Tema 5.2: Comportamiento local de una función holomorfa. Teoremas de la aplicación abierta y de la función inversa

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

En este tema se exponen dos resultados clásicos de Teoría de la Diferenciación, ahora en el ámbito complejo. Las ideas que subyacen en uno y otro, en el mismo orden en el que aparecerán, son:

a. Las funciones holomorfas llevan abiertos en abiertos.

b. Las aplicaciones conformes son difeomorfismos locales.

La segunda mitad del tema se dedicará a deducir tales resultados a partir de un teorema que será máximo exponente del carácter local de la holomorfía.

Teorema de la aplicación abierta. Sean Ω un dominio del plano $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no constante en Ω. Entonces f es abierta.

Demostración. Sea $U = \overset{\circ}{U} \subset \Omega$. Probemos que $f(U)$ es abierto. Sea $w_0 \in f(U)$. Ha de existir $z_0 \in U$ tal que $f(z_0) = w_0$. En virtud del principio de identidad para funciones holomorfas, existe $r > 0$ tal que $\overline{D(z_0, r)} \subset U$ y si $z \in \overline{D(z_0, r)}$, entonces $f(z) \neq w_0$. (Es decir, los ceros de una función holomorfa se pueden aislar.)

Sea

$$\rho := \min\{|f(z) - w_0| : |z - z_0| = r\}$$

Es evidente que $\rho > 0$; probemos que

$$D(w_0, \frac{\rho}{2}) \subset f(U),$$

con lo que habremos concluido la demostración.

Razonaremos por reducción al absurdo: supongamos que

$$D(w_0, \frac{\rho}{2}) \backslash f(U) \neq \varnothing.$$

Sea pues, $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w - w_0| < \frac{\rho}{2}$ y $w \notin f(U)$.

Definamos la función auxiliar

$$g : U \to \mathbb{C}; \qquad g(z) := \frac{1}{f(z_0) - w}, \forall z \in U.$$

Así, $g \in \mathcal{H}(U)$ y verifica que

$$|g(z_0)| = \frac{1}{|f(z_0) - w|} = \frac{1}{|w_0 - w|} > 2/\rho.$$

Pero, por otro lado, si $|z - z_0| = r$, entonces:

$$\begin{aligned} |g(z)| &= \frac{1}{|f(z) - w|} = \frac{1}{|f(z) - w_0 + w_0 - w|} \\ &\leq \frac{1}{|f(z) - w_0| - |w_0 - w|} < \frac{1}{\rho - \frac{\rho}{2}} = \frac{2}{\rho}; \end{aligned}$$

luego aplicando el principio de la media:

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + re^{i\theta}) d\theta;$$

y tomando valor absoluto:

$$\begin{aligned} 2/\rho &< |g(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| g(z_0 + re^{i\theta}) \right| d\theta \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{2}{\rho} d\theta \leq 2/\rho, \end{aligned}$$

pero esto es absurdo. **Q.E.D.**

Para el próximo resultado, probamos primero el siguiente lema, de interés en sí mismo:

Lema. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Definamos la aplicación

$$g : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}; \qquad g(z, w) := \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w}, \ldots & z \neq w \\ f'(z), \ldots & z = w \end{cases}$$

Entonces, g es continua en $\Omega \times \Omega$.

Demostración. Consideremos $G := \{(z, w) \in \Omega \times \Omega : z \neq w\}$ (es decir, el complemento en $\Omega \times \Omega$ de su propia diagonal). Se trata de un conjunto abierto (¿por qué?), luego al ser $g_{|G}$ continua en G, también lo será la propia g, por el carácter local de la continuidad.

Sea ahora $a \in \Omega$, y veamos que g es continua en (a, a). Por argumentos de continuidad para f': para $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \subset \Omega$ y si $|u - a| < \delta$, entonces $|f'(a) - f'(u)| < \varepsilon$. Ahora, para $z, w \in D(a, \delta)$, pretendemos probar que $|g(z, w) - g(a, a)| < \varepsilon$.

Sean z y w distintos (si son iguales, es trivial). Así:

$$g(z,w) = \frac{f(z)-f(w)}{z-w} = \int_0^1 f'(tz+(1-t)w)dt;$$

de donde:

$$\begin{aligned} |g(z,w)-g(a,a)| &= \left|\int_0^1 f'(tz+(1-t)w)dt - \int_0^1 f'(a)dt\right| \\ &\leq \int_0^1 |f'(tz+(1-t)w)-f'(a)|\, dt < \varepsilon. \qquad \textbf{Q.E.D.} \end{aligned}$$

Teorema de la función inversa. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Supongamos que $f'(a) \neq 0$. Entonces existe $U = \overset{\circ}{U} \subset \mathbb{C}$ tal que:

i. $a \in U$ y f es inyectiva en U;

ii. $V := f(U)$ es abierto; y

iii. $\psi := \left(f_{|U}\right)^{-1} \in \mathcal{H}(V)$ y $\psi'(f(z))f'(z) = 1, \forall z \in U$.

Demostración. i. Consideremos la función continua g del lema. Como $g(a,a) = f'(a) \neq 0$, podemos considerar $\lambda := |g(a,a)| > 0$. Por argumentos de continuidad, existe $\rho > 0$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega$ y si $z, w \in D(a,\rho)$, entonces $|g(z,w)| \geq \lambda/2$. Por tanto, para $z, w \in D(a,\rho)$, $z \neq w$, tenemos que:

$$|f(z)-f(w)| \geq \frac{\lambda}{2}|z-w|,$$

de donde se sigue la inyectividad de f en $D(a,\rho)$. Si hacemos $U := D(a,\rho)$, tendremos ya i.

ii. Como U (tal y como ha sido definido en i.) es un dominio, el teorema de la aplicación abierta nos da lo deseado.

iii. La continuidad de ψ se sigue del apartado anterior. Vamos con su derivabilidad (es decir, su holomorfía): sean $w \in V$ y $(w_n) \subset V\backslash\{w\}$ convergente a w. Llamemos $z := \psi(w)$ y $z_n := \psi(w_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$. La continuidad de ψ nos da que $z_n \to z$; y por su inyectividad $z_n \in U\backslash\{z\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, y como w es arbitraria:

$$\frac{\psi(w_n)-\psi(w)}{w_n-w} = \frac{z_n-z}{\varphi(z_n)-\varphi(z)} = \frac{1}{\frac{\varphi(z_n)-\varphi(z)}{z_n-z}} \to \frac{1}{f'(z)},$$

(donde está garantizado que $f'(z) \neq 0$); es decir, existe la derivada y vale $\psi'(w) = \psi'(f(z)) = 1/f'(z)$. **Q.E.D.**

Hagámonos la siguiente pregunta retórica: ¿qué sucede cuando una función holomorfa tiene derivada nula en un punto?

Valgámonos de un ejemplo para discutir el hecho: la función $z \to z^2$ es entera con derivada nula en el origen. Además, en cualquier entorno perforado del origen este aplicación es dos-a-uno: cada elemento en la imagen tendrá dos preimágenes.

Lo curioso: esta situación tan curiosa será común a todas las funciones holomorfas no constantes. Es lo que vamos a manifestar con el siguiente teorema, el cual, a su vez, incluirá a los teoremas de la aplicación abierta y de la función inversa como casos particulares.

Teorema de comportamiento local de las funciones holomorfas. Sea una función holomorfa en un abierto Ω del plano. Sea $a \in \Omega$. Supongamos que f es no constante en un entorno de a. Sea $m \in \mathbb{N}$ el orden del cero de la función $z \to f(z) - f(a)$ en el punto a. Entonces, existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $0 < |w - f(a)| < \varepsilon$, el conjunto

$$\{z \in D(a, \delta) : f(z) = w\}$$

tiene, exactamente, m elementos.

Demostración. Por hipótesis, podemos escribir

$$f(z) - f(a) = (z - a)^m \varphi(z), \forall z \in \Omega,$$

donde $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\varphi(a) \neq 0$. Por continuidad de φ:

$$\exists \rho > 0 : D(a, \rho) \subset \Omega \text{ y } |z - a| < \rho \Rightarrow \varphi(z) \neq 0;$$

y así,

$$\exists \psi \in \mathcal{H}(D(a, \rho)) : \psi^m(z) = \varphi(z), \forall z \in D(a, \rho).$$

Sea la función auxiliar

$$g(z) := (z - a) \psi(z), \forall z \in D(a, \rho).$$

Para ella, podemos afirmar que

$$g \in \mathcal{H}(D(a, \rho)) \text{ y } f(z) - f(a) = (g(z))^m, \forall z \in D(a, \rho).$$

Pero, $g'(a) = \psi(a) \neq 0$: aplicando a g el teorema de la función inversa en $D(a, \rho)$, podemos afirmar que existe $\delta \in]0, \rho[$ tal que g es inyectiva en $D(a, \delta)$.

Sabemos, también, que $g(D(a, \delta))$ es abierto y $0 = g(a) \in g(D(a, \delta))$. Por tanto,

$$\exists \varepsilon > 0 : D\left(0, \sqrt[m]{\varepsilon}\right) \subset g(D(a, \delta)).$$

Sea ahora w tal que $0 < |w - f(a)| < \varepsilon$ y sea $\{u_1, ..., u_m\} = \sqrt[m]{w - f(a)}$, ($|u_k| < \sqrt[m]{\varepsilon}, 1 \leq k \leq m$); tendremos que

$$\exists z_1, ..., z_m \in D(a, \delta) : g(z_k) = u_k, 1 \leq k \leq m.$$

Ya es claro que

$$\{z \in D(a, \delta) : f(z) = w\} = \{z_1, ..., z_m\}. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Es el momento de ver cómo el teorema recién probado contiene a los dos resultados-estrella de este tema:

A. *Teorema de la aplicación abierta*

Demostración. Consideremos una función holomorfa no constante f en un dominio Ω. El principio de identidad nos dice que f no será constante en ningún abierto G contenido en Ω. Se ha de probar que $f(G)$ es abierto.

Sea $b \in f(G)$, y llamemos $a \in G$ a un punto tal que $f(a) = b$. Si $m \in \mathbb{N}$ el orden del cero de la función $z \to f(z) - f(a)$ en el punto a, entonces, existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $0 < |w - f(a)| < \varepsilon$, el conjunto

$$\{z \in D(a, \delta) : f(z) = w\}$$

tiene, exactamente, m elementos. Se tiene entonces que $D(b, \varepsilon) \subset f(G)$. **Q.E.D.**

B. *Teorema de la función inversa*

Demostración. Consideremos una función holomorfa f en el abierto Ω tal que, para algún $a \in \Omega$, $f'(a) \neq 0$. El teorema de carácter local nos dice que existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $0 < |w - f(a)| < \varepsilon$, el conjunto

$$\{z \in D(a, \delta) : f(z) = w\}$$

tiene, exactamente, un elemento. Por continuidad:

$$\exists \rho > 0 : D(a, \rho) \subset D(a, \delta) \text{ y } f(D(a, \rho)) \subset D(f(a), \varepsilon).$$

La función f es inyectiva en $D(a, \rho)$ y el teorema de la aplicación abierta nos garantiza la continuidad de la función $\left(f_{|D(a,\rho)}\right)^{-1}$. Ahora ya, razonando como en iii. del teorema de la función inversa, se sigue su derivabilidad. **Q.E.D.**

El siguiente resultado, consecuencia del anterior, completa los contenidos del teorema de la función inversa.

Corolario. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $a \in \Omega$. Son equivalentes:

- **i.** $f'(a) \neq 0$.
- **ii.** f es inyectiva en un entorno de a.

Demostración. i. $\Rightarrow$ ii., es i. del teorema de la función inversa.

ii. $\Rightarrow$ i. Llamemos U al tal entorno de a donde f es inyectiva. Razonaremos por reducción al absurdo: supongamos que sea $f'(a) = 0$. Por tanto, el cero de $z \to f(z) - f(a)$ en a es de orden, al menos, dos. Aplicando el teorema de comportamiento local al entorno U, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que si $D(a, \delta) \subset \Omega$ y $0 < |w - f(a)| < \varepsilon$, entonces el conjunto

$$\{z \in D(a, \delta) : f(z) = w\}$$

tiene, al menos, dos elementos. Pero esto contradice ii. **Q.E.D.**

Corolario (Teorema de la función inversa global). Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f es inyectiva, entonces es un isomorfismo conforme de Ω en $f(\Omega)$.

Demostración. Tendremos $f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Por tanto, para cada punto podemos encontrar un entorno en el que podemos obtener una inversa holomorfa. Pero esta inversa local para cada entorno, no puede ser otra que f^{-1} (pues la inversa global existe, al ser f inyectiva). Por tanto, por el carácter local de la derivabilidad, f^{-1} es holomorfa. **Q.E.D.**

Observación: En $\mathbb{C}$ ocurre... ¡todo lo contrario a lo que ocurría en variable real!

a. En todo intervalo $I \subset \mathbb{R}$ si f es derivable en él con derivada no nula, entonces f será inyectiva; y el recíproco es falso (piénsese en la aplicación $x \to x^3$).

b. Ahora, en $\mathbb{C}$, lo contrario: f inyectiva en $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C} \Rightarrow f'(z) \neq 0$, $\forall z \in \Omega$. Además, el recíproco no se da (como pone de manifiesto la función exponencial).

Teorema. Sean Ω_1 y Ω_2 dominios de $\mathbb{C}$, $\varphi \in \mathcal{C}(\Omega_1)$ y $h \in \mathcal{H}(\Omega_2)$. Supongamos que $\varphi(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y que h no sea constante. Si $h \circ \varphi \in \mathcal{H}(\Omega_1)$, entonces $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega_1)$.

Demostración. Sea $a \in \Omega_1$. Vamos a distinguir los casos i. $h'(\varphi(a)) \neq 0$ y ii. $h'(\varphi(a)) = 0$.

i. En este caso, el teorema de la función inversa nos garantiza la existencia de un abierto U con $\varphi(a) \in U \subset \Omega_2$, tal que $h_{|U} : U \to h(U)$ es isomorfismo conforme.

Razonando por la continuidad de φ, existe $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega_1$ y $\varphi(D(a,r)) \subset U$. Ahora bien, razonando para $z \in D(a,r)$:

$$\varphi(z) = \left[\left(h_{|U}\right)^{-1} \circ h_{|U}\right](\varphi(z)) = \left(h_{|U}\right)^{-1}\left[(h \circ \varphi)(z)\right],$$

de donde

$$\varphi_{|D(a,r)} = \left(h_{|U}\right)^{-1} \circ (h \circ \varphi)_{|D(a,r)} \in \mathcal{H}(D(a,r));$$

luego $\varphi \in \mathcal{H}(D(a,r))$, para a arbitrario en Ω_1 (y $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega_1$).

ii. Suponemos ahora $h'(\varphi(a)) = 0$. Y llamemos

$$B := \{z \in \Omega_2 : h'(z) = 0\}.$$

Como $h' \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ y no es idénticamente nula (¿por qué?), podemos asegurar (principio de identidad para funciones holomorfas) que el conjunto B es discreto. Sea entonces

$$A := \{z \in \Omega_1 : \varphi(z) \in B\}$$

(que es no vacío, pues al menos $\varphi(a) \in B$). El razonamiento lo completamos distinguiendo dos posibilidades:

ii.a. $a \in A'$: existe $(a_n) \subset A \backslash \{a\}$ tal que $a_n \to a$.

Por continuidad de φ en a: $\varphi(a_n) \to \varphi(a)$ y, además, $\{\varphi(a_n) : n \in \mathbb{N}\} \subset B$ y $\varphi(a) \in B$. Al ser B discreto, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que si $m \geq n$, entonces $\varphi(a_m) = \varphi(a)$, de donde

$$\exists n \in \mathbb{N} : m \geq n \Rightarrow h \circ \varphi(a_m) = h \circ \varphi(a).$$

Usando el principio de identidad, es constante en Ω_1; así:

$$\exists c \in \mathbb{C} : h \circ \varphi(z) = z, \forall z \in \Omega_1.$$

Por tanto, tenemos $\varphi(z) \in h^{-1}(c), \forall z \in \Omega_1$, con $h^{-1}(c)$ conjunto discreto (principio de identidad). En consecuencia, φ ha de ser constante en Ω_1, y así, holomorfa en a.

ii.b. $a \notin A' (\Rightarrow a \in \mathrm{Ais}(A))$: existe $\delta > 0$ tal que $D(a, \delta) \cap A = \{a\}$ y $D(a, \delta) \subset \Omega_1$.

En este caso, tendremos que $h'(\varphi(z)) \neq 0, \forall z \in D(a, \delta) \backslash \{a\}$; y por lo ya demostrado arriba (vía teorema de la función inversa), se sigue que $\varphi \in \mathcal{H}(D(a, \delta) \backslash \{a\})$. Pero como $\varphi \in \mathcal{C}(D(a, \delta))$, el teorema de Riemann de singularidades evitables nos dice que φ es holomorfa en a.

En resumen, y en cualquier caso, de la arbitrariedad de a en Ω_1, se sigue que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega_1)$. **Q.E.D.**

Merece la pena detenerse en la discusión de los contenidos del enunciado anterior:

* que la función h no sea constante no debe obviarse, pues en tal caso

$$h \circ \varphi \in \mathcal{H}(\Omega_1), \forall \varphi : \Omega_1 \to \Omega_2.$$

* la conexión no es restrictiva: se razonaría sobre cada componente conexa del abierto Ω_1. Pero tampoco lo es en Ω_2: como $\varphi(\Omega_1)$ es conexo en Ω_2, se razonaría la holomorfía sobre cada componente conexa del mismo modo.

* la continuidad de φ tampoco se puede eludir, como pone de manifiesto el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{llll} \Omega_1 := \mathbb{C}, & \varphi : \Omega_1 \to \mathbb{C}, & \varphi(z) := \left\{ \begin{array}{ll} -1, \ldots & \mathrm{Re}\, z \leq 0 \\ 1, \ldots & \mathrm{Re}\, z > 0 \end{array} \right. \\ \Omega_2 := \mathbb{C}, & h : \Omega_2 \to \mathbb{C}, & h(z) := z^2, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \end{array}$$

Observamos cómo h es entera, al igual que $h \circ \varphi$ (constantemente 1) y, sin embargo, φ ni tan siquiera es continua.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea Ω un abierto del plano complejo $\mathbb{C}$, sea f una función holomorfa en Ω y sea $w \in \Omega$ donde $f'(w) \neq 0$. Prueba que, entonces, existe un real positivo ρ tal que

$$\frac{1}{f'(w)} = \frac{1}{i2\pi} \int_{|w-z|=\rho} \frac{1}{f(z) - f(w)} dz.$$

2. Sea f una función holomorfa no constante en un dominio Ω. Llamemos $T := f(\Omega)$. Prueba que
$$f(z) \in \partial T \Rightarrow z \in \partial \Omega.$$
Confirma que el recíproco de lo anterior no es cierto; concretamente, dada
$$f(z) := z^2, \forall z \in \Omega,$$
donde $\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 2, \operatorname{Re} z \leq 0\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, prueba que
$$\exists a \in \partial \Omega : f(a) \in \overset{\circ}{T}.$$

3. Sea Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa no constante en él. Supongamos que $f(\Omega) \subset \Omega$ y que $f(f(z)) = f(z), \forall z \in \Omega$. Prueba que f es la identidad en Ω.

4. Sea f una función derivable en todo su dominio de definición. Según esté definida sobre un intervalo $]a, b[\subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, analiza la relación existente entre las dos afirmaciones siguientes:

   i. f tiene derivada no nula en todo punto de su dominio de definición.

   ii. f es inyectiva en su dominio de definición.

5. Sea Ω un abierto acotado y sea $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω. Prueba que las funciones $\operatorname{Re} f$ e $\operatorname{Im} f$ alcanzan su máximo y mínimo (absolutos) sobre la fontera $\partial \Omega$ del abierto.

6. Prueba que la imagen por una función holomorfa (no constante) de un dominio es otro dominio.