} i2\pi, & k \in 2(\mathbb{N}\cup\{0\}) \\ 0, & k \in \mathbb{Z}\backslash 2(\mathbb{N}\cup\{0\}) \end{cases}. \end{aligned}$$

Demostración (del teorema del desarrollo en serie de Laurent).

Existencia: Sean r_1 y r_2 tales que $0 \leq r < r_1 < r_2 < R \leq +\infty$. Llamemos $\Gamma := C(a,r_2) + (-C(a,r_1))$. El ciclo Γ es $A(a;r,R)$-nulhomólogo, y, para cada $n \in \mathbb{Z}$, la función

$$z \to \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}$$

es holomorfa en $A(a;r,R)$. Por el teorema general de Cauchy podemos decir, entonces, que, para cada entero n:

$$0=\int_\Gamma \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\int_{C(a,r_2)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz-\int_{C(a,r_1)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,$$

de donde

$$\int_{C(a,r_2)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\int_{C(a,r_1)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad \forall n\in\mathbb{Z},\forall r_1,r_2\in\,]r,R[\,;$$

y, por tanto, queda perfectamente definida la expresión

$$c_n=\frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad \forall n\in\mathbb{Z},$$

siendo $\rho\in\,]r,R[$ arbitrario.

Sea ahora $z\in A(a;r,R)$ tal que $0\le r<r_1<|z-a|<r_2<R\le+\infty$. Nuevamente consideramos $\Gamma:=C(a,r_2)+(-C(a,r_1))$ (que es $A(a;r,R)$-nulhomólogo y) que verifica $\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=1$.

Otra vez es la fórmula de Cauchy la encargada de darnos información:

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z)\mathrm{Ind}_\Gamma(z)=\frac{1}{i2\pi}\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw \\ &= \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}dw-\frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}dw \qquad (\underline{1}) \end{aligned}$$

Pero, por otro lado, sabemos que la igualdad

$$\frac{f(w)}{w-z}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}(z-a)^n \qquad (\underline{2})$$

es uniforme sobre $C(a,r_2)$, mientras que al ser

$$\frac{1}{w-z}=\frac{1}{(w-a)-(z-a)}=\frac{-\frac{1}{z-a}}{1-\frac{w-a}{z-a}}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(w-a)^n}{(z-a)^{n+1}}$$

uniformemente sobre $C(a,r_1)$, se tiene que

$$\frac{f(w)}{w-z}=-\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f(w)}{(z-a)^{n+1}}(w-a)^n \qquad (\underline{3})$$

es uniforme sobre $C(a,r_1)$.

Por tanto, de ($\underline{2}$) y ($\underline{3}$) se siguen, respectivamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,r_2)}\frac{f(w)}{w-z}dw &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,r_2)}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}dw\right)(z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}c_n(z-a)^n \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{i2\pi}\int_{C(a,r_1)}\frac{f(w)}{w-z}dw &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,r_1)}f(w)\,(w-a)^n\,dw\right)\frac{1}{(z-a)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty}c_{-n}\,(z-a)^{-n}.
\end{aligned}$$

Es decir:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,(z-a)^n\,,\qquad z: 0\le r<r_1<|z-a|<r_2<R\le+\infty.$$

Observamos que si R^+ es el radio de convergencia para la serie

$$\sum_{n\ge0}c_n\,(z-a)^n$$

y R^- es el correspondiente a la serie

$$\sum_{n\ge1}c_{-n}w^n,$$

hemos demostrado que para $z\in A\,(a;r,R)$, las series

$$\sum_{n\ge0}c_n\,(z-a)^n \text{ y } \sum_{n\ge1}c_{-n}\,(z-a)^{-n}$$

convergen; lo cual garantiza, respectivamente, que $R\le R^+$ y $\frac{1}{r}\le R^-$, de tal modo que

$$A\,(a;r,R)\subset A\left(a;\frac{1}{R^-},R^+\right),$$

que es el anillo de convergencia para la serie de Laurent $\sum_{n\in\mathbb{Z}}c_n\,(z-a)^n$. Además, dada la arbitrariedad de r_1 y r_2, se tiene

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n\,(z-a)^n\,,\qquad \forall z\in A\,(a;r,R)\,.$$

Unicidad: Sea $\sum_{n\in\mathbb{Z}}d_n\,(z-a)^n$ otra serie de Laurent cuyo anillo de convergencia $A\,(a;r',R')$ contenga al anillo $A\,(a;r,R)$ y verifique:

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}d_n\,(z-a)^n\,,\qquad \forall z\in A\,(a;r,R)\,.$$

La suma anterior es uniforme en cada compacto del anillo $A\,(a;r,R)$ (por estar contenido, a su vez, en el el otro anillo $A\,(a;r',R')$). Por tanto, para

$r < \rho < R$ y $p \in \mathbb{Z}$, se tiene:

$$\begin{aligned}
c_p &= \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z-a)^{p+1}}dz \\
&= \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n\,(z-a)^n}{(z-a)^{p+1}}dz \\
&= \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} \frac{1}{(z-a)^{p+1}}\left\{d_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[d_n\,(z-a)^n + d_{-n}\,(z-a)^{-n}\right]\right\}dz \\
&= \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} \frac{d_0}{(z-a)^{p+1}}dz \\
&\quad + \sum_{n=1}^{+\infty}\left[\frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} \frac{d_n\,(z-a)^n}{(z-a)^{p+1}}dz + \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} \frac{d_{-n}\,(z-a)^{-n}}{(z-a)^{p+1}}dz\right] \\
&= \frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} \frac{d_p}{(z-a)}dz = d_p\frac{1}{i2\pi}\int_{C(a,\rho)} \frac{1}{(z-a)}dz = d_p. \;\blacksquare
\end{aligned}$$

Definición. Consideremos una función holomorfa en un entorno perforado de un punto: $a \in \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}\,(\Omega\backslash\{a\})$. Diremos que la función f es regular en dicho punto a cuando exista otra función g holomorfa en Ω tal que

$$g(z) = f(z), \forall z \in \Omega\backslash\{a\}.$$

En el caso de que f no sea regular en a, diremos que presenta una singularidad en dicho punto. Se hablará así, igualmente, de a como un punto de regularidad (o regular) o de singularidad (o singular) de f.

El criterio de regularidad más cómodo nos lo proporciona el teorema de Riemann de singularidades evitables:

$$f \text{ regular en } a \Leftrightarrow \lim_{z\to a}(z-a)\,f(z) = 0.$$

Ejemplos. **a.** Para cada natural n, la función

$$z \to \frac{1}{z^n}$$

es singular en el origen.

b. La función

$$z \to \exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

es singular en el origen.

Una de las utilidades del desarrollo en serie de Laurent será la clasificación de las singularidades. A ello dedicamos el resto del tema.

Comenzamos estudiando las series de Laurent con la perspectiva de encontrar en ellas las llamadas partes regular y singular. Veremos que están determinadas de manera única por la propia serie y que la parte singular es riquísima en información.

Concretamente, si disponemos de una función holomorfa en un entorno perforado de un punto:

$$f \in \mathcal{H}\left(\Omega \backslash \{a\}\right) : a \in \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C},$$

sabemos que

$$\exists R > 0 : f \in \mathcal{H}\left(A\left(a;0,R\right)\right).$$

Sea

$$f(z) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(z-a\right)^n, \qquad \forall z \in A\left(a;0,R\right),$$

su desarrollo en serie de Laurent, que converge en todo el anillo. Observemos que el "mal comportamiento" de f en $z = a$ lo tenemos localizado en $\sum_{n\geq 1} c_{-n}\left(z-a\right)^{-n}$. Este hecho lo resaltamos en el siguiente resultado.

Corolario. Sean un abierto Ω, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}\left(\Omega\backslash\{a\}\right)$. Entonces existen $g \in \mathcal{H}\left(\Omega\right)$ y $h \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}\right)$, $h(0) = 0$, tales que

$$f(z) = g(z) + h\left(\frac{1}{z-a}\right), \forall z \in \Omega\backslash\{a\}.$$

Además, la pareja (g, h) es única en las condiciones anteriores.

Demostración. Consideremos $D(a, R) \subset \Omega$. Tenemos $f \in \mathcal{H}\left(A\left(a;0,R\right)\right)$ y podemos considerar el correspondiente desarrollo en serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(z-a\right)^n, \forall z \in A\left(a;0,R\right),$$

donde el anillo de converegencia $A\left(a; \frac{1}{R^-}, R^+\right)$ de la serie $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \left(z-a\right)^n$ contiene a $A\left(a;0,R\right)$. De este hecho se deduce, obligadamente, que $\frac{1}{R^-} = 0 \Leftrightarrow R^- = +\infty$ y $R \leq R^+$.

Por ser $R^- = +\infty$, podemos definir

$$h(w) := \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} w^n, \forall w \in \mathbb{C},$$

que resulta ser una función entera con $h(0) = 0$.

Hagamos, por otro lado,

$$g_0 : \Omega\backslash\{a\} \to \mathbb{C}; \qquad g_0(z) := f(z) - h\left(\frac{1}{z-a}\right), \forall z \in \Omega\backslash\{a\}.$$

Claramente, $g_0 \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$ y es regular en a, si $0 < |z-a| < R$ entonces:

$$\begin{aligned} g_0(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n - h\left(\frac{1}{z-a}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} (z-a)^{-n} - h\left(\frac{1}{z-a}\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n , \end{aligned}$$

luego,

$$\lim_{z\to a} g_0(z) = g_0(a) = c_0.$$

Es decir, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que g y g_0 coinciden en $\Omega\backslash\{a\}$. En resumen:

$$f(z) = g(z) + h(\frac{1}{z-a}), \forall z \in \Omega\backslash\{a\},$$

con $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $h \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ con $h(0) = 0$.

Probemos, finalmente, la unicidad de la pareja (g,h). Sea (g_1,h_1) otra pareja en análogas condiciones. Por tanto, admitirán la representación:

$$\begin{aligned} g_1(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n , \forall z \in D(a,R) \\ h_1(w) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n w^n, \forall w \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Para $z \in A(a;0,R)$:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n (z-a)^{-n} = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n (z-a)^n : \begin{cases} d_n := \alpha_n & ...n \geq 0 \\ d_n := \beta_{-n} & ...n \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

y como el desarrollo de Laurent es único en su anillo de convergencia (el cual contiene a $A(a;0,R)$), se tiene que

$$d_n = c_n, \forall n \in \mathbb{Z},$$

de donde, si $n \in \mathbb{N}$, se sigue que $\beta_n = d_{-n} = c_{-n}$, y así $h_1 = h$.

Pero también: $g_1 = f - h_1 = f - h = g$, de donde se sigue la unicidad. **Q.E.D.**

Este resultado dará coherencia a la siguiente

Definición. Dada una $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$, donde $a \in \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, a las componentes de la única pareja (g, h), dada por el corolario anterior, convenimos en llamarlas, respectivamente, partes regular y singular de f en a.

Claramente, f es regular en $a \Leftrightarrow h \equiv 0$. Si f no es regular en a, es decir, si es singular, la función h será no nula, y podremos establecer la siguiente clasificación:

Definición. Diremos que $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$ tiene un polo en a si h es un polinomio (no idénticamente nulo). Definimos el orden del polo de f en a como el grado del polinomio h. En el caso de que h sea una función entera no polinómica diremos que f presenta una singularidad esencial en a.

Vamos a caracterizar, a continuación, las definiciones anteriores.

Corolario. Sea dada una $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$, donde $a \in \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$. Sea $\{c_n : n \in \mathbb{Z}\}$ la colección de todos los coeficientes de la serie de Laurent que la representa en un entorno perforado de a. Sea $k \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:

i. f tiene un polo de orden k en a.

ii. $k = \max \{n \in \mathbb{N} : c_{-n} \neq 0\}$.

iii. $\exists \lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$.

iv. $\exists \varphi \in \mathcal{H}(\Omega), \varphi(a) \neq 0 : f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^k}, \forall z \in \Omega \backslash \{a\}$.

Demostración. i. $\Leftrightarrow$ **ii.** Es evidente por la forma de h :

$$h(w) := \sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} w^n, \forall w \in \mathbb{C}.$$

ii. $\Rightarrow$ **iii.** Se tiene que:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=-k}^{+\infty} c_n (z-a)^n, \forall z \in \Omega \backslash \{a\} \\ &\Rightarrow \quad (z-a)^k f(z) = \sum_{n=-k}^{+\infty} c_n (z-a)^{n+k} \underset{z \to a}{\to} c_{-k} \neq 0. \end{aligned}$$

iii. $\Rightarrow$ **iv.** Como para la función

$$\varphi(z) := (z-a)^k f(z), \forall z \in \Omega \backslash \{a\}$$

existe

$$\varphi(a) = \lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) \in \mathbb{C} \backslash \{0\},$$

el teorema de Riemann de singularidades evitables nos garantiza que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$. El resto, evidente.

iv. $\Rightarrow$ **ii.** Ha de existir $R > 0$ tal que $D(a,R) \subset \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(A(a;0,R))$. Escribiendo

$$\varphi(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^n, \forall z \in \Omega,$$

si $z \in A(a;0,R)$, entonces

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (z-a)^{n-k} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n : \left\{ \begin{array}{ll} c_n := \alpha_{n+k}, & n \geq -k \\ c_n := 0, & n < -k \end{array} \right. , \end{aligned}$$

de donde $c_{-k} = \alpha_0 = \varphi(a) \neq 0$. **Q.E.D.**

Corolario. Sea $a \in \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$. Son equivalentes:

i. f tiene un polo (sin orden precisado) en el punto a.

ii. $\exists \lim_{z \to a} f(z) = \infty$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ **ii.** Es la implicación sencilla. Llamando k al orden del polo ($k \in \mathbb{N}$),

$$\exists \varphi \in \mathcal{H}(\Omega) : \varphi(a) \neq 0 \text{ y } f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-a)^k}, \forall z \in \Omega \backslash \{a\}.$$

Así, haciendo $z \to a$,

$$\frac{\varphi(z)}{(z-a)^k} = \sum_{n=-k}^{+\infty} d_{n+k} (z-a)^n \to \infty.$$

ii. $\Rightarrow$ **i.** Existe, en este caso, $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$ y $f(z) \neq 0$ si $0 < |z-a| < \rho$. Sea, entonces, la función

$$\varphi(z) := \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{f(z)}, & z \in D(a,\rho) \backslash \{a\} \\ 0, & z = a \end{array} \right. .$$

Como

$$\exists \varphi(a) = 0 = \lim_{z \to a} \varphi(z),$$

por el teorema de Riemann de singularidades evitables, podemos afirmar que $\varphi \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$.

Sea $k \in \mathbb{N}$ el orden del cero de φ en a. Ha de existir $\varphi_0 \in \mathcal{H}(D(a,\rho))$ tal que

$$\varphi_0(a) \neq 0 \text{ y } \varphi(z) = (z-a)^k \varphi_0(z), \qquad \forall z \in D(a,\rho).$$

Por argumentos del carácter local de la continuidad:

$$\exists r \in]0, \rho[: z \in D(a, r) \Rightarrow \varphi_0 (z) \neq 0.$$

Así:

$$\begin{aligned} \lim_{z \to a} (z-a)^k f(z) &= \lim_{z \to a} (z-a)^k \frac{1}{\varphi (z)} \\ &= \lim_{z \to a} \frac{1}{\varphi_0 (z)} = \frac{1}{\varphi_0 (a)} \in \mathbb{C} \backslash \{0\}, \end{aligned}$$

y iii. $\Rightarrow$ i. en el corolario anterior cierra la demostración. **Q.E.D.**

Teorema de Casorati-Weierstrass. Sean $a \in \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H} (\Omega \backslash \{a\})$. Son equivalentes:

i. f tiene una singularidad esencial en a.

ii. $\forall R > 0, \quad \overline{\{f(z) : z \in \Omega, 0 < |z-a| < R\}} = \mathbb{C}$.

iii. $\forall w \in \mathbb{C}, \exists (z_n) \subset \Omega \backslash \{a\} : z_n \to a$ y $f(z_n) \to w$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ ii. Supongamos que no se da ii., y razonaremos por contrarrecíproco:

$$\exists R > 0 : \overline{\{f(z) : z \in \Omega, 0 < |z-a| < R\}} \neq \mathbb{C}.$$

Podemos razonar (tú debes comprobarlo) que $D(a, R) \subset \Omega$ y $\overline{f(A(0; 0, R))} \neq \mathbb{C}$. Así:

$$\exists w_0 \in \mathbb{C}, \varepsilon_0 > 0 : 0 < |z-a| < R \Rightarrow |f(z) - w_0| \geq \varepsilon_0.$$

Consideremos la función $z \to \frac{1}{f(z)-w_0}$ holomorfa en el anillo $A(0; 0, R)$ y que está acotada por $\frac{1}{\varepsilon_0}$. El teorema de Riemann de singularidades evitables nos dice (confírmalo) que:

$$\exists g \in \mathcal{H} (D(a, R)) : g(z) = \frac{1}{f(z) - w_0}, \forall z \in D(a, R) \backslash \{a\}.$$

Ahora bien, como

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + w_0, \forall z \in D(a, R) \backslash \{a\},$$

tenemos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} g(a) \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{z \to a} f(z) = \frac{1}{g(a)} + w_0 \Rightarrow f \text{ regular en } a \\ g(a) = 0 \Rightarrow \exists \lim_{z \to a} f(z) = \infty \Rightarrow f \text{ tiene polo en } a \end{array} \right. ,$$

luego, en cualquier caso, no hay singularidad esencial de f en a.

ii. $\Rightarrow$ **iii.** Sea $w \in \mathbb{C}$. Para cada natural n:

$$\begin{aligned}
&D(w,1/n) \cap \{f(z) : z \in \Omega, 0 < |z-a| < 1/n\} \neq \varnothing \\
&\Rightarrow \exists w_n \in D(w,1/n) \cap \{f(z) : z \in \Omega, 0 < |z-a| < 1/n\} \\
&\Rightarrow \exists\, (z_n) \subset \Omega : 0 < |z_n - a| < 1/n \wedge |f(z_n) - w| < 1/n;
\end{aligned}$$

es decir, $f(z_n) \to w$, de donde lo deseado.

iii. $\Rightarrow$ **i.** Evidente, pues en este caso $\nexists \lim_{z\to a} f(z)$, ni finito ni infinito. **Q.E.D.**

Al igual que el teorema de Liouville fue mejorado por el teorema pequeño de Picard, este de Casorati-Weierstrass lo es por el llamado

Teorema grande de Picard. Sea $a \in \Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y sea $f \in \mathcal{H}(\Omega\backslash\{a\})$. Si f tiene una singularidad esencial en a, entonces existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{C}\backslash\{\alpha\} \subset f(U)$ para cualquier U entorno perforado de a.

Este resultado, que a su vez generaliza al teorema pequeño de Picard, tiene una demostración que escapa al objetivo del curso.

Completamos esta lección haciendo un somero estudio de lo que ocurre cuando en los resultados precedentes consideramos $a := \infty$.

Definición. Sea $R > 0$. Para $f \in \mathcal{H}(A(0; R, +\infty))$, consideramos

$$f^*(w) := f\left(\frac{1}{w}\right), \forall w \in A(0; R, +\infty);$$

y (como resulta que $f^* \in A\left(0; 0, \frac{1}{R}\right)$, entonces) definimos lo siguiente:

a. ∞ es un punto regular para f cuando 0 lo sea para f^*.

b. ∞ es un polo de orden k para f cuando 0 lo sea para f^*.

c. ∞ es un punto singular esencial para f cuando 0 lo sea para f^*.

Con estas definiciones se tiene, de manera trivial, lo siguiente:

Proposición. Para $f \in \mathcal{H}(A(0; R, +\infty))$, $R \geq 0$, sean $\{c_p : p \in \mathbb{Z}\}$ los coeficientes de su desarrollo en serie de Laurent centrado en el origen. Son equivalentes:

i. ∞ es un punto regular para f.

ii. $c_p = 0, \forall p \in \mathbb{N}$.

iii. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) \in \mathbb{C}$.

iv. $\exists R_0 > 0 : \{f(z) : |z| > R_0\}$ está acotado.

Proposición. Para $f \in \mathcal{H}(A(0; R, +\infty))$, $R \geq 0$, si $\{c_p : p \in \mathbb{Z}\}$ son los coeficientes de su desarrollo en serie de Laurent centrado en el origen, son equivalentes:

i. ∞ es un polo para f.

ii. $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = \infty$.

Proposición. Para $f \in \mathcal{H}(A(0; R, +\infty))$, $R \geq 0$, si $\{c_p : p \in \mathbb{Z}\}$ son los coeficientes de su desarrollo en serie de Laurent centrado en el origen y $k \in \mathbb{N}$, son equivalentes:

i. ∞ es un polo de orden k para f.

ii. $k = \max\{n \in \mathbb{N} : c_n \neq 0\}$.

iii. $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z^k} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Proposición. Para $f \in \mathcal{H}(A(0; R, +\infty))$, $R \geq 0$, si $\{c_p : p \in \mathbb{Z}\}$ son los coeficientes de su desarrollo en serie de Laurent centrado en el origen, son equivalentes:

i. ∞ es un punto singular esencial para f.

ii. $\forall \rho > R, \overline{\{f(z) : |z| > \rho\}} = \mathbb{C}$.

iii. $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \exists (z_n) \subset A(0; R, +\infty) : z_n \to \infty$ y $f(z_n) \to \alpha$.

Corolario. Para toda función entera no polinómica f (como ∞ es una singularidad esencial para ella), se tiene

$$\overline{\{f(z) : |z| > \rho\}} = \mathbb{C}, \forall \rho > 0.$$

Corolario. Sea f una función entera e inyectiva. Entonces

$$\exists a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, b \in \mathbb{C} : f(z) = az + b, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Demostración. La clave va a estar en demostrar que ∞ no es singularidad esencial de f, y en este caso será un polinomio; y como es entera e inyectiva, su derivada f' (que será otro polinomio) no se va a anular en ningún punto: ha de ser constante no nula (¿por qué teorema?). En consecuencia

$$f(z) = az + b, \forall z \in \mathbb{C} \qquad (a \neq 0).$$

Veamos que, en efecto, ∞ no es singularidad esencial de f. Si sí lo fuese, tendríamos densidad del conjunto $\{f(z) : |z| > 1\}$ en $\mathbb{C}$. Pero el conjunto $\{f(z) : |z| < 1\}$ es abierto en $\mathbb{C}$ y de intersección vacía con el anterior (¿por qué hipótesis?): absurdo. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $0 < |a| < |b|$. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent para la función

$$f(z) := \frac{1}{(z-a)(z-b)}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{a, b\},$$

en cada uno de los siguientes anillos:

a. $A(0;|a|,|b|)$ b. $A(0;|b|,+\infty)$
c. $A(a;0,|b-a|)$ d. $A(a;|b-a|,+\infty)$

2. Clasifica las singularidades, y determina las partes singulares, para cada una de las siguientes funciones. Estudia también, cuando ello tenga sentido, la eventual singularidad en ∞:

a. $f(z) := \frac{1-\cos z}{z^n}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \qquad n \in \mathbb{N};$
b. $f(z) := z^n \sin \frac{1}{z}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \qquad n \in \mathbb{N};$
c. $f(z) := \frac{\log(1+z)}{z^2}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\};$
d. $f(z) := \frac{1}{z(1-e^{i2\pi z})}, \forall z \in \mathbb{C};$
e. $f(z) := z \tan z, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{(2k+1)\frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\}.$

3. Estudia el comportamiento de la función f en el punto indicado:

a. $f(z) := \frac{\cos z}{z^2}$, $a := 0$;
b. $f(z) := \frac{e^{\frac{1}{z}}-1}{z^2}$, $a := 0$;
c. $f(z) := \frac{z+1}{z-1}$, $a := 0$;
d. $f(z) := \frac{z+1}{z-1}$, $a := 1$.

4. Sean $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ y (a_n) una sucesión de puntos en $D(a,r)\backslash\{a\}$ con $a_n \to a$. Sean el abierto

$$\Omega := D(a,r) \backslash (\{a\} \cup \{a_n : n \in \mathbb{N}\})$$

y una función $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que f tiene un polo en cada uno de los puntos a_n. Prueba que, para cada $\rho < r$, el conjunto $f(\Omega \cap D(a,\rho))$ es denso en $\mathbb{C}$. (*Un punto de acumulación de polos se parece mucho a una singularidad esencial.*)

5. Sea una función $f \in \mathcal{H}(D(2,0)\backslash\{0\})$ tal que

$$\int_{\mathbb{T}} z^n f(z)dz = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Prueba que f tiene singularidad evitable en el origen.

6. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) := \frac{1}{(z^2-1)^2}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-1,1\},$$

en los anillos

a. $A(1;0,2)$ b. $A(1;2,+\infty)$

7. Calcula la serie de Laurente de la función

$$f(z) := \frac{1+z}{z}$$

en el anillo $A(0;0,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

8. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega\backslash\{a\}$. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades de las funciones f y f' en el punto a?

9. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y f una función holomorfa en $\Omega\backslash\{a\}$, no idénticamente nula en dicho entorno reducido. ¿Qué relación existe entre las posibles singularidades de las funciones f y $\frac{1}{f}$ en el punto a?

10. Sean Ω abierto de $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y f, g funciones holomorfas en $\Omega\backslash\{a\}$. Estudia el comportamiento en a de las funciones $f+g$ y fg, supuestamente conocido el de las funciones f y g.

11. Supongamos que una función f es holomorfa en un punto a y que otra función g tiene un polo de orden m en $f(a)$. ¿Cómo se comporta la función $g \circ f$ en el punto a? ¿Qué ocurre en el caso en el que g tiene una singularidad esencial en el punto $f(a)$?

12. Sea el punto a una singularidad de una función f. Prueba que la función $\mathrm{Re}\,(f)$ no puede estar acotada en un entorno reducido de a.

13. Obtenga los desarrollos en serie de Laurent indicados en cada caso:

    a. $f(z) := \exp(z) + \exp\left(\frac{1}{z^2}\right), |z| > 0$

    b. $f(z) := \frac{1}{z(z+R)}, 0 < |z| < R$

    c. $f(z) := \frac{1}{(z-2)(z-1)}$, para $\begin{cases} 0 < |z| < 1 \\ 1 < |z| < 2 \\ 2 < |z| \end{cases}$

    d. $f(z) := \frac{1}{z} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z+2}$, para $\begin{cases} 0 < |z| < 1 \\ 1 < |z| < 2 \\ 2 < |z| \end{cases}$.

14. Obténgase el desarrollo en serie de Laurent de la función

$$f(z) := \frac{1}{z(z-1)}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\},$$

en los anillos

a. $A(0;0,1) = \mathbb{D}\backslash\{0\}$ b. $A(0;1,+\infty) = \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{D}}$

15. Calcula la serie de Laurente de la función

$$f(z) := \frac{z}{z^2+1}$$

en el anillo $A\,(i; 0, 2)$.

16. Clasifique las singularidades de las siguientes funciones:

a. $f(z) := \frac{(z^2-1)(z-2)}{\sin^3(\pi z)}$;
b. $f(z) := \frac{z}{\sin z}$;
c. $f(z) := \exp \frac{1}{z^2-1}$;
d. $f(z) := z \cos \frac{1}{z}$.

17. Obtenga los desarrollos en serie de Laurent indicados:

a. para $f(z) := \frac{z}{z^2+4}$ en $A\,(i2; 0, 4)$;
b. para $f(z) := \frac{1}{z}$ en $A\,(i; 1, +\infty)$;
c. para $f(z) := \frac{1}{(z^2-1)^2}$ en $A\,(1; 0, 2)$ y en $A(1; 2, +\infty)$.

18. Clasifique las singularidades y obtenga el desarrollo correspondiente a la parte singular de la serie de Laurent de las siguientes funciones en los puntos donde corresponda:

a. $f(z) := \frac{\log(1+z)}{z^2}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.
b. $f(z) := \frac{1}{z[1-\exp(i2\pi z)]}, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$.