Tema 6.1: Índice de una curva cerrada respecto de un punto

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Como hemos podido ver, el teorema de Cauchy para dominios estrellados ha sido la respuesta obtenida para el problema de existencia de primitivas. Es decir, se ha obtenido una respuesta de tipo geométrico (propiedad de estrella para el dominio) a una pregunta de tipo analítico (cuándo existe primitiva para una función holomorfa). Podríamos decir, por tanto, que no es la respuesta más satisfactoria que pudiéramos esperar. Y no lo decimos por puro prurito "analista". En efecto, podemos hacer hincapié en la existencia de dominios no necesariamente estrellados que son isomorfos a dominios estrellados (piensa en algún ejemplo). Y, por ello, la clase de dominios resultante como solución del problema debe ser invariante por isomorfismos (conformes). Es decir, buscamos una clase de dominios que, dando respuesta al problema planteado, sean indistinguibles desde el punto de vista del Análisis Matemático.

En este tema (al igual que en los dos siguientes) se persigue esta búsqueda de solución analítica del problema de la existencia de primitiva: será la llamada forma general del teorema de Cauchy.

Nuestro comienzo es la construcción de un instrumento que nos permita medir el número de vueltas que da una curva cerrada alrededor de un punto.

Proposición. Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ una curva cuyo soporte γ^* no contenga al origen. Existe entonces una función continua $\Phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ tal que

$$e^{\Phi(t)} = \gamma(t), \forall t \in [a,b].$$

Es decir, las curvas que no pasan por el origen admiten logaritmo continuo.

Demostración. La continuidad de γ en el compacto $[a,b]$ nos permite argumentos de continuidad uniforme: elegido $\varepsilon := \text{dist}(0,\gamma^*) > 0$,

$$\exists \delta > 0 : |s-t| < \delta, s,t \in [a,b] \Rightarrow |\gamma(s) - \gamma(t)| < \varepsilon.$$

Ahora consideramos una partición $\{t_0 = a, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = b\}$ de $[a,b]$, tal que

$$0 < t_k - t_{k-1} < \delta, \qquad k \in \{1,...,n\},$$

y llamamos, por comodidad, $D_k := D(\gamma(t_k), \varepsilon), k \in \{1,...,n\}$.

Razonando para cada $k \in \{1, ..., n\}$, como $0 \notin D_k$, podemos asegurar que existe $\varphi_k \in \mathcal{H}(D_k)$ tal que

$$e^{\varphi_k(w)} = w, \qquad \forall w \in D_k, \forall k \in \{1, ..., n\}. \qquad (*)$$

Además, $\gamma([t_{k-1}, t_k]) \subset D_k$ para cada k (¿por qué?).

Usando $(*)$, razonamos la existencia de enteros m_k, con $k \in \{1, ..., n-1\}$, que nos permiten establecer que

$$\varphi_{k+1}(\gamma(t_k)) = \varphi_k(\gamma(t_k)) + i2\pi m_k.$$

Gracias a esto, podemos definir, finalmente, la función continua $\Phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ deseada de la manera siguiente (¡pruébalo!):

$$\Phi(t) := \begin{cases} \varphi_1(\gamma(t)), & a \le t \le t_1 \\ \varphi_k(\gamma(t)) - i2\pi \sum_{j=1}^{k-1} m_j, & t_{k-1} < t \le t_k, 2 \le k \le n-1 \end{cases}$$

Q.E.D.

Lema. Sean dos funciones continuas Φ_1 y Φ_2 de $[a, b]$ en $\mathbb{C}$, tales que

$$e^{\Phi_1(t)} = e^{\Phi_2(t)}, \forall t \in [a, b].$$

Entonces

$$\Phi_2(b) - \Phi_2(a) = \Phi_1(b) - \Phi_1(a).$$

Demostración. Basta observar que la continuidad de la función

$$\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{i2\pi} : [a, b] \to \mathbb{Z}$$

obliga a la misma a ser constante. **Q.E.D.**

Definición. Sea $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \backslash \{0\}$ una curva y sea Φ un logaritmo continuo para γ. Se llama variación logarítmica de γ al número complejo

$$\mathrm{VarLog}(\gamma) := \Phi(b) - \Phi(a).$$

La existencia de Φ queda garantizada por la proposición anterior, y el lema nos da la independencia de la definición de VarLog con respecto de la determinación del logaritmo continuo elegida.

Definición (de índice de una curva cerrada respecto de un punto). Para cada curva cerrada γ llamamos índice de la misma respecto de cualquier punto z_0 ajeno a su soporte, $z_0 \notin \gamma^*$, al número entero

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) := \frac{1}{i2\pi} \mathrm{VarLog}(\gamma - z_0).$$

Observa cómo, en esta definición, se ha dado la curva γ de tal suerte que, para la nueva curva $\gamma - z_0$, $\gamma(t) - z_0 \notin \mathbb{C}\backslash\{0\}$ sea quien sea el argumento t.

Lema. Las curvas regulares γ (con $0 \notin \gamma^*$) que admiten logaritmo continuo Φ, lo admiten, de hecho, derivable. Concretamente, se probará que si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ es una curva regular y existe $\Phi : [a,b] \to \mathbb{C}$ continua tal que $\exp \circ \Phi = \gamma$, entonces Φ es derivable en $[a,b]$ con $\Phi' = \frac{\gamma'}{\gamma}$.

Demostración. Para $t_0 \in [a,b]$, como $w_0 := \gamma(t_0) \neq 0$, la identidad admite logaritmo holomorfo en $D(w_0, |w_0|)$:

$$\exists l \in \mathcal{H}(D(w_0,|w_0|)) : e^{l(w)} = w, \forall w \in D(w_0,|w_0|).$$

Usando la continuidad de la curva:

$$\exists \delta > 0 : |t - t_0| < \delta, t \in [a,b] \Rightarrow |\gamma(t) - \gamma(t_0)| < |w_0|;$$

es decir, llamando $I :=]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap [a,b]$, se sigue que $\gamma(I) \subset D(w_0,|w_0|)$.

Pues bien, si ahora definimos

$$\psi(t) := l(\gamma(t)), \qquad \forall t \in I,$$

tendremos que

$$e^{\psi(t)} = e^{l \circ \gamma(t)} = \gamma(t) = e^{\varphi(t)}, \qquad \forall t \in I;$$

de donde

$$\frac{\varphi(t) - \psi(t)}{i2\pi} \in \mathbb{Z}, \qquad \forall t \in I.$$

Pero esto no es otra cosa que el hecho de que la función $\frac{\varphi - \psi}{i2\pi}$ sea constante, de donde se sigue la derivabilidad de φ en t_0, el cual, si bien ha sido fijo durante la demostración, era arbitrario en $[a,b]$. **Q.E.D.**

Proposición. Sea γ un camino (curva regular a trozos) cerrado y sea $z_0 \notin \gamma^*$. Entonces

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z_0) = \frac{1}{i2\pi} \int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}.$$

Demostración. Consideremos $\{t_0 = a, t_1, ..., t_{n-1}, t_n = b\}$ una partición del intervalo $[a,b]$ de modo que para cada una $\gamma_{|[t_{k-1},t_k]}$ de las n restricciones de γ sea una curva regular. Como $z_0 \notin \gamma^*$, la primera proposición de este tema nos da un logaritmo holomorfo Φ para $\gamma - z_0$ que resulta ser holomorfo para cada $(\gamma - z_0)_{|]t_{k-1},t_k[}$.

De este modo $\Phi_{|[t_{k-1},t_k]}$ es derivable con derivada

$$\left(\Phi_{|[t_{k-1},t_k]}\right)'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z_0}, \qquad \forall t \in]t_{k-1}, t_k[, \forall k \in \{1,...,n\}.$$

Concretamente,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{i2\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} &= \frac{1}{i2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{\gamma_k}\frac{dz}{z-z_0}\\
&= \frac{1}{i2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-z_0}dt\\
&= \frac{1}{i2\pi}\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left(\Phi_{|[t_{k-1},t_k]}\right)'(t)\,dt\\
&= \frac{1}{i2\pi}\sum_{k=1}^{n}\left[\Phi(t_k)-\Phi(t_{k-1})\right]\\
&= \frac{1}{i2\pi}\left[\Phi(b)-\Phi(a)\right] = \operatorname{Ind}_\gamma(z_0)\,. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolario. Sea Ω un abierto del plano tal que toda función holomorfa en él admite primitiva. Entonces, para todo γ camino cerrado con soporte en Ω se tiene que

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z_0) = 0, \forall z_0 \notin \Omega.$$

Demostración. Observa que la aplicacion $z \to \frac{1}{z-z_0}$ es holomorfa en Ω; luego $\int_\gamma \frac{dz}{z-z_0} = 0$, por admitir primitiva. Y ahora aplicamos la proposición anterior. **Q.E.D.**

Proposición (Continuidad del índice). Para cada curva cerrada γ, la función índice

$$\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C}\backslash\gamma^* \to \mathbb{Z}$$

es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$ (y, por tanto, es continua).

Demostración. Primera etapa: probaremos que es localmente constante en cada componente conexa de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$; es decir, para $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ y llamando $\rho := \operatorname{dist}(z_0,\gamma^*) > 0$, hemos de ver que

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \operatorname{Ind}_\gamma(z_0)\,, \qquad \forall z \in D(z_0,\rho).$$

Hagamos cálculos: si $t \in [a,b]$, entonces

$$\gamma(t) - z = \gamma(t) - z_0 + z_0 - z = (\gamma(t)-z_0)\left(1 + \frac{z_0 - z}{\gamma(t)-z_0}\right);$$

de donde

$$\left|\frac{z_0-z}{\gamma(t)-z_0}\right| = \frac{|z_0-z|}{|\gamma(t)-z_0|} < \frac{\rho}{|\gamma(t)-z_0|} \le \frac{\rho}{\rho} = 1,$$

luego

$$t \in [a,b] \Rightarrow 1 + \frac{z_0-z}{\gamma(t)-z_0} \in D(1,1).$$

Pues bien, dado Φ_0 un logaritmo continuo para la curva $\gamma - z_0$, podemos definir una función $\Phi : [a, b] \to \mathbb{C}$, dada por

$$\Phi (t) := \Phi_0 (t) + \log \left(1 + \frac{z_0 - z}{\gamma (t) - z_0} \right), \forall t \in [a, b] ,$$

de modo que Φ es logaritmo continuo para $\gamma - z$. Y así:

$$\text{Ind}_\gamma (z) = \frac{1}{i2\pi} [\Phi (b) - \Phi (a)] = \frac{1}{i2\pi} [\Phi_0 (b) - \Phi_0 (a)] = \text{Ind}_\gamma (z_0) .$$

Segunda etapa: extenderemos el razonamiento a todas y cada una de las componentes conexas de $\mathbb{C} \backslash \gamma^*$. Los detalles se dejarán al lector después de la siguiente sugerencia como inicio de la prueba:

Sea z arbitrario en la misma componente conexa de z_0. Elijamos una conveniente poligonal en ella uniendo los dos puntos: $[z_0, z] = [z_0, z_1] \cup ... \cup [z_{n-1}, z]$, de tal forma que $z_{k-1}, z_{k+1} \in D(z_k, \rho)$, para $k = 1, 2, ..., n - 1$. ■

Proposición. Para una curva cerrada γ, si z está en la única componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \backslash \gamma^*$, entonces

$$\text{Ind}_\gamma (z) = 0.$$

Nota: La existencia de tal "única" componente conexa no acotada viene garantizada por el Teorema de la curva de Jordan.

Demostración. Usando la proposición anterior, bastará probar lo que se desea para $z \notin D(0, M)$, donde $M \geq \text{dist}(0, \gamma^*)$ (pues tales z estarán en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \backslash \gamma^*$).

Tendremos que

$$\gamma (t) - z = -z \left(1 - \frac{\gamma (t)}{z} \right);$$

y como $\left| \frac{\gamma(t)}{z} \right| < 1$ (para todo $t \in [a, b]$), se obtendrá

$$1 - \frac{\gamma (t)}{z} \in D(1, 1).$$

Podemos ahora definir

$$\Phi (t) := \log (-z) + \log \left(1 - \frac{\gamma (t)}{z} \right), \forall t \in [a, b] ,$$

de modo que Φ es continua y verifica

$$e^{\Phi(t)} = \gamma (t) - z, \forall t \in [a, b] .$$

En consecuencia,

$$\text{Ind}_\gamma (z) = \frac{1}{i2\pi} [\Phi (b) - \Phi (a)] = 0. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Proposición. Sean γ_1,$\gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{C}$ dos curvas cerradas. Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$|\gamma_2(t) - \gamma_1(t)| < |z - \gamma_1(t)|, \forall t \in [a, b].$$

Entonces $z \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$ e $\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z)$.

Demostración. La desigualdad estricta de la hipótesis nos garantiza que $z \notin \gamma_1^* \cup \gamma_2^*$, y que la curva

$$\gamma(t) := \frac{\gamma_2(t) - z}{\gamma_1(t) - z}, \forall t \in [a, b]$$

esté bien definida. Y la misma hipótesis, para cada $t \in [a, b]$, conlleva que

$$|\gamma(t) - 1| = \left|\frac{\gamma_2(t) - z}{\gamma_1(t) - z} - 1\right| = \left|\frac{\gamma_2(t) - \gamma_1(t)}{z - \gamma_1(t)}\right| < 1, \forall t \in [a, b];$$

es decir, $\gamma^* \subset D(1, 1)$; y, en particular, $0 \notin \gamma^*$.

Pero, concretamente, $0 \in \mathbb{C}\backslash\overline{D(1, 1)}$; es decir, está en la componente conexa no acotada de $\mathbb{C}\backslash\gamma^*$, de donde $\mathrm{Ind}_\gamma(z) = 0$, por la proposición anterior. Por tanto:

$$0 = \frac{1}{i2\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w - 0} = \frac{1}{i2\pi}\int_a^b \frac{\gamma'}{\gamma} = \frac{1}{i2\pi}\int_a^b \left(\frac{\gamma_2'}{\gamma_2 - z} - \frac{\gamma_1'}{\gamma_1 - z}\right),$$

de donde

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(z) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(z). \blacksquare$$

Otra forma de razonar para lograr demostrar este resultado puede consistir en (suponiendo que $z = 0$, para lo que basta una traslación en el plano) sacarle partido a la fórmula

$$\gamma_1(t) := \gamma_2(t)\left(1 + \frac{\gamma_1(t) - \gamma_2(t)}{\gamma_2(t)}\right) =: \gamma_2(t)\,\rho(t) \neq 0, \forall t \in [a, b].$$

En efecto, para cada una de las funciones continuas del producto de la derecha, al no anularse, existe determinaciones continuas del argumento respectivo cuya suma es, a su vez, argumento continuo de γ_1. En consecuencia

$$\mathrm{Ind}_{\gamma_1}(0) = \mathrm{Ind}_{\gamma_2}(0) + \mathrm{Ind}_\rho(0),$$

y ya basta probar que $\mathrm{Ind}_\rho(0) = 0$, lo cual es evidente sin más que comprobar (¡ejercicio!) que $\rho^* \subset D(1, 1)$ y completar los detalles. $\blacksquare$

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea $\rho : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando

   $$\rho(-\pi) = \rho(\pi), \quad \rho(t) > 0, \forall t \in [-\pi, \pi],$$

   y sea $\gamma\,[-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ la curva definida por

   $$\gamma(t) := \rho(t)\, e^{it}, \forall t \in [-\pi, \pi].$$

   Calcula $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$.

2. Sea γ un camino en $\mathbb{C}$ y sea $\overline{\gamma}$ su conjugado:

$$\overline{\gamma}(t) := \overline{\gamma(t)}, \quad \forall t \in [a, b].$$

Prueba que, para cada función continua f sobre γ^* se tiene que

$$\overline{\int_\gamma f(z)\, dz} = \int_{\overline{\gamma}} \overline{f(\overline{z})} dz.$$

3. Enuncia con detalle la propiedad de invarianza del índice de un punto respecto de una curva cerrada es invariante por giros, homotecias y traslaciones.

4. Sean $a \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ y γ un camino cerrado tal que $\gamma^* \cap \{0, a, \frac{1}{a}\} = \varnothing$. Prueba que que

$$\mathrm{Ind}_{\frac{1}{\gamma}}\left(\frac{1}{a}\right) = \mathrm{Ind}_\gamma(a) - \mathrm{Ind}_\gamma(0)$$

5. Sean las curvas

$$\gamma_1(t) := t, \forall t \in [-1, 1]; \qquad \gamma_2(t) := e^{it}, \forall t \in [0, \pi]; \qquad \gamma := \gamma_1 + \gamma_2.$$

Calcula $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \backslash \gamma^*$.

6. Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, verificando $a < c, b < d$ y sea

$$\gamma := [a + ib, c + ib, c + id, a + id, a + ib].$$

Calcula $\mathrm{Ind}_\gamma(z)$ para cada $z \in \mathbb{C} \backslash \gamma^*$.