Tema 5.1: Funciones armónicas y subarmónicas. Principio del máximo. Principio del módulo máximo

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Que la gráfica de una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ esté en $\mathbb{R}^4$ conlleva la imposibilidad de su visualización. No obstante, la consideración de la aplicación $z \to |f(z)|$ permite extraer, a través de lo que se llama "superficie modular", consecuecias muy interesantes para f. En el presente tema veremos que la superficie modular de una función holomorfa (salvo casos triviales) no tiene máximos locales.

También será un tema donde sacaremos provecho de la fórmula elemental de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw, \qquad \forall z \in D(a,r),$$

de modo que el conocimiento de una función holomorfa sobre $C(a,r)$ nos permitirá conocerla sobre todo el interior del disco $D(a,r)$.

Comenzamos con el llamado

Principio de la Media. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Entonces

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta.$$

Demostración. Por la fórmula de Cauchy, con $z = a$:

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{i2\pi} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-a} dw \\ &= \frac{1}{i2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(a+re^{i\theta})}{re^{i\theta}} ire^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a+re^{i\theta}) d\theta. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Observemos con detenimiento lo que se ha probado: el valor de una función holomorfa en un punto es siempre el promedio de los valores que dicha función toma sobre los puntos de cualquier circunferencia que tenga a dicho punto como centro. Como consecuencia del principio de la media tenemos la muy importante

Desigualdad de la Media. Sean $\Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Entonces

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(a + re^{i\theta}) \right| d\theta.$$

El hecho de verificar la tesis anterior es de tan suma importancia, que se ha hecho un estudio sistemático de tales funciones.

Definición. Sean $\Omega = \mathring{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función real de variable compleja. Diremos que φ es subarmónica en Ω si verifica las dos condiciones siguientes:

a. φ es continua en Ω.

b. $\overline{D(a,r)} \subset \Omega \Rightarrow \varphi(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(a + re^{i\theta}) d\theta$.

Consecuencia: el módulo de una función holomorfa es una función subarmónica.

Del curso de una variable real sabemos que:

Lema. Sea $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua y no negativa. Si $\int_a^b \varphi \leq 0$, entonces $\varphi(t) = 0, \forall t \in [a,b]$.

Principio del Máximo para funciones subarmónicas. Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ una función subarmónica en Ω. Supongamos que existe $a \in \Omega$ tal que $\varphi(z) \leq \varphi(a)$, para todo $z \in \Omega$. Entonces φ es constante.

Demostración. Sea

$$A := \{z \in \Omega : \varphi(z) = \varphi(a)\}.$$

Claramente, $A \neq \varnothing$ (¿por qué?) Nuestro objetivo: lograr $A = \Omega$; y para ello, haremos uso del lema de conexión. Sean, por tanto, $b \in A$ y $D(b,R) \subset \Omega$. Consideremos $0 < r < R$; por ser φ subarmónica:

$$\varphi(b) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(b + re^{i\theta}) d\theta,$$

lo cual equivale a que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\varphi(b) - \varphi(b + re^{i\theta}) \right] d\theta \leq 0.$$

Pero, por hipótesis, $\varphi(b) - \varphi(b + re^{i\theta}) \geq 0, \forall \theta \in [0, 2\pi]$. Luego, aplicando el lema

$$\varphi(b) - \varphi(b + re^{i\theta}) = 0, \forall \theta \in [0, 2\pi],$$

y, por tanto,

$$C(b,r) \subset A, \forall r \in]0, R[,$$

de donde

$$D(b,R) \subset A.$$

En conclusión: $A = \Omega$. **Q.E.D.**

Corolario. Sean Ω un dominio acotado de $\mathbb{C}$ y $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y subarmónica en Ω. Entonces

$$\max \left\{ \varphi(z) : z \in \overline{\Omega} \right\} = \max \left\{ \varphi(z) : z \in \partial\Omega \right\}.$$

Es decir, el máximo sobre el cerrado se alcanza, siempre, en la frontera.

Demostración. La acotación del dominio nos provee de compacidad, tanto para $\overline{\Omega}$ como para $\partial\Omega$. La continuidad de φ nos garantiza la existencia de ambos números reales que aparecen en la igualdad a probar. Supondremos que φ alcanza su máximo sobre $\overline{\Omega}$ en algún punto de Ω. (¿Por qué podemos hacer esta restricción?) Pero, si este es el caso, el principio del máximo para funciones subarmónicas nos dice que φ ha de ser constante en Ω, y, por continuidad de φ sobre la frontera, será constante sobre todo $\overline{\Omega}$; y de este modo el máximo lo alcanzará también sobre la frontera. **Q.E.D.**

Ahora perseguimos aplicarle nuestros resultados sobre funciones subarmónicas al módulo de una función holomorfa.

Principio del Módulo Máximo Sean Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$ y f una función holomorfa en Ω. Si $|f|$ alcanza un máximo relativo en Ω, entonces f es constante en Ω.

Demostración. Sea $a \in \Omega$ un punto donde la función $|f|$ alcance un máximo relativo. En tales condiciones: existe $r > 0$ tal que

$$D(a,r) \subset \Omega \text{ y } |f(z)| \leq |f(a)|, \forall z \in D(a,r).$$

Podemos aplicar el principio del módulo máximo para funciones subarmónicas a $|f|$ en $D(a,r)$: $|f|$ es constante en el disco. Pero como $f \in \mathcal{H}(D(a,r))$ y $|f|$ constante en $D(a,r)$, entonces f es constante en todo el disco $D(a,r)$. Finalmente, el principio de identidad se encarga del resto. **Q.E.D.**

Corolario. Sean Ω un abierto acotado de $\mathbb{C}$ y $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\overline{\Omega}$ y holomorfa en Ω. Entonces

$$\max \left\{ |f|(z) : z \in \overline{\Omega} \right\} = \max \left\{ |f|(z) : z \in \partial\Omega \right\}.$$

Demostración. Si, en la hipótesis, el abierto (acotado) fuese dominio (acotado), no habría nada que probar gracias al corolario del principio del máximo para funciones subarmónicas. Sea $a \in \Omega$ un punto donde $|f|$ alcanza su máximo (absoluto) sobre $\overline{\Omega}$. Sea $\widetilde{\Omega}$ la componente conexa de Ω tal que $a \in \widetilde{\Omega}$. Así, ahora podemos afirmar que $|f|$ alcanza su máximo (absoluto) sobre $\partial\widetilde{\Omega}$; pero, al fin y al cabo, es $\partial\widetilde{\Omega} \subset \partial\Omega$. **Q.E.D.**

Aplicación. Si f es una función entera verificando

$$|f|(z) \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} z|}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}.$$

Entonces, $f(z) = 0, \forall z \in \mathbb{C}$.

Demostración. Sea $R > 1$ y veamos que, para conveniente $M > 0$, $f\left(\overline{D(0,R)}\right) \subset \overline{D(0,M)}$.

Consideremos la función auxiliar

$$g(z) := \left(z^2 - R^2\right) f(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Sea $z \in C(0,R)$ con $\operatorname{Re} z > 0$. Tendremos que

$$\frac{|z-R|}{|\operatorname{Im} z|} =: \sec\theta \leq \sqrt{2}$$

(pues $\theta \in [0, \pi/4]$), de modo que $|(z-R)\, f(z)| \leq \sqrt{2}$, en el caso $\operatorname{Re} z > 0$. Si hubiésemos considerado $\operatorname{Re} z \leq 0$, tendríamos $|(z+R)\, f(z)| \leq \sqrt{2}$.

En consecuencia,

$$z \in C(0,R) \Rightarrow |g\,(z)| = |z-R|\,|z+R|\,|f(z)| \leq \sqrt{2}\,|\operatorname{Im} z|\,\sqrt{2} < 2R.$$

Aplicando el principio del módulo máximo:

$$z \in \overline{D(0,R)} \Rightarrow |g\,(z)| \leq 2R.$$

Pero, para nuestra función f, ésto significa que

$$|z| \leq R \Rightarrow |f(z)| \leq \frac{2R}{|z^2 - R^2|},$$

de modo que, haciendo $R \to +\infty$, f es idénticamente nula en $\overline{D(0,R)}$. Ahora ya, el principio de identidad, se encarga del resto. **Q.E.D.**

Principio del Módulo Mínimo. Sean Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una holomorfa en Ω. Supongamos que $|f|$ alcanza un mínimo relativo en $a \in \Omega$. Entonces, o bien f es constante en Ω o bien $f(a) = 0$.

Demostración. Razonamos del siguiente modo: supongamos que $f(a) \neq 0$, y que, por tanto, existe $\rho > 0$ tal que

$$D(a,\rho) \subset \Omega \text{ y } |f\,(z)| \geq |f(a)| > 0, \forall z \in D(a,\rho).$$

Consideremos entonces la función auxiliar

$$\frac{1}{|f|} : D\,(a,\rho) \to \mathbb{C}$$

que es holomorfa en todo su dominio. Consecuentemente, $\frac{1}{|f|}$ tiene un máximo absoluto en $D(a,\rho)$. El principio del módulo máximo nos dirá entonces que $\frac{1}{f}$ es constante en $D(a,\rho)$, y, por tanto, lo será la propia f. Una vez más, el principio de identidad es el responsable de lograr el resto. **Q.E.D.**

Encaramos ahora la segunda parte de este tema. En ella vamos a poner de manifiesto la estrecha relación existente entre las funciones holomorfas y las funciones armónicas.

Todo aparecerá, de modo natural, al conectar lo que acabamos de probar en la primera parte del tema y el hecho, tal vez ya lejano, de que toda función compleja f se puede ver como una pareja (u, v) de funciones reales de dos variables reales que acostumbramos en llamar partes real e imaginaria de f.

Toda la riqueza informativa que nos dan estas funciones se encierra (vía ecuaciones de Cauchy-Riemann, también llamadas de Euler-D'Alembert) en la llamada ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} = \frac{\partial^2 v}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 v}{\partial^2 y} = 0. \qquad [*]$$

Pasemos ya a formalizar estos comentarios expuestos.

Teorema. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una holomorfa en Ω. Si llamamos $u := \operatorname{Re} f$ y $v := \operatorname{Im} f$, entonces:

i. u y v son funciones diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$.

ii. u y v verifican, ambas dos, la ecuación de Laplace $[*]$.

Demostración. Como $v := \operatorname{Re}(-if)$, podemos razonar, sin pérdida de generalidad, sobre u (pues $-if$ hereda las propiedades que tenga f).

i. Lo vamos a probar por inducción. Sea:

$$A := \{n \in \mathbb{N} : f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow u := \operatorname{Re} f \in \mathcal{C}^n(\Omega)\}.$$

¿$1 \in A$? Usando la holomorfía de f, las ecuaciones de Cauchy-Riemann nos dicen que

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Como, además, $f' \in \mathcal{C}(\Omega)$, se sigue la continuidad de las derivadas parciales de u sobre Ω. Consecuentemente, $u \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ y, por tanto, $1 \in A$.

Si $n \in A$, ¿$n+1 \in A$? Razonando sobre la holomorfía de la función derivada f', $u := \operatorname{Re} f' \in \mathcal{C}^n(\Omega)$. Pero, razonando como arriba, ahora $u \in \mathcal{C}^{n+1}(\Omega)$ y, por tanto, $n+1 \in A$. Luego $A = \mathbb{N}$.

ii. Como ya sabemos, la holomorfía de f nos dice, entre otras cosas, que

$$f' = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Así, derivando en tales fórmulas y usando las ecuaciones de Cauchy-Riemann o de Euler-D'Alembert:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \end{array}\right\}.$$

Pero las derivadas cruzadas coinciden para funciones de clase $\mathcal{C}^2$, de donde surge la ecuación de Laplace para u. **Q.E.D.**

Definición (Función armónica o función de potencial). Sean un abierto Ω del plano $\mathbb{C}$ y una función real definida sobre él: $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$. Diremos que φ es una función armónica en Ω si verifica las dos condiciones siguientes:

i. φ es de clase $\mathcal{C}^2$ en Ω

ii. φ verifica la ecuación de Laplace en Ω

Notaremos $\varphi \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Con esta definición, el resultado anterior nos dice que las partes real e imaginaria de una función holomorfa son funciones armónicas (es más, son diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$) en el abierto Ω.

Ahora nos planteamos si el problema recíproco será cierto: es decir, las funciones armónicas, ¿son la parte real de alguna función holomorfa?

Este problema, con respuestas local "sí" y global "no", nos permite enganchar (¿sorpresa?... ¡no lo creo!) con algunos resultados ya conocidos por nosotros:

Teorema. Dado un abierto Ω del plano complejo, consideremos las siguientes afirmaciones:

i. $\int_\gamma f = 0$, para toda función f holomorfa y cualquier γ camino cerrado con soporte en Ω.

ii. Toda función holomorfa en Ω admite primitiva:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \Rightarrow \exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F' = f.$$

iii. Toda función armónica en Ω es la parte real de alguna función holomorfa:

$$u \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow \exists \widetilde{F} \in \mathcal{H}(\Omega) : \operatorname{Re} \widetilde{F} = u.$$

iv. Las funciones holomorfas sin ceros en Ω admiten logaritmo holomorfo:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) : 0 \notin f(\Omega) \Rightarrow \exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : f = e^g.$$

v. Las funciones holomorfas sin ceros en Ω admiten raíz cuadrada holomorfa:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) : 0 \notin f(\Omega) \Rightarrow \exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : f = g^2.$$

Entonces: i. $\Leftrightarrow$ ii. $\Rightarrow$ iii. $\Rightarrow$ iv. $\Rightarrow$ v.

Demostración. i. $\Leftrightarrow$ ii. es el teorema de caracterización de la existencia de primitiva.

iv. $\Rightarrow$ v. ya es conocido.

ii. $\Rightarrow$ iii. Para $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, veamos que $f := \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$ es holomorfa en Ω. Por ser u de clase $\mathcal{C}^2$, sus parciales serán de clase $\mathcal{C}^1$. Vemos (pues es lo que basta para concluir la holomorfía de f) que, además, las parciales de u verifican las ecuaciones de C-R o de E-D:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) \end{array}\right\}$$

(donde se ha usado la armonía de u, la ecuación de Laplace, en la primera cadena de igualdades y la conmutación de las derivadas cruzadas en la segunda de ellas).

Por tanto, podemos aplicar la hipótesis ii. a f, de modo que existe una primitiva para ella en Ω; llamémosla F, y escribamos $F := \widetilde{u} + i\widetilde{v}$ para denotar a sus partes real e imaginaria.

Y tendremos, por un lado:

$$F' = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} - i\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y};$$

pero, por el otro:

$$f = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

De este modo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial x} \text{ y } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y},$$

lo que conlleva que $u - \widetilde{u}$ sea constante sobre cada componente conexa de Ω.

Consideremos, ahora, la función dada por

$$\widetilde{F}(z) := F(z) - \widetilde{u}(z) + u(z), \forall z \in \Omega.$$

Pues bien esta es la función buscada: la holomorfía de $\widetilde{F}$ se logra razonando sobre cada componente conexa de Ω (carácter local de la derivabilidad), y, además, se tiene que:

$$\operatorname{Re} \widetilde{F} = \operatorname{Re}(F - \widetilde{u} + u) = \operatorname{Re} F - \widetilde{u} + u = u.$$

iii. $\Rightarrow$ iv. precisa del siguiente lema:

Lema. Sean Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una holomorfa en Ω tal que $0 \notin f(\Omega)$. Si definimos $u(z) := \ln|f(z)|$ para cada z en Ω, entonces $u \in \mathcal{A}(\Omega)$.

Demostración (del lema). Ser armónica es un concepto local; por tanto, consideremos a arbitrario en Ω ($f(a) \neq 0$) y razonaremos en un entorno suyo: $\delta > 0 : D(a, \delta) \subset \Omega$.

Sea $\rho := |f(a)| > 0$. Existe

$$l \in \mathcal{H}(D(f(a), \rho)) : e^{l(z)} = z, \forall z \in D(f(a), \rho),$$

(¿por qué?)

Por argumentos de continuidad para f,

$$\exists\delta>0:D(a,\delta)\subset\Omega \text{ y } f\left(D(a,\delta)\right)\subset D(f\left(a\right),\rho)$$

(¿casualidad llamar precisamente δ a este número positivo?... ¡no lo creo!)

La función $h(z):=l(f(z)),\forall z\in D(a,\delta)$ es holomorfa en su disco de definición y, además,

$$e^{h(z)}=e^{l(f(z))}=f(z),\forall z\in D(a,\delta),$$

de donde, tomando módulos

$$\left|e^{h(z)}\right|=|f(z)|=e^{\operatorname{Re}h(z)},\forall z\in D(a,\delta);$$

y por las propiedades de la exponencial (real)

$$\operatorname{Re}h(z)=\ln|f(z)|=:u(z),\forall z\in D(a,\delta);$$

luego u es armónica en el disco $D(a,\delta)$. **Q.E.D.**

Demostración (de iii. $\Rightarrow$ iv. del teorema, ¡y, por fin, del teorema entero!). Sea $f:\Omega\to\mathbb{C}$ una holomorfa en Ω tal que $0\notin f(\Omega)$. Consideremos la función (según el lema que acabamos de probar) armónica en Ω dada por $u\left(z\right):=\ln|f(z)|$ para cada z en Ω.

Hagamos uso de la hipótesis iii.: $\exists\widetilde{F}\in\mathcal{H}\left(\Omega\right):\operatorname{Re}\widetilde{F}=u$. Llamemos $\varphi:=fe^{-\widetilde{F}}$ (está bien definida en todo Ω). Además de ser, evidentemente, holomorfa en todo su dominio de definición, se tiene, para $z\in\Omega$, que:

$$|\varphi\left(z\right)|=\left|f(z)e^{-\widetilde{F}(z)}\right|=|f(z)|\,e^{-\operatorname{Re}\widetilde{F}(z)}=|f(z)|\,e^{-\ln|f(z)|}=1;$$

de modo que la función φ es constante sobre cada componente conexa de Ω. (Siempre con valores en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$.) De este modo, $\log\varphi$ también lo será (¿por qué?).

Sea ahora $g:=\widetilde{F}+\log\varphi$ (¡la notación delata un final muy cercano!). Esta función es holomorfa en Ω y, además, se tiene que

$$e^{g}=e^{\widetilde{F}+\log\varphi}=e^{\widetilde{F}}\varphi=e^{\widetilde{F}}fe^{-\widetilde{F}}=f. \qquad \textbf{Q.E.D.}$$

Corolario. Si Ω es dominio estrellado, entonces las cinco afirmaciones del teorema anterior son ciertas.

Demostración. Por el teorema de Cauchy para dominios estrellados ii. es cierta, luego todas las demás también lo serán. **Q.E.D.**

En particular, sabemos que v. es falsa sobre $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Corolario. Si $\Omega:=\mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces las cinco afirmaciones del teorema anterior son falsas.

Como cada disco es un entorno estrellado de su centro, basta considerar estos abiertos tan especiales para tener la veracidad de esta afirmación:

Corolario. Toda función armónica es, localmente, la parte real de alguna función holomorfa.

Corolario. Las funciones armónicas son diferenciables de clase $\mathcal{C}^\infty$.

Demostración. Evidente, por ser localmente la parte real de una función holomorfa, será localmente una función diferenciable de clase $\mathcal{C}^\infty$. El hecho de que holomorfía y diferenciabilidad sean propiedades locales es una verdadera suerte en este caso. **Q.E.D.**

Corolario. Sean $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Entonces

$$u(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\left(a + re^{i\theta}\right) d\theta.$$

Equivalentemente: $u \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow u$ y $-u$ son subarmónicas.

Demostración. Sea $R > 0 : \overline{D(a,r)} \subset D(a,R) \subset \Omega$. Por ser el disco $D(a,R)$ dominio estrellado, existe una f función holomorfa en él, tal que $u = \operatorname{Re} f$. Pero, en tal caso, f verifica el principio de la media en a:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a + re^{i\theta}) d\theta;$$

luego tomando partes reales:

$$u(a) = \operatorname{Re} f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(a + re^{i\theta}) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(a + re^{i\theta}) d\theta. \qquad \blacksquare$$

Ya que hemos probado el hecho, nada evidente, de que las funciones armónicas son subarmónicas, ¿qué nos dirá de una función armónica el principio del máximo para funciones subarmónicas?

La respuesta pondrá de manifiesto la potencia de ser algo más que subarmónica: nos esperan dos principios del máximo (uno absoluto y otro relativo) y, por medio, un principio de identidad para funciones armónicas.

El principio de extremo absoluto, consecuencia inmediata (como veremos) del corolario anterior, nos va a decir que las únicas funciones armónicas con extremos (absolutos) en un dominio son las constantes. Nos resultará muy práctico, a fin de su demostración, el siguiente enunciado:

Principio de extremo (absoluto) para funciones armónicas. Sean un dominio Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ y una función armónica $u \in \mathcal{A}(\Omega)$. Para que u sea constante en Ω basta que se verifique alguna de las dos siguientes afirmaciones:

a. $\exists a \in \Omega : u(z) \leq u(a), \forall z \in \Omega.$

b. $\exists b \in \Omega : u(b) \leq u(z), \forall z \in \Omega.$

Demostración. Si se da a., el principio del máximo para funciones subarmónicas aplicado a u nos va a decir que u es constante en Ω.

Si es b. lo que se verifica, aplicando ahora el principio del máximo para funciones subarmónicas a la función $-u$ (pues sería $-u(z) \leq -u(b), \forall z \in \Omega$) tendremos que $-u$ es constante en Ω, luego lo ha de ser u. **Q.E.D.**

Una consecuencia extraordinaria de este hecho será el que las funciones armónicas que sean continuas en la frontera de su dominio de definición (en el enunciado obviaremos la conexión bajo el impuesto de razonar sobre cada componente conexa) no se pueden definir "de cualquier modo" en el abierto:

Corolario. Sea Ω un abierto acotado y sean u y v armónicas en Ω y continuas en $\overline{\Omega}$. Supongamos que u y v coinciden sobre $\partial\Omega$. Entonces u y v coinciden en todo Ω.

Demostración. Consideremos la función $\varphi := u - v$, que es continua en $\overline{\Omega}$ y armónica en Ω. Probaremos que φ es idénticamente cero en Ω razonando primero que $\varphi \leq 0$; después, bastará con aplicar a $-\varphi$ lo hecho con φ.

Como quiera que φ alcanza su máximo absoluto en algún $a \in \overline{\Omega}$ (¿por qué?), ha de ocurrir que o bien $a \in \partial\Omega$, o bien $a \in \Omega$. Si es $a \in \partial\Omega$, entonces

$$\varphi(z) \leq \varphi(a) = 0, \forall z \in \overline{\Omega}.$$

Si es $a \in \Omega$, razonemos con la componente conexa $\widetilde{\Omega}$ en la que se encuentra a. Pero entonces, por el principio de extremo (absoluto) para funciones armónicas aplicado a φ en $\widetilde{\Omega}$, ésta ha de ser constante; luego por continuidad también lo será en su frontera, de modo que φ alcanza su máximo absoluto en $\partial\widetilde{\Omega} \subset \partial\Omega$. Por tanto, y en cualquier caso,

$$\varphi(z) \leq 0, \forall z \in \overline{\Omega}.$$

La conclusión final ya es trivial. **Q.E.D.**

Surge en esta discusión el conocido como

Problema de Dirichlet. Caracterización de los Ω dominios acotados del plano complejo $\mathbb{C}$ tales que para cada $f \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ existe $u \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right)$ tal que $u \in \mathcal{A}(\Omega)$ y $u(z) = f(z), \forall z \in \partial\Omega$.

Se puede consultar, entre otros muchos, la sección 4.2 del capítulo 6 de Ahlfors. Se tiene que existe solución al problema si, y sólo si, $\mathbb{C}\backslash\Omega$ no tiene componentes conexas que se "reduzcan" a un punto (en un sentido que se precisará más adelante).

Terminamos ya este tema reformulando el principio de extremo relativo para funciones armónicas. Recordemos, acabamos de probarlo, que precisamos que una función armónica alcance extremo absoluto para que sea constante. Sería deseable que bastase con que fuese relativo tal extremo (tal y como ocurría para el módulo de funciones holomorfas por ser funciones subarmónicas). Pero, téngase presente ahora, no disponemos de un principio de identidad *ad litera* para funciones armónicas:

$$u(x,y) := e^x \sin(y), \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$$
$$v(x,y) := 0, \qquad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Ambas funciones son armónicas en cualquier dominio del plano, coinciden en $\mathbb{R}$ y, evidentemente, son distintas.

Afortunadamente, sí que disponemos del siguiente "sucedáneo": la condición suficiente para que dos funciones armónicas coincidan sobre un dominio es que el conjunto donde coincidan sea abierto no vacío (observemos que en el ejemplo recién presentado, tal conjunto es de interior vacío); y lo enunciamos así:

Principio de identidad para funciones armónicas. Sean dadas φ y ψ dos funciones armónicas sobre un dominio Ω. Si $A := \{z \in \Omega : \varphi(z) = \psi(z)\}$ es tal que $\overset{\circ}{A} \neq \varnothing$, entonces $\overset{\circ}{A} = \Omega$.

Demostración. Haremos uso del lema de conexión: sea $D(a,r) \subset \Omega$, con $a \in \overset{\circ}{A}$ y $r > 0$. (Bastará, por tanto, probar que $D(a,r) \subset \overset{\circ}{A}$.)

Por tratarse de un dominio estrellado, afirmamos que

$$\exists f, g \in \mathcal{H}(D(a,r)) : \varphi(z) = \operatorname{Re} f(z) \text{ y } \psi(z) = \operatorname{Re} g(z),\ \forall z \in D(a,r).$$

Ahora bien, como $a \in \overset{\circ}{A}$ existe $\rho \in \left]0, r\right[$ tal que $D(a,\rho) \subset A$. (Es decir, ahí φ y ψ coinciden.)

Así, si consideramos

$$h : D(a,r) \to \mathbb{C}; \qquad h(z) := f(z) - g(z),\ \forall z \in D(a,r),$$

resulta que se trata de una función holomorfa con parte real nula: en efecto, para algún $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$h(z) := i\alpha,\ \forall z \in D(a,\rho);$$

pero, por el principio de identidad para funciones holomorfas,

$$h(z) := i\alpha,\ \forall z \in D(a,r);$$

y claro, esto no es ni más ni menos que

$$\varphi(z) = \psi(z),\ \forall z \in D(a,r),$$

es decir, $D(a,r) \subset A$. Pero esto equivale a tener $D(a,r) \subset \overset{\circ}{A}$ (¿por qué?), luego, por el lema de conexión, $\overset{\circ}{A} = \Omega$. **Q.E.D.**

Por fin, al fin, el fin:

Principio de extremo (relativo) para funciones armónicas. Sean Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$ y φ una función armónica en Ω. Si φ alcanza un extremo relativo en Ω, entonces φ es constante en Ω.

Demostración. Llamemos $a \in \Omega$ al punto donde la función φ alcanza su extremo relativo. Para conveniente $r > 0$ (que garantice $D(a,r) \subset \Omega$) tendremos que $\varphi(a)$ es extremo absoluto para φ en $D(a,r)$. Pero, por el principio de extremo absoluto para funciones armónicas, tal φ es constante en $D(a,r)$. Ahora, el principio de identidad para funciones armónicas, recién demostrado, nos dice que φ es constante en todo el dominio Ω. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Justifica que:

   (a) las funciones $e^x \cos y$ y $e^x \sin y$ son armónicas en todo el plano.

   (b) si $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $|f|$ es subarmónica pero no armónica.

   (c) las funciones $\ln z$ y Arg son armónicas en $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

2. Estudia la armonía de las partes real e imaginaria de la función

$$z \to \operatorname{Log}\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

   definida sobre $\mathbb{C}\backslash\{a,b\}$ (para $a \neq b$).

3. Usa la función $z \to z^2$ para poner de manifiesto que en la propiedad ser "*armónica conjugada de*" hay que tener en cuenta el orden de las funciones del par $(u,v) = (\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f)$. Completa lo anterior resolviendo y discutiendo el siguiente resultado: Si dos funciones holomorfas f y g en un dominio Ω son de la forma

$$\operatorname{Re} f = \operatorname{Im} g, \qquad \operatorname{Im} f = \operatorname{Re} g,$$

   entonces, han de ser constantes.

4. Prueba que $u \in \mathcal{A}(\Omega) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \in \mathcal{A}(\Omega)$.

5. Comprueba que la función $u(x,y) := \cosh y \sin x$ es armónica en todo el plano $\mathbb{C}$ y encuentra su armónica conjugada; es decir, una función v tal que $f := u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. ¿Quién es la tal f?

6. Supongamos que la función

$$u(x,y) = g(x)\left[e^{2y} - e^{-2y}\right]$$

   es armónica. Si sabes que $g(0) = 0$ y $g'(0) = 1$, ¿quién habrá de ser g?

7. Sea f una función holomorfa no constante sobre algún disco abierto $D(a,R)$. Para $r \in]0,R[$, se definen las funciones

$$M(r) := \max\{|f(z)| : |z-a| = r\}; \quad A(r) := \min\{\operatorname{Re} f(z) : |z-a| = r\}.$$

   Prueba que se trata de funciones estrictamente crecientes y que, además, en el caso $R = +\infty$, se tiene

$$\lim_{r\to+\infty} M(r) = \lim_{r\to+\infty} A(r) = +\infty.$$

8. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{C}$ y sea (f_n) una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}$ y holomorfas en Ω. Prueba que si (f_n) converge uniformemente en la frontera de Ω, entonces (f_n) converge uniformemente en $\overline{\Omega}$.

9. Sea f una función entera, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, que lleva la circunferencia unidad en la recta real: $f(\mathbb{T}) \subset \mathbb{R}$. Prueba que f es constante.

10. Sea $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ una función armónica. Supongamos que $u(z) \geq 0, \forall z \in \mathbb{C}$. Prueba que u es constante.

11. Sea la función
$$\Phi(x,y) := 6x^2y^2 - x^4 - y^4 + y - x + 1,$$
y sea, por otro lado, $f = u + iv \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Se pide:
   (a) si $\Phi = u$, calcular v;
   (b) si $\Phi = v$, calcular u.

12. Prueba que la clase de las funciones armónicas $\mathcal{A}(\Omega)$ es cerrada para combinaciones lineales, y que para que sea cerrada para productos, $uv \in \mathcal{A}(\Omega)$, es suficiente que u y v sean armónicas conjugadas. Concretamente, si $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, ¿será $u^2 \in \mathcal{A}(\Omega)$? Con $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, ¿para qué funciones f será $f \circ u \in \mathcal{A}(\Omega)$?

13. Sea $u \in \mathcal{A}(\Omega)$. Supongamos dado el cambio a coordenadas polares
$$\widetilde{u} := u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta).$$
Pruébese que:
   (a) si $\widetilde{u}$ sólo depende de ρ, el laplaciano de $\widetilde{u}$ tiene la forma
   $$\widetilde{u}_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}\widetilde{u}_\rho = 0$$
   (b) si estamos sometidos a la condición de a., entonces
   $$\widetilde{u}(\rho,\theta) = a\log\rho + b \qquad (a, b \in \mathbb{C}).$$

14. Calcule, para $n \in \{1,2,3,4\}$, los polinomios armónicos p_n y q_n, dados por la igualdad
$$z^n := (x+iy)^n := p_n(x,y) + iq_n(x,y).$$
Encuentre la forma general de p_n y q_n en el sistema polar de coordenadas.

15. Sea $u \in \mathcal{A}(\Omega)$, $u = u(x,y)$. Sea el cambio de variable
$$x := \varphi(\zeta,\eta), \qquad y := \psi(\zeta,\eta)$$
con φ y ψ armónicas conjugadas en un abierto $\widetilde{\Omega}$. Prueba que la función
$$\widetilde{u}(\zeta,\eta) := u(\varphi(\zeta,\eta), \psi(\zeta,\eta))$$
es armónica en $\widetilde{\Omega}$.

16. Determina todos los polinomios armónicos u de la forma $u(x,y) := ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Encuentra a v, conjugada armónica de u, y expresa $f := u + iv$ como función de z.

17. Determina los valores del parámetro real k para los que la función

$$(x,y) \longrightarrow x\left(e^y + e^{ky}\right)$$

sea armónica.

18. Encuentra la armónica conjugada de la función

$$u(x,y) := e^x \cos y + e^y \cos x + xy$$

explicitando su dominio de definición, y comprueba que para ella se verifica la ecuación de Laplace.

19. Halle la armónica conjugada v en el recinto indicado para la función u en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{ll} \text{a. } u(x,y) := x^2 - y^2 + x, & \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{b. } u(x,y) := \frac{x}{x^2+y^2}, & \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \\ \text{c. } u(x,y) := \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right), & \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_0^- \\ \text{d. } u(x,y) := \frac{1}{2}\ln\left(x^2+y^2\right), & \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \end{array}$$

20. Discútase sobre la existencia o no de funciones holomorfas $f = u + iv$ en cada caso:

$$\begin{array}{l} \text{a. } u(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \\ \text{b. } u(x,y) := \ln\left(x^2+y^2\right) - x^2 + y^2, \\ \text{c. } u(x,y) := \exp\left(\frac{y}{x}\right). \end{array}$$

21. ¿Para qué valores del natural n es armónica la función $x^n - y^n$?

22. Sea Ω un dominio acotado del plano complejo $\mathbb{C}$. Sean $f, g \in \mathcal{C}\left(\overline{\Omega}\right) \cap \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que

$$\text{a. } f(z)\,g(z) \neq 0, \quad \forall z \in \overline{\Omega}, \qquad \text{b. } |f(z)| = |g(z)|, \quad \forall z \in \partial\Omega.$$

Prueba que existe $\lambda \in \mathbb{T}$, tal que

$$f(z) = \lambda g(z), \qquad \forall z \in \overline{\Omega}.$$

23. Sea $u \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$. Supongamos que $u(\mathbb{C})$ no es denso en $\mathbb{R}$; es decir, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \in$Ais$(u(\mathbb{C}))$. Prueba que u es constante.

24. Sea f una función entera no constante y sea ρ un número real positivo. Prueba que el cierre del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| < \rho\}$ es el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |f(z)| \leq \rho\}$.

25. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{C}$ y sea f una función continua en $\overline{\Omega}$, holomorfa en Ω y no constante. Supongamos que $|f|$ es constante en la frontera de Ω. Prueba que, en este caso, f se anula en, al menos, un punto de Ω.

26. Sea p un polinomio de grado n y sea $\rho > 0$. Prueba que el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |p(z)| < \rho\}$ tiene, a lo sumo, n componentes conexas.

27. Determina la armónica conjugada de $\arctan \frac{x}{y}$ (donde $\arctan \frac{x}{y} \in]-\pi, \pi]$).

28. Encuentre, caso de existir, las funciones armónicas (no constantes) del tipo indicado:

    a. $u := \varphi(x)$, b. $u := \varphi(ax + by)$, $(a, b \in \mathbb{R})$
    c. $u := \varphi\left(x^2 + y^2\right)$, d. $u := \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$,
    e. $u := \varphi(xy)$, f. $u := \varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$,
    g. $u := \varphi\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, h. $u := \varphi\left(x^2 + y\right)$.

29. Analice la existencia de funciones analíticas f (y encuéntrelas caso de existir) a partir del conocimiento de su módulo o argumento:

    a. $\rho = \left(x^2 + y^2\right) e^x$, b. $\rho = e^{r^2 \cos 2\varphi}$,
    c. $\theta = xy$, d. $\theta = \varphi + \sin \varphi$.

30. Encuentra una función f holomorfa en Ω, $f = u + iv$, a partir de la armónica dada:

    a. $u(x, y) := x^2 - y^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2+y^2}$
    b. $u(x, y) := e^x (x \cos y - y \sin y) + 2 \sin x \sinh y + x^3 - 3xy^2 + y$
    c. $v(x, y) := 3 + x^2 - y^2 - \frac{y}{2(x^2+y^2)}$
    d. $v(x, y) := \ln\left(x^2 + y^2\right) + x - 2y$

    Especifica el dominio Ω en cada caso.

31. Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{C}$ y sea f una función holomorfa en Ω, no constante. Supongamos que existe una constante real postiva M, verificando la siguiente propiedad: si (z_n) es una sucesión de puntos de Ω convergente a un punto de su frontera, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow |f(z_n)| < M + \varepsilon.$$

    Prueba que $|f(z)| < M, \quad \forall z \in \Omega$.

32. Sea $f \in \mathcal{C}\left(\overline{\mathbb{D}}\right) \cap \mathcal{H}(\mathbb{D})$ una función continua en el disco cerrado unidad y holomorfa en el abierto. Supongamos que si $z \in \mathbb{T} \Rightarrow |f(z)| = 1$. Determina el comportamiento de f a partir del conocimiento de sus ceros. (*Indicación*: Si no tiene ceros habrá de ser constante; en otro caso, se podrá construir, mediante funciones de Möbius, una función que verifica las mismas hipótesis que f y que tiene "los mismos" ceros.)

33. Sean Ω_1 y Ω_2 dos abiertos del plano complejo $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ con $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, y $u \in \mathcal{A}(\Omega_2)$. Prueba que la composición es armónica en Ω_1: $u \circ f \in \mathcal{A}(\Omega_1)$. (*Indicación*: no es aconsejable optar por verificar la ecuación de Laplace para $u \circ f$.)

34. Sea Ω un dominio del plano $\mathbb{C}$ y sea $a \in \Omega$ tal que las funciones $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, verifican:

$$|f(z)| + |g(z)| \leq |f(a)| + |g(a)|, \forall z \in \Omega.$$

Prueba que tanto f como g son constantes en Ω. (Indicación: trabaja con las funciones $\frac{\overline{f(a)}}{f(a)} f$ y $\frac{\overline{g(a)}}{g(a)} g$.)