Tema 6.3: Abiertos simplemente conexos. Consecuencias de la fórmula general de Cauchy y de la forma general del teorema de Cauchy

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

En este tema avanzamos en la clasificación de los dominios del plano. Para ello, introduciremos el concepto de homotopía, que nos ayudará en la identificación de los dominios simplemente conexos.

Sépase, es lo anunciado como culminación del curso, que (salvo isomorfismos) sólo existen dos abiertos simplemente conexos en el plano: el propio $\mathbb{C}$ y el disco unidad $\mathbb{D}$.

Pero, hasta entonces, habrá que contentarse con los resultados parciales de este tema.

Definición. Diremos que dos curvas cerradas γ_0 y γ_1 (definidas en $[a,b]$ y) con soporte en un abierto Ω son Ω-homótopas si existe una función continua $F : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ tal que

$$\begin{aligned} F(0,t) &= \gamma_0(t), \qquad \forall t \in [a,b] \\ F(1,t) &= \gamma_1(t), \qquad \forall t \in [a,b] \\ F(s,a) &= F(s,b), \qquad \forall s \in [0,1]. \end{aligned}$$

(La tercera condición es la que da coherencia al hecho de que ambas curvas sean cerradas.)

Proposición. Sean dos curvas cerradas γ_0 y γ_1 (definidas en $[a,b]$ y) con soporte en el abierto Ω. Supongamos que γ_0 y γ_1 sean Ω-homótopas. Entonces

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_0}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\Omega.$$

Demostración. Designemos por F la homotopía existente, por hipótesis. Sea $z \in \mathbb{C}\backslash\Omega$ y sea $K := F([0,1] \times [a,b])$. Claramente, z no está en el compacto K. Llamando $\varepsilon := \mathrm{dist}(z,K)$, por continuidad uniforme de F, podemos afirmar que

$$\exists \delta > 0 : \quad \left. \begin{array}{c} |s_1 - s_2| < \delta, |t_1 - t_2| < \delta \\ s_1, s_2 \in [0,1], t_1, t_2 \in [a,b] \end{array} \right\} \Rightarrow |F(s_1,t_1) - F(s_2,t_2)| < \varepsilon.$$

Escribamos:

$$\gamma_s(t) := F(s,t), \forall (s,t) \in [0,1] \times [a,b].$$

Ahora tenemos que

$$\begin{aligned} |s_1 - s_2| &< \delta, \quad t \in [a,b] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \left|\gamma_{s_1}(t) - \gamma_{s_2}(t)\right| < \varepsilon := \operatorname{dist}(z,K) \leq \left|\gamma_{s_1}(t) - z\right|, \end{aligned}$$

de donde $\operatorname{Ind}_{\gamma_{s_1}}(z) = \operatorname{Ind}_{\gamma_{s_2}}(z)$; y, por tanto, la función

$$s \to \operatorname{Ind}_{\gamma_s}(z)$$

es uniformemente continua y, en particular,

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_0}(z) = \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z),$$

de donde, por la arbitrariedad de z, se sigue el resultado. **Q.E.D.**

Definición. Un espacio topológico X se dice simplemente conexo si toda curva cerrada en X es X-homótopa a una constante.

Los dominios estrellados son X-homótopos a su punto de estrella.

Corolario. Los abiertos simplemente conexos son homológicamente conexos.

Demostración. Sea γ una curva cerrada en Ω (que, por hipótesis, será Ω-homótopa a una constante γ_1). La proposición anterior nos dice que

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \operatorname{Ind}_{\gamma_1}(z), \forall z \in \mathbb{C} \backslash \Omega;$$

luego γ es Ω-nulhomóloga. Como γ era arbitraria en Ω, se sigue que este es homológicamente conexo. **Q.E.D.**

Y el estado de la cuestión queda sintetizado en el resultado siguiente:

Corolario. Para cada dominio Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ vamos a considerar las siguientes afirmaciones:

i. $\Omega = \mathbb{C}$ o bien Ω es isomorfo a $\mathbb{D}$.

ii. Ω es homeomorfo a $\mathbb{D}$.

iii. Ω es simplemente conexo.

iv. Ω es homológicamente conexo.

Entonces: i. $\Rightarrow$ ii. $\Rightarrow$ iii. $\Rightarrow$ iv.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Prueba que si Ω es un dominio estrellado, entonces $\mathbb{C} \backslash \Omega$ no tiene componentes conexas acotadas. Concluye que los dominios estrellados son homológicamente conexos.

2. Prueba que $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ no es simplemente conexo.

3. Sea Ω un abierto simplemente conexo del plano complejo $\mathbb{C}$ tal que $\mathbb{R}^{+} \subset \Omega$ y $0 \notin \Omega$. Prueba que existe una función holomorfa en Ω, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que
$$f(x) = x^{x}, \forall x > 0.$$
¿Puede suprimirse la hipótesis de que Ω sea simplemente conexo?