Tema 5.3: Teorema de Bloch-Landau. Teorema (pequeño) de Picard

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Picard demostró (en 1879) que las funciones enteras no constantes tienen la propiedad de tomar todos los valores del plano complejo salvo, eventualmente, uno de ellos. Su demostración se ha ido simplificando con el tiempo; el primero en hacerla más sencilla fue Bloch (1925). Las restricciones que aparecen en el enunciado corresponden, como se comprobará después de su demostración, a meras normalizaciones. (Y dicho sea de paso, no hay la más mínima idea subyacente en esta demostración de cuáles son sus claves.)

Teorema de Bloch-Landau. Sea un abierto Ω del plano complejo tal que $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$ y sea f una función holomorfa en Ω tal que $|f'(0)| \geq 1$. Entonces existe $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que $D\left(w_0, \frac{1}{16}\right) \subset f(\mathbb{D})$.

Demostración. Para $r > 0$, sea

$$M(r) := \{|f'(z)| : |z| \leq r\}.$$

Claramente M es una función creciente. Consideremos los números

$$\lambda_k := \frac{1}{2^{k-1}} M\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right).$$

Como $\overline{\mathbb{D}} \subset \Omega$, tendremos

$$\lambda_k \leq \frac{1}{2^{k-1}} M(1), \qquad \forall k \in \mathbb{N};$$

y, por tanto, $\lambda_k \to 0$.

Además, $\lambda_1 = M(0) = |f'(0)| \geq 1$; luego el conjunto

$$\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \geq 1\}$$

es no vacío y está acotado (¿por qué?). Sea

$$m := \max\{k \in \mathbb{N} : \lambda_k \geq 1\}.$$

Para tal m tendremos que $\lambda_m \geq 1 > \lambda_{m+1}$, de donde se verificará

$$\frac{1}{2^{m-1}} M\left(1 - \frac{1}{2^{m-1}}\right) \geq 1 > \frac{1}{2}\frac{1}{2^{m-1}} M\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{2^{m-1}}\right);$$

y, llamando $r := \frac{1}{2^{m-1}} > 0$, la anterior cadena de desigualdades se expresará así:

$$rM(1-r) \geq 1 > \frac{r}{2}M(1-\frac{r}{2}).$$

Por tanto, existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$|z_0| \leq 1 - r \text{ y } |f'(z_0)| = M(1-r);$$

y así, $|f'(z_0)| \geq 1/r$.

Definamos la función auxiliar

$$g(z) := f(z + z_0) - f(z_0), \forall z \in U := \{z \in \mathbb{C} : z_0 + z \in \Omega\}.$$

Por su forma de definición, $g \in \mathcal{H}(U)$. Además,

$$\overline{D(0,r)} \subset U, g(0) = 0 \text{ y } |g'(0)| = |f'(z_0)| \geq 1/r.$$

Veamos que $g\left(\overline{D(0,\frac{r}{2})}\right) \subset \overline{\mathbb{D}}$:

si $z \in \overline{D(0,\frac{r}{2})}$, entonces $|z_0 + z| \leq 1 - r + \frac{r}{2}$, de donde

$$|g'(z)| = |f'(z_0 + z)| \leq M(1 - \frac{r}{2}) < 2/r,$$

y, por tanto,

$$|g(z)| = \left|\int_{[0,z]} g'(w)\, dw\right| \leq \frac{2}{r}|z| \leq 1, \qquad \forall z \in \overline{D(0,\frac{r}{2})}.$$

Ahora, el objetivo es probar que

$$D(0,\frac{1}{16}) \subset g(D(0,r))$$

(y el final ya será inmediato). En efecto: sea $a \notin g(D(0,r))$ (es claro que $a \neq 0$). La función

$$z \to 1 - \frac{g(z)}{a}$$

es holomorfa y no se anula en el disco $D(0,r)$. Por tanto, admite raíz cuadrada holomorfa en él:

$$\exists h \in \mathcal{H}(D(0,r)) : h(z) = 1 - \frac{g(z)}{a}, \forall z \in D(0,r).$$

Podemos suponer que $h(0) = 1$ (¿por qué?).

Derivando esta función h: $2h(0)h'(0) = -g'(0)/a$, de donde

$$|h'(0)| \geq 1/\left(2\,|a|\,r\right),$$

y, en consecuencia,

$$\left|h^2(z)\right| \leq 1 + \frac{|g(z)|}{|a|} < 1 + \frac{1}{|a|}, \qquad \forall z \in \overline{D(0, \frac{r}{2})}.$$

Ahora aplicamos la desigualdad de Parseval para obtener que:

$$\left|h^2(0)\right| + \left|h'(0)\right|^2 \left(\frac{r}{2}\right)^2 \leq 1 + \frac{1}{|a|}.$$

Pero,

$$\left|h^2(0)\right| + \left|h'(0)\right|^2 \left(\frac{r}{2}\right)^2 \geq 1 + \frac{1}{4\,|a|^2\,r^2}\frac{r^2}{4};$$

de donde se sigue que

$$\frac{1}{4\,|a|^2\,r^2}\frac{r^2}{4} \leq \frac{1}{|a|};$$

o sea, $\frac{1}{16} \leq |a|$. Por tanto, $a \notin D(0, \frac{1}{16})$; y así $D(0, \frac{1}{16}) \subset g(D(0,r))$.

Tomemos ahora $w_0 := f(z_0)$ y veamos que $D(w_0, \frac{1}{16}) \subset f(\mathbb{D})$: consideremos $w \in D(w_0, \frac{1}{16})$; así

$$\begin{aligned} |w - w_0| &< \frac{1}{16} \Rightarrow w - w_0 \in D(0, \frac{1}{16}) \subset g(D(0,r)) \\ &\Rightarrow \exists z \in D(0,r) : g(z) = w - w_0. \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$g(z) = f(z + z_0) - f(z) = f(z + z_0) - w_0,$$

de donde $w = f(z + z_0)$; pero

$$|z + z_0| \leq |z| + |z_0| < r + (1 - r) = 1,$$

luego $D\left(w_0, \frac{1}{16}\right) \subset f\left(\mathbb{D}\right)$. **Q.E.D.**

Observemos porqué las hipótesis impuestas son de "normalización": sean

$$\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}, a \in \Omega, f \in \mathcal{H}\left(\Omega\right) : \overline{D(a,r)} \subset \Omega \text{ y } f'(a) = \lambda \neq 0.$$

Sea, también, la función auxiliar

$$g(z) := \frac{1}{r\lambda} f\left(a + rz\right), \forall z \in \mathbb{C}.$$

El teorema de Bloch-Landau nos dice que ha de existir $w_0 \in \mathbb{C}$ tal que

$$D\left(w_0, \frac{1}{16}\right) \subset g\left(\mathbb{D}\right) = \frac{1}{r\lambda} f\left(a, r\right);$$

y, por tanto,
$$D\left(\lambda r w_0, \frac{|\lambda|\, r}{16}\right) \subset f\left(D\left(a,r\right)\right) \subset f\left(\Omega\right).$$
Finalmente, llamando, para $A \subset \mathbb{C}$,
$$\rho\left(A\right) := \sup\left\{R > 0 : \exists a \in A : D(a,R) \subset \Omega\right\},$$
tendremos
$$\rho\left(f\left(\Omega\right)\right) \geq \frac{1}{16}\left|f'\left(a\right)\right| r;$$
de donde
$$\rho\left(f\left(\Omega\right)\right) \geq \frac{1}{16}\left|f'\left(a\right)\right| \operatorname{dist}\left(a, \mathbb{C}\backslash\Omega\right).$$

Corolario. Sea $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}\right)$ no constante. Entonces
$$\forall r > 0 \exists w_0 \in \mathbb{C} : D(w_0, r) \subset f(\mathbb{C}).$$

Demostración. Como existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $|f'(a)| > 0$, para $r > 0$ se tiene que
$$\rho\left(f\left(\mathbb{C}\right)\right) \geq \frac{1}{16}\left|f'\left(a\right)\right| r,$$
de donde se sigue lo que queremos. **Q.E.D.**

Problema abierto: Aún no se ha conseguido evaluar la llamada constante de Bloch.

La constante $1/16$ que aparece en el teorema de Bloch-Landau es, inicialmente, puramente técnica; está asociada al método de demostración usado. Queda por saber si hay un aconstante óptima para este resultado; es decir, encontrar una constante B tal que
$$B = \inf\left\{\rho\left(f\left(\mathbb{D}\right)\right) : f \text{ cumple las hipótesis del teorema de Bloch-Landau}\right\}.$$
Sabemos, éso sí, que $B \geq 1/16$.

Teorema (pequeño) de Picard. Las únicas funciones enteras que dejan de tomar más de un valor en su imagen son las constantes:
$$\begin{aligned} F &\in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}\right), \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad (\alpha \neq \beta) : \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{C}\backslash F\left(\mathbb{C}\right) \\ &\Rightarrow F \text{ es constante.} \end{aligned}$$

Observemos cómo la función exponencial ($\exp\left(\mathbb{C}\right) = \mathbb{C}\backslash\{0\}$) pone de manifiesto que la tesis del teorema (pequeño) de Picard es inmejorable. Si tal halago sobre la excelencia de este enunciado no es excesivo, una vez más, el comentario sobre su demostración (como ya es normal en esta lección) se hará evidente: no hay ninguna posibilidad de entender un hilo argumental que forme su esqueleto.

Demostración. Comencemos normalizando las condiciones de las hipótesis del enunciado:

$$f(z) := \frac{F(z) - \alpha}{\beta - \alpha}, \forall z \in \mathbb{C}$$

es una función entera que no toma los valores 0 y 1 en su imagen. Por tanto (al no anularse), podemos asegurar que

$$\exists g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : f(z) = e^{i2\pi g(z)}, \forall z \in \mathbb{C}. \qquad (\underline{1})$$

Ahora bien, como $1 \notin f(\mathbb{C})$, entonces $\mathbb{Z} \cap g(\mathbb{C}) = \varnothing$; en particular,

$$\exists \varphi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : g(z) = [\varphi(z)]^2, \forall z \in \mathbb{C}. \qquad (\underline{2})$$

Pero tampoco $1 \notin g(\mathbb{C})$, luego

$$\exists \psi \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : g(z) - 1 = [\psi(z)]^2, \forall z \in \mathbb{C}. \qquad (\underline{3})$$

De ($\underline{2}$) y ($\underline{3}$) se sigue que

$$[\varphi(z) - \psi(z)]\,[\varphi(z) + \psi(z)] = 1, \forall z \in \mathbb{C};$$

de donde, en particular, se sigue que $\varphi - \psi$ no se anula en ningún punto. Así:

$$\exists h \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) : e^{h(z)} = \varphi(z) - \psi(z), \forall z \in \mathbb{C}, \qquad (\underline{4})$$

y, por tanto,

$$e^{-h(z)} = \frac{1}{\varphi(z) - \psi(z)} = \varphi(z) + \psi(z), \forall z \in \mathbb{C}, \qquad (\underline{5})$$

De ($\underline{4}$) y ($\underline{5}$):

$$\varphi(z) = \frac{1}{2}\left(e^{h(z)} + e^{-h(z)}\right), \forall z \in \mathbb{C},$$

lo cual, por ($\underline{1}$), nos dice que

$$g(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(e2^{h(z)} + e^{-2h(z)}\right), \forall z \in \mathbb{C};$$

que, a su vez, sustituido en ($\underline{1}$), nos da

$$f(z) = -\exp\left\{i\frac{\pi}{2}\left(e^{2h(z)} + e^{-2h(z)}\right)\right\}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Definamos, para cada $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, las parejas de números complejos (α_n, β_m) dadas por:

$$\alpha_n := \ln\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right), \qquad \beta_m := m\frac{\pi}{2}.$$

Comprobemos que

$$\{\pm\alpha_n \pm \beta_m : (n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} \cap h(\mathbb{C}) = \varnothing. \qquad (\underline{6})$$

Si fuese lo contrario:

$$\begin{aligned}
\exists z &\in \mathbb{C} : h(z) = \pm\alpha_n \pm \beta_m \\
&\Rightarrow e^{2h(z)} + e^{-2h(z)} = (-1)^m \left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^{\pm 2} + (-1)^m \left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^{\mp 2} \\
&= (-1)^m \left[\left(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}\right)^2 + \left(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right)^2\right] = (-1)^n (4n-2) \\
&\Rightarrow f(z) = -\exp\left[i\frac{\pi}{2}(-1)^m (4n-2)\right] = -e^{i\pi(2n-1)(-1)^m} = 1,
\end{aligned}$$

¡lo cual no puede ser! y, por tanto, (6) es cierta. Veamos cómo el conjunto

$$A := \{\pm\alpha_n \pm \beta_m : (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}$$

se distribuye geométricamente por el plano:

Como $\alpha_{n+1} - \alpha_n = \ln \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \to 0$, existe $\rho > 0$ tal que $\alpha_{n+1} - \alpha_n < \rho$, para cualquier natural n. Ahora consideremos $R > \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2}$, y demostremos que

$$\operatorname{dist}(z, A) < R, \forall z \in \mathbb{C}. \qquad (7)$$

Sea $z \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} z \geq 0$ e $\operatorname{Im} z \geq 0$. Existirán $n, m \in \mathbb{N}$ tales que

$$\alpha_n \leq \operatorname{Re} z < \alpha_{n+1}, \qquad \beta_m \leq \operatorname{Im} z < \beta_{m+1}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
\operatorname{dist}(z, A) &\leq |z - (\alpha_n + i\beta_m)| \leq \sqrt{(\operatorname{Re} z - \alpha_n)^2 + (\operatorname{Im} z - \beta_m)^2} \\
&\leq \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{\pi}{2}\right)^2} < R, \forall z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Pero, por la forma del conjunto A (simétrico respecto de los ejes real e imaginario), la discusión anterior es válida, también, cuando $\operatorname{Re} z \leq 0$ o bien $\operatorname{Im} z \leq 0$. Por tanto, (7) es cierto y hemos probado que cualquier disco de radio $R > 0$ contiene elementos de A.

Aplicando ahora el corolario al teorema de Bloch-Landau a la función entera h, que sabemos no toma ningún valor de A en su imagen, tendremos asegurada su constancia. Consecuentemente f, y por ende F, es constante. **Q.E.D.**

Corolario (al teorema de Picard). Si la función entera f no es una traslación, entonces $f \circ f$ tiene un punto fijo.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo: supongamos que no los tiene; luego tampoco los puede tener f. Definamos la función

$$F(z) := \frac{f(f(z)) - z}{f(z) - z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esta función F es entera y su imagen no contiene ni al cero ni al uno: ha de ser constante, por el teorema recién probado. Así,

$$\exists \lambda \in \mathbb{C} \backslash \{0, 1\} : f(f(z)) - z = \lambda \left[f(z) - z\right], \forall z \in \mathbb{C}.$$

Derivando en dicha expresión queda

$$f'(z)\left[f'\left(f(z)\right)-\lambda\right]=1-\lambda, \forall z \in \mathbb{C};$$

luego $f'(z) \neq 0$ y $f'\left[f\left(z\right)\right] \neq \lambda, \forall z \in \mathbb{C}$. En consecuencia, podemos aplicar nuevamente Picard, ahora a la función entera $f' \circ f$:

$$\exists \alpha \in \mathbb{C} : f' = \frac{1-\lambda}{f' \circ f - \lambda} = \alpha,$$

de donde

$$f(z) = az + b, \forall z \in \mathbb{C} \qquad (a, b \in \mathbb{C}).$$

Ahora bien, si fuese $a \neq 1$, tendríamos que $z_0 := \frac{b}{1-a}$ sería un punto fijo para f, lo cual nos haría caer en contradicción. Así, $f(z) = z + b, \forall z \in \mathbb{C}$. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sean f y g dos funciones enteras. Supongamos que las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$ de las dos son, ambas, constantes. ¿Qué podemos decir de f y g, cada una de ellas por separado?

2. Prueba que para cada función entera no constante f se tiene, necesariamente, para cada $w \in \mathbb{C}$, una de las dos siguientes alternativas:

   (a) la ecuación $f(z) = w$ tiene, al menos, una solución.

   (b) existe $\{z_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$ tal que $z_n \to \infty$ y $f\left(z_n\right) \to w$.

3. Prueba que si una función entera es inyectiva, entonces es biyección del plano en sí mismo; es decir: $f \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}\right)$ e inyectiva, entonces $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.