Tema 6.2: Forma general del teorema de Cauchy y Fórmula general de Cauchy

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Comenzamos introduciendo las definiciones que nos permitirán considerar el concepto de índice en un ambiente más amplio, a la vez que generalizaremos algunos resultados ya conocidos del tema anterior.

Definiciones. Llamaremos cadena a las sumas finitas (formales) de caminos (curvas regulares a trozos). Por ciclo entenderemos a cualquier suma finita (formal) de caminos cerrados. Para cada cadena $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$ su soporte será $\Gamma^* := \cup_{k=1}^{n} \gamma_k^*$ y su longitud $\mathrm{long}(\Gamma) := \sum_{k=1}^{n} \mathrm{long}(\gamma_k)$. La integral de una función continua f a lo largo de una cadena Γ, $f \in \mathcal{C}(\Gamma^*)$, se define como

$$\int_\Gamma f := \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f.$$

Proposición. Sean una cadena Γ y una función $f \in \mathcal{C}(\Gamma^*)$. Entonces

$$\left| \int_\Gamma f \right| \leq \|f\| \,\mathrm{long}(\Gamma).$$

Demostración. Sea $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$. Así, tendremos

$$\begin{aligned} \left| \int_\Gamma f \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\gamma_k} f \right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{long}(\gamma_k) \max\{|f(z)| : z \in \gamma_k^*\} \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{long}(\gamma_k) \max\{|f(z)| : z \in \Gamma^*\} \\ &= \|f\| \,\mathrm{long}(\Gamma). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

La siguiente definición introduce una relación de equivalencia en la colección de todas las cadenas. (Aunque este hecho no se va a usar en lo que sigue y eludiremos, consecuentemente, su demostración.)

Definición. Diremos que dos cadenas Γ y Υ son equivalentes, y escribimos $\Gamma \equiv \Upsilon$ en este caso, cuando

$$\int_{\Gamma} f = \int_{\Upsilon} f, \qquad \forall f \in \mathcal{C}\left(\Gamma^* \cup \Upsilon^*\right).$$

Definición. Dado un ciclo Γ, llamamos índice de dicho ciclo respecto de cualquier $z \notin \Gamma^*$, y se escribe por $\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z)$, al número entero

$$\frac{1}{i2\pi} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z}.$$

Proposición. Para cada ciclo Γ, la función

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) : \mathbb{C} \backslash \Gamma^* \to \mathbb{Z}$$

es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$.

Demostración. Sea $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$. Tendremos $\mathbb{C} \backslash \Gamma^* = \cap_{k=1}^{n} \left(\mathbb{C} \backslash \gamma_k^*\right)$. Consideremos una componente conexa U de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$. Resultará que $U \subset \mathbb{C} \backslash \gamma_k^*$ para todos los k, de modo que estará en una componente conexa para cada uno de ellos; allí se deduce lo que perseguimos. **Q.E.D.**

Proposición. Si Γ es un ciclo y z está en la única componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \backslash \Gamma^*$, entonces

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = 0.$$

Demostración. El argumento ya nos resulta familiar: basta probar lo que queremos para $z : |z| \geq M$, donde exigimos $\Gamma^* \subset D(0, M)$. Pero esto es trivial:

$$\operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z) = 0, \forall z : |z| \geq M, \forall k \in \{1, ..., k\}. \textbf{ Q.E.D.}$$

A continuación se prueban dos lemas que se usarán para lograr un resultado donde encontraremos condiciones suficientes de holomorfía. El teorema de Morera nos echará una mano en su momento.

Podemos llamar la atención sobre la generalidad del resultado en el lema primero (para métricos arbitrarios y cómo se comporta en ellos el producto finito de compactos) y cómo en ambos lemas aparecen funciones complejas de varias variables complejas (dos variables, concretamente). (¡Lástima que sea éste, el de las varias variables complejas, un tema que se escape del alcance de los cursos de licenciatura!)

Lema. Sean Γ una cadena y A un espacio métrico. Sea $F : \Gamma^* \times A \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces, la función

$$f : A \to \mathbb{C}; f(z) := \int_{\Gamma} F(w, z)\, dw, \forall z \in A$$

es continua en A.

Demostración. Sea $a \in A$ (fijo, pero arbitrario) y sea $(a_n) \subset A$ tal que $a_n \to a$. Llamemos $K := \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$. La continuidad de F es uniforme sobre $\Gamma^* \times K$ (¿por qué?).

Sea ahora $\varepsilon > 0$. Habrá de existir $\delta > 0$ tal que si

$$\left.\begin{array}{c} (u,b)\,,(v,c) \in \Gamma^* \times K \\ |u-v| < \delta, |b-c| < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow |F\,(u,b) - F\,(v,c)| < \varepsilon.$$

Pero para tal ε, también existe un natural m tal que $\mathrm{dist}(a, a_n) < \delta$ si $n \geq m$. Así,

$$n \geq m \Rightarrow |F\,(w, a_n) - F\,(w, a)| < \varepsilon, \forall w \in \Gamma^*.$$

Observemos que las funciones

$$\varphi, \varphi_n : \Gamma^* \to \mathbb{C}; \left\{\begin{array}{l} \varphi\,(w) := F\,(w,a)\,, \forall w \in \Gamma^* \\ \varphi_n\,(w) := F\,(w,a_n)\,, \forall w \in \Gamma^*, \forall n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

verifican que

$$\varphi_n \to \varphi \text{ uniformemente sobre } \Gamma^*,$$

luego

$$f\,(a_n) = \int_\Gamma \varphi_n \to \int_\Gamma \varphi = f(a).$$

La arbitrariedadad de a en A nos da lo deseado. **Q.E.D.**

Lema. Sean dos cadenas, Γ y Σ, y una función continua $F : \Gamma^* \times \Sigma^* \to \mathbb{C}$. Entonces

$$\int_\Gamma \left(\int_\Upsilon F\,(w,z)\,dz \right) dw = \int_\Upsilon \left(\int_\Gamma F\,(w,z)\,dw \right) dz.$$

Demostración. No hay pérdida de generalidad si razonamos para dos curvas regulares γ y σ. (Confírmalo.) Sean $[a,b]$ y $[c,d]$ los dos intervalos respectivos donde están definidas. Por la continuidad de F y la validez del teorema de Fubini para funciones continuas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$, razonando para las partes real e imaginaria de la correspondiente integral:

$$\begin{aligned}
& \int_a^b \left(\int_c^d F\left(\gamma\left(t\right), \sigma\left(s\right)\right) \sigma'\left(s\right) ds \right) \gamma'\left(t\right) dt \\
= & \int_a^b \left(\int_c^d F\left(\gamma\left(t\right), \sigma\left(s\right)\right) \gamma'\left(t\right) \sigma'\left(s\right) ds \right) dt \\
= & \int_{[a,b]\times[c,d]} F\left(\gamma\left(t\right), \sigma\left(s\right)\right) \gamma'\left(t\right) \sigma'\left(s\right) d\left(t, s\right) \\
= & \int_{[c,d]\times[a,b]} F\left(\gamma\left(t\right), \sigma\left(s\right)\right) \sigma'\left(s\right) \gamma'\left(t\right) d\left(s, t\right) \\
= & \int_c^d \left(\int_a^b F\left(\gamma\left(t\right), \sigma\left(s\right)\right) \sigma'\left(s\right) \gamma'\left(t\right) dt \right) ds \\
= & \int_c^d \left(\int_a^b F\left(\gamma\left(t\right), \sigma\left(s\right)\right) \gamma'\left(t\right) dt \right) \sigma'\left(s\right) ds,
\end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\int_\gamma \left(\int_\sigma F\left(w, z\right) dz \right) dw = \int_\sigma \left(\int_\gamma F\left(w, z\right) dw \right) dz. \blacksquare$$

Teorema. Sean una cadena Γ, un abierto Ω, y una función continua $F : \Gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$. Supongamos, además, que si $w \in \Gamma^*$, entonces la función $z \to F_w\left(z\right) := F(w, z)$ es holomorfa en Ω. Entonces, la función

$$z \to f(z) := \int_\Gamma F\left(w, z\right) dw$$

es holomorfa en Ω.

Demostración. El primero de los lemas nos garantiza la continuidad de f en el abierto Ω. Consideremos ahora un triángulo arbitrario contenido en él: $\blacktriangle \subset \Omega$. Por el segundo de los lemas (y aplicando el teorema de Cauchy para el triángulo a la función F_w):

$$\begin{aligned}
\int_{[a,b,c,a]} f &= \int_{[a,b,c,a]} \left(\int_\Gamma F\left(w, z\right) dw \right) dz \\
&= \int_\Gamma \left(\int_{[a,b,c,a]} F\left(w, z\right) dz \right) dw \\
&= \int_\Gamma 0 dw = 0;
\end{aligned}$$

luego, por el teorema de Morera, $f \in \mathcal{H}\left(\Omega\right)$. **Q.E.D.**

Tenemos que una función f continua en un abierto Ω admite una primitiva si, y sólo si, para todo ciclo Γ en Ω se tiene que $\int_\Gamma f = 0$. Nos preguntamos ahora por cómo son los abiertos que verifican esta propiedad.

Observamos que si Ω es un abierto tal que para cualesquiera ciclo Γ y función holomorfa f en él, es trivial que

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z - z_0} = 0, \forall z_0 \notin \Omega,$$

lo cual equivale a que $\mathrm{Ind}_\Gamma(z_0) = 0, \forall z_0 \notin \Omega$.

Pues bien, esta condición que hemos visto (trivialmente) necesaria para que $\int_\Gamma f = 0$, resulta ser, a la postre, también suficiente. Este es el contenido del teorema general de Cauchy.

Definición. Sea Ω un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$. De un ciclo Γ con soporte en Ω diremos que es nulhomólogo con respecto a Ω (o bien, Ω-nulhomólogo) si

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \Omega.$$

También se usará la expresión "homológicamente nulo con respecto a". Obsérvese que las constantes son ejemplos de tales ciclos.

Teorema General de Cauchy. Sean Ω un abierto del plano $\mathbb{C}$ y Γ un ciclo nulhomólogo con respecto a él. Entonces, para cada función holomorfa f en Ω :

i. $i2\pi \mathrm{Ind}_\Gamma(z) f(z) = \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad \forall z \notin \mathbb{C} \backslash \Gamma^*$.

ii. $\int_\Gamma f = 0$.

Observación. La primera parte es una generalización de la fórmula de Cauchy. En la segunda tenemos una generalización del teorema de Cauchy para dominios estrellados.

Demostración. i. Observemos que basta probar

$$\int_\Gamma \frac{f(w) - f(z)}{w - z} dw = 0, \forall z \notin \mathbb{C} \backslash \Gamma^*,$$

pues ello conduce a

$$\int_\Gamma \frac{f(w)}{w - z} dw = \int_\Gamma \frac{f(z)}{w - z} dw = f(z) \int_\Gamma \frac{1}{w - z} dw = f(z)\, i2\pi \mathrm{Ind}_\Gamma(z).$$

Consideremos la función auxiliar

$$F : \Gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}; F(w, z) := \begin{cases} \frac{f(w) - f(z)}{w - z}, & w \neq z \\ f'(z), & w = z \end{cases}.$$

Esta función es continua en $\Gamma^* \times \Omega$. Así la función

$$F_w : \Omega \to \mathbb{C}; F_w(z) := \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z}, & z \in \Omega\backslash\{w\} \\ f'(z), & z = w \end{cases}$$

es continua en Ω (para cada $w \in \Gamma^*$). Pero, a su vez, es holomorfa en $\Omega\backslash\{w\}$. Por tanto, el teorema de singularidades evitables de Riemann, nos garantiza que $F_w \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Ahora podemos afimar, con el teorema anterior, que la nueva función

$$g : \Omega \to \mathbb{C}; \qquad g(z) := \int_\Gamma F(w,z)\,dw, \forall z \in \Omega,$$

es holomorfa en Ω.

Consideremos el conjunto

$$\Omega_0 := \{z \in \mathbb{C}\backslash\Gamma^* : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}.$$

Se trata de un abierto: es la imagen inversa del origen por una función continua (el índice, concretamente), luego es una componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$.

La función

$$g_0 : \Omega_0 \to \mathbb{C}; \qquad g_0(z) := \int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw, \forall z \in \Omega_0$$

es holomorfa en Ω_0: se debe a la continuidad en la segunda variable de la función

$$\Gamma^* \times \Omega_0 \ni (w,z) \to \frac{f(w)}{w-z}.$$

Además, si $z \in \Omega \cap \Omega_0$, tenemos

$$\begin{aligned} g(z) &= \int_\Gamma F(w,z)\,dw = \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw \\ &= g_0 - f(z)\int_\Gamma \frac{1}{w-z}dw \\ &= g_0(z) - i2\pi f(z)\mathrm{Ind}_\Gamma(z) \\ &= g_0(z) - 0 = g_0(z); \end{aligned}$$

y, por tanto, podemos definir la función entera:

$$h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \qquad h(z) := \begin{cases} g(z), & z \in \Omega \\ g_0(z), & z \in \Omega_0 \end{cases}.$$

Objetivo final: probar que h es idénticamente nula, pues en ese caso, en particular para $z \in \Omega\backslash\Gamma^*$:

$$0 = h(z) = g(z) = \int_\Gamma F(w,z)\,dw = \int_\Gamma \frac{f(w)-f(z)}{w-z}dw.$$

Sea $M > 0$ tal que $w \in \Gamma^* \Rightarrow |w| \leq M$. El conjunto $\mathbb{C}\backslash\overline{D(0,M)}$ es conexo, y está contenido en $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$. Por tanto, estará en su componente conexa no acotada; de donde

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D(0,M)}.$$

Así, si $|z| > M$, se tiene $z \in \Omega_0$, y:

$$|h(z)| = |g_0(z)| = \left|\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}dw\right| \leq \frac{k \ \mathrm{long}(\Gamma)}{|z|-M},$$

donde $k := \max\{|f(w)| : w \in \Gamma^*\}$. Por tanto:

$$\lim_{z\to\infty} |h(z)| = 0,$$

y, por Liouville, h habrá de ser constantemente nula.

ii. Sea $a \in \Omega\backslash\Gamma^*$ y definamos la función

$$\varphi(z) := (z-a) f(z), \forall z \in \Omega.$$

Ahora, aplicando la primera parte del teorema a φ, tendremos que:

$$0 = i2\pi \mathrm{Ind}_\Gamma(a)\varphi(a) = \int_\Gamma \frac{\varphi(w)}{w-a}dw = \int_\Gamma f(z)dz. \textbf{ Q.E.D.}$$

Hemos dado respuesta a tres problemas:

a. Para cada abierto Ω y cada f función holomorfa en él:

$$\int_\Gamma f = 0, \forall\Gamma \text{ ciclo en } \Omega \Leftrightarrow \exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F' = f$$

b. Para cada abierto Ω y cada Γ ciclo en él:

$$\int_\Gamma f = 0, \forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \Leftrightarrow \Gamma \text{ nulhomólogo respecto de } \Omega$$

c. Para cada abierto Ω :

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f &= 0, \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \forall\Gamma \text{ ciclo en } \Omega \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \text{ todo ciclo } \Gamma \text{ en } \Omega \text{ es homológicamente nulo}\end{aligned}$$

Definición. De un abierto Ω del plano diremos que es homológicamente conexo si todo ciclo Γ (con soporte) en Ω es nulhomológo (respecto de Ω). Es decir,

$$\Omega \text{ es homológicamente conexo } \Leftrightarrow \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}\backslash\Omega, \forall\Gamma^* \subset \Omega.$$

Corolario. Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$. Son equivalentes:

i. Ω es homológicamente conexo.

ii. $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \forall \Gamma$ ciclo en $\Omega \Rightarrow \int_\Gamma f = 0$.

iii. $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F' = f$.

iv. $\forall u \in \mathcal{A}(\Omega), \exists f \in \mathcal{H}(\Omega) : \operatorname{Re} f = u$.

v. $\forall f \in \mathcal{H}(\Omega) : 0 \notin f(\Omega), \exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : e^g = f$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ ii. es el teorema general de Cauchy y ii. $\Rightarrow$ iii. $\Rightarrow$ iv. $\Rightarrow$ v. son ya conocidos. Veamos v. $\Rightarrow$ i.: Consideremos Γ un ciclo arbitrario en Ω y $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$. Como las funciones holomorfas que no se anulan admiten (por hipótesis) logaritmo holomorfo, existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que

$$e^{g(z)} = z - a, \forall z \in \Omega.$$

Así,

$$g'(z) = \frac{1}{z-a}, \forall z \in \Omega,$$

de donde (por la respuesta tercera enunciada arriba) se sigue que

$$\int_\Gamma \frac{1}{z-a} dz = 0,$$

o lo que es lo mismo: $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$.

Como el punto a del abierto Ω era (aunque fijo) arbitrario, se concluye la prueba. **Q.E.D.**

Terminamos con un corolario que, a su vez, nos deja una condición suficiente para afirmar la veracidad de las cinco afirmaciones anteriores:

Corolario. Si el abierto Ω es tal que su complementario $\mathbb{C}\backslash\Omega$ no tiene componentes conexas acotadas, entonces Ω es homológicamente conexo.

Demostración. Sea Γ un ciclo arbitrario en el abierto Ω. Tendremos $\mathbb{C}\backslash\Omega \subset \mathbb{C}\backslash\Gamma^*$. Si $a \in \mathbb{C}\backslash\Omega$, estará, igualmente, en alguna componente conexa (todas ellas no acotadas); pero también lo estará en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\backslash\Gamma^*$. Pero ahí es $\operatorname{Ind}_\Gamma(a) = 0$, luego también vale cero el índice en a de Γ respecto de $\mathbb{C}\backslash\Omega$. **Q.E.D.**

Aplicación. Todo dominio estrellado es homológicamente conexo.

En efecto, razonaremos por reducción al absurdo: supongamos que no lo fuese. Su complementario, por el corolario recién probado, tendría alguna componente conexa acotada. Pero esto es imposible: el complementario de un dominio estrellado consiste, siempre, en una unión de componentes conexas que están, todas ellas (como sabemos), no acotadas. ■

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea $\alpha : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ una función continua verificando
$$\alpha(0) = 0 \quad \wedge \quad \lim_{t \to +\infty} \alpha(t) = \infty.$$
Sea $\Omega := \mathbb{C} \backslash \{\alpha(t) : t \geq 0\}$. Prueba que la identidad admite logaritmo holomorfo en Ω; es decir:
$$\exists f \in \mathcal{H}(\Omega) : e^{f(z)} = z, \forall z \in \Omega.$$

2. Sea $\Omega := \mathbb{C} \backslash [a, b]$, con a, b complejos distintos. Prueba que Ω no es simplemente conexo. Prueba también, que existe raíz cuadrada holomorfa en Ω para la función $z \to (z-a)(z-b)$; es decir:
$$\exists f \in \mathcal{H}(\Omega) : [f(z)]^2 = (z-a)(z-b), \forall z \in \Omega.$$

3. En cada uno de los siguientes casos, determínese si los pares de dominios dados son o no isomorfos; en caso de no serlo, determínese si son o no homeomorfos.
   (a) $\Omega_1 := \mathbb{C}; \quad \Omega_2 := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}\, z| < 1\}$.
   (b) $\Omega_1 := \mathbb{D}; \quad \Omega_2 := \mathbb{D} \backslash \{0\}$.
   (c) $\Omega_1 := \mathbb{D}; \quad \Omega_2 := \mathbb{C} \backslash \{0\}$.
   (d) $\Omega_1 := \mathbb{D}; \quad \Omega_2 := \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$.