Tema 4.6: Teorema de Morera. Teorema de Weierstrass. Topología de la convergencia uniforme sobre compactos

E. de Amo

July 24, 2008

El presente tema estará dedicado al estudio de (la) conveniente convergencia de sucesiones de funciones holomorfas en un abierto dado.

La convergencia puntual será una noción muy débil. Por otro lado, de una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$ sólo cabe esperar, en general, convergencia uniforme cuando $a_n = 0$ a partir de un momento, en adelante.

La convergencia adecuada, y que da nombre a este tema, nos viene dada por el comportamiento de las series de potencias en su disco de convergencia.

Un paso más, será el logro de una topología en el espacio de las funciones holomorfas cuya convergencia sea la uniforme sobre compactos; veremos que tal topología es metrizable, pero no proviene de ninguna norma.

El resultado central de este tema es, sin duda, el teorema de Weierstrass. Para su prueba contaremos con una inestimable ayuda: el teorema de Morera, el cual es, realmente, un recíproco del teorema de Cauchy-Goursat.

Notación: Escribiremos $f_n \underset{\mathcal{K}-u}{\rightarrow} f$ cuando queramos expresar que una sucesión (f_n) converge uniformemente sobre los compactos de cierto abierto a una función f.

Teorema (de Morera). Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua sobre un abierto del plano. Supongamos que

$$\int_{\partial \blacktriangle} f = 0$$

para todo triángulo $\blacktriangle \subset \Omega$. Entonces, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. Para $a \in \Omega$, consideremos un $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$. Para cada $z \in D(a,r)$ definimos

$$F(z) := \int_{[a,z]} f.$$

Por ser los discos abiertos: si $b \in D(a,r)$, existirá $\rho > 0$, tal que $D(b,\rho) \subset D(a,r)$; y por ser convexos, si $z \in D(b,\rho)$, entonces $\blacktriangle := \triangle(a,b,z) \subset D(a,r) \subset \Omega$. Así, por el teorema de Cauchy-Goursat, tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\blacktriangle} f = \int_{[a,b]} f + \int_{[b,z]} f + \int_{[z,a]} f \\ &= F(b) + \int_{[b,z]} f - F(z); \end{aligned}$$

de donde, aplicando el lema de construcción de primitivas, por la arbitrariedad de z en $D(b,\rho)$, se tiene que F es una primitiva para f en $D(a,r)$.

En consecuencia, $f \in \mathcal{H}(D(a,r))$. Pero, igualmente, a también es arbitrario en el abierto Ω, luego $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. **Q.E.D.**

Teorema (de convergencia de Weierstrass). Sea (f_n) una sucesión de funciones holomorfas en un abierto Ω y sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f_n \underset{\mathcal{K}-u}{\to} f$. Entonces, se verifican:

i. $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

ii. $f_n^{k)} \underset{\mathcal{K}-u}{\to} f^{k)}, \forall k \in \mathbb{N}$.

Demostración. i. $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, por ser límite uniforme de funciones continuas y gracias al carácter local de la continuidad y por ser Ω localmente compacto. (Realiza los cálculos con detalle.)

Dado un triángulo $\blacktriangle := \triangle(a,b,c) \subset \Omega$, $\partial\blacktriangle$ es un compacto de Ω; luego la convergencia de (f_n) a f en él es uniforme, y así:

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\partial\blacktriangle} f_n = \int_{\partial\blacktriangle} f.$$

Ahora bien, el teorema de Cauchy para el triángulo nos dice que la sucesión de arriba es de ceros; luego también su límite. Dada la arbitrariedad del triángulo $\blacktriangle$ en Ω, el teorema de Morera nos da la holomorfía deseada para f en Ω.

ii. Aunque después se dará con detalle, convenimos en escribir

$$p_K(f) := \max\{|f(z)| : z \in K\}$$

cuando f sea una función continua definida en un abierto Ω del plano $\mathbb{C}$ y $K \subset \Omega$ un compacto. Esta p_K es una seminorma y

$$f_n \underset{\mathcal{K}-u}{\to} f \Leftrightarrow p_K(f - f_n) \to 0.$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}$ y $K \subset \Omega$ compacto. Sea $R > 0$ dado por

$$R := \begin{cases} < \operatorname{dist}(K, \mathbb{C}\backslash\Omega), & \text{si } \Omega \neq \mathbb{C} \\ 1, & \text{si } \Omega = \mathbb{C} \end{cases}$$

Llamemos

$$H := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}\,(z, K) \leq R\}\,,$$

que es compacto y verifica $K \subset H \subset \Omega$. Si $a \in K$, las desigualdades de Cauchy nos dan

$$\left| f_n^{k)}\,(a) - f^{k)}\,(a) \right| \leq \frac{k!}{R^k} M\,(f_n - f, a, R) \leq \frac{k!}{R^k} p_K\,(f - f_n)\,, \qquad \forall a \in K.$$

Así:

$$p_K\left(f^{k)} - f_n^{k)}\right) \leq \frac{k!}{R^k} p_K\,(f - f_n)\,,$$

de donde, aplicando la hipótesis $f_n \underset{\mathcal{K}-u}{\rightarrow} f$, se tiene lo deseado, pues el compacto K es arbitrario en Ω. **Q.E.D.**

Como vemos, Weierstrass nos argumenta que la convergencia uniforme sobre compactos es la adecuada para tratar con las sucesiones de funciones holomorfas. Ahora, el objetivo será introducir una topología en $\mathcal{H}\,(\Omega)$ que coincida con la de la convergencia uniforme sobre compactos.

Llamemos la atención sobre la elegancia de la demostración de este resultado. En particular, en i., es de extrema belleza cómo se conjugan dos resultados recíprocos: Cauchy-Goursat y Morera (el primero se aplica sobre los elementos de la sucesión de funciones holomorfas y el segundo sobre la función límite, que es, de hecho, es continua).

Definición. Sean Ω un abierto del plano $\mathbb{C}$, f una función continua definida en él, y sea $K \subset \Omega$ un compacto. Notamos (como ya se hizo en la parte ii. de la demostración anterior):

$$p_K\,(f) := \max\{|f(z)| : z \in K\}\,.$$

Para cada $\varepsilon > 0$, se considera

$$U(f, K, \varepsilon) := \{g \in \mathcal{C}\,(\Omega) : p_K\,(g - f) < \varepsilon\}\,.$$

Consideremos la siguiente familia τ de subconjuntos de $\mathcal{C}\,(\Omega)$: Si $\mathcal{F} \subset \mathcal{C}\,(\Omega)\,,$ diremos que $\mathcal{F} \in \tau$, cuando para cada $f \in \mathcal{F}$ existen un compacto K y un real positivo ε, tales que $U(f, K, \varepsilon) \subset \mathcal{F}$.

Surgen, inmediatamente, dos preguntas a abordar:

1. ¿Es esta τ, realmente, una topología?
2. En caso de serlo, ¿coincidirá con la de la convergencia uniforme sobre compactos?

Como cabe sospechar, las respuesta será afirmativa en ambos casos.

Proposición. La clase τ es una topología sobre el espacio $\mathcal{C}\,(\Omega)$ y la familia

$$\mathcal{U} := \{U(f, K, \varepsilon) : f \in \mathcal{C}\,(\Omega)\,, K \subset \Omega \text{ compacto y } \varepsilon > 0\}$$

es una base para τ.

Demostración. Veamos que τ es, en efecto, una topología.

Claramente $\varnothing$ y $\mathcal{C}(\Omega)$ están en τ.

Sea una familia arbitraria $\{F_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset \tau$. Consideremos $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$. Dado $f \in \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda$, existirá $\lambda \in \Lambda$ tal que $f \in F_\lambda$. Así, existen K compacto y $\varepsilon > 0$ tales que

$$U(f, K, \varepsilon) \subset F_\lambda \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda;$$

y, en consecuencia, $\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \in \tau$.

Sean $F_1, F_2 \in \tau$. Dada $f \in F_1 \cap F_2$, tenemos que existen compactos K_1, K_2 y reales positivos $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, tales que

$$U(f, K_1, \varepsilon_1) \subset F_1 \text{ y } U(f, K_2, \varepsilon_2) \subset F_2.$$

Así, con $K := K_1 \cup K_2$ y $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$, se tiene que $U(f, K, \varepsilon) \subset F_1 \cap F_2$ y, por tanto, $F_1 \cap F_2 \in \tau$.

Resta ver que la familia $\mathcal{U}$ es una base de la topología τ. Para ello bastará ver que sus elementos son abiertos. Dados $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $K \subset \Omega$ compacto y $\varepsilon > 0$, sea $g \in U(f, K, \varepsilon)$. Consecuentemente,

$$p_K(f - g) =: \delta < \varepsilon.$$

Veamos que $U(g, K, \varepsilon - \delta) \subset U(f, K, \varepsilon)$, y, por tanto, $U(f, K, \varepsilon) \in \tau$. En efecto. Como

$$h \in U(g, K, \varepsilon - \delta),$$

se sigue que

$$p_K(h - f) < p_K(g - h) + p_K(g - f) < \varepsilon - \delta + \varepsilon = \varepsilon,$$

luego $h \in U(f, K, \varepsilon)$. **Q.E.D.**

Y ahora, la respuesta a la segunda pregunta.

Proposición. Sea $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$ y sean $(f_n), f \in \mathcal{C}(\Omega)$. Son equivalentes:

- **i.** $f_n \underset{\mathcal{K}-u}{\longrightarrow} f$; es decir, (f_n) converge uniformemente sobre compactos a f
- **ii.** (f_n) converge a f en la topología τ

Demostración. (f_n) converge uniformemente sobre compactos de Ω a $f \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall K \subset \Omega, K$ compacto y $\forall\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow p_K(f - f_n) < \varepsilon$
$\Leftrightarrow \forall K \subset \Omega, K$ compacto y $\forall\varepsilon > 0$, $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow f_n \in U(f, K, \varepsilon)$
$\Leftrightarrow \forall U(f, K, \varepsilon)$, $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \Rightarrow f_n \in U(f, K, \varepsilon)$
$\Leftrightarrow (f_n)$ converge a f en la topología τ, por ser $\mathcal{U}$ base de entornos para f en $(\mathcal{C}(\Omega), \tau)$. **Q.E.D.**

Definición. La topología τ, arriba considerada, se llama topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

La clase $\mathcal{H}(\Omega)$ de las funciones holomorfas en el abierto Ω, se considerará dotada de la topología $\tau_{|\mathcal{H}(\Omega)}$ que como subespacio hereda de $(\mathcal{C}(\Omega), \tau)$.

Las preguntas naturales que surgen ahora son:

3. ¿Existirá alguna distancia en $\mathcal{C}(\Omega)$ cuya topología inducida coincida con τ?

4. Tal vez, ¿estará inducida por alguna norma?

Veremos cómo las respuestas son, respectivamente, "sí" y "no"; concretamente, veremos que la topología τ es metrizable y completa.

Definición. Sean Ω un abierto del plano y (K_n) una sucesión exhaustiva de compactos en él ($\Omega = \cup_n K_n$ y $K_n \subset \overset{\circ}{K}_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$). Para aligerar notación: sea $p_n := p_{K_n}, \forall n \in \mathbb{N}$ y definamos

$$d(f,g) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)}, \qquad \forall f,g \in \mathcal{C}(\Omega).$$

Para probar resultados concernientes a d precisamos de un lema que es mero cálculo:

Lema. Para reales no negativos a, b, c tales que $a \leq b+c$, se tiene:

i. $\frac{a}{1+a} \leq \frac{b+c}{1+b+c}$.

ii. $\frac{b+c}{1+b+c} \leq \frac{b}{1+b} + \frac{c}{1+c}$.

Proposición La aplicación d, arriba definida, es una distancia en $\mathcal{C}(\Omega)$.

Demostración. Claramente, $d(f,g) \geq 0$. Si es $d(f,g) = 0$, se sigue que $p_n(f-g)$, para todo natural n. Así, sobre cada K_n, es $f = g$. Y así, coincidirán en todo el abierto.

La simetría es evidente (ya hemos abusado, sin decirlo, del hecho de que $p_n(f-g) = p_n(g-f)$).

Para funciones f, g, h continuas en Ω, tenemos que

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-h)}{1+p_n(f-h)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)+p_n(g-h)}{1+p_n(f-g)+p_n(g-h)} \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(h-g)}{1+p_n(h-g)} \\ &= d(f,g) + d(g,h). \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Lema Sea Ω un abierto no vacío del plano complejo.

i. Si $K \subset \Omega$ es un compacto y $\varepsilon > 0$, entonces, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(f,g) < \delta \Rightarrow g \in U(f, K, \varepsilon).$$

ii. Dado $\delta > 0$, existen un compacto $K \subset \Omega$ y $\varepsilon > 0$, tales que

$$f, g \in \mathcal{C}(\Omega), g \in U(f, K, \varepsilon) \Rightarrow d(f, g) < \varepsilon.$$

Demostración. i. Para el compacto dado, existirá un momento m en la sucesión exhaustiva de compactos (K_n) en el que

$$K \subset \overset{\circ}{K}_m \subset (K_m \subset) \overset{\circ}{K}_{m+1}.$$

Tomemos $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2^m + 2^m \varepsilon}$, y supongamos $d(f, g) < \delta$:

$$\begin{aligned} p_K(f-g) &\leq p_m(f-g) = \frac{\frac{p_m(f-g)}{1+p_m(f-g)}}{1 - \frac{p_m(f-g)}{1+p_m(f-g)}} \\ &\leq \frac{2^m d(f,g)}{1 - 2^m d(f,g)} < \frac{\frac{\varepsilon}{2^m + 2^m\varepsilon}}{1 - \frac{\varepsilon}{2^m + 2^m\varepsilon}} = \varepsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia, $g \in U(f, K, \varepsilon)$.

ii. Existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^m} < \frac{\delta}{2}$. Hagamos $K := K_m$ y $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$. Para $g \in U(f, K, \varepsilon)$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} &= \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} + \sum_{n=m+1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} \\ &< \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} \frac{p_n(f-g)}{1+p_n(f-g)} + \frac{\delta}{2} < p_n(f-g) \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{2^n} + \frac{\delta}{2} \\ &< p_n(f-g) + \frac{\delta}{2} < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Y como inmediata consecuencia:

Proposición. La topología asociada a la distancia d es la τ.

Observación: Notemos la terrible arbitrariedad con la que ha sido elegida la distancia d. Ha dependido, tanto de la sucesión exhaustiva de compactos, como de la sucesión elegida, $\frac{1}{2^n}$ en nuestro caso (de entre las posibles (a_n) de términos positivos con la condición $\sum_n a_n$ convergente). Por tanto, lo realmente importante no va a ser la forma concreta de la métrica, si no el hecho de que la topología τ sea metrizable.

Proposición. La distancia d es completa.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de Cauchy en $(\mathcal{C}(\Omega), d)$. Fijemos (aunque arbitrarios) un compacto K en Ω y un $\varepsilon > 0$. Sea $\delta > 0$, dado por i. del lema anterior. Por ser de Cauchy:

$$\exists m \in \mathbb{N} : p, q \geq m \Rightarrow d(f_p f_q) < \delta.$$

Por tanto, $f_p \in U(f_q, K, \varepsilon) \Rightarrow p_K(f_q - f_p) < \varepsilon$.

Sea ahora $z \in \Omega$ y consideremos $K := \{z\}$. Para tal elección, si tomamos $\varepsilon > 0$, existirá $m \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq m$ entonces $|f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon$; luego la sucesión $(f_n(z))$ es de Cauchy en $\mathbb{C}$. Por tanto, para cada $z \in \Omega$ podemos definir

$$f(z) := \lim_{n \to +\infty} f_n(z).$$

Obtenemos así, mediante convergencia puntual, el candidato a límite.

Veamos que, en efecto, se trata de una función continua y que la convergencia es, de hecho, uniforme sobre compactos. Demostremos que $f_n \underset{\mathcal{K}-u}{\rightarrow} f$.

Sea un compacto $K \subset \Omega$. Para $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ el dado por i. del lema. Sea m también un natural tal que

$$p, q \geq m \Rightarrow d(f_p, f_q) < \varepsilon.$$

Sea $z \in K$. Ocurrirá que

$$p, q \geq m \Rightarrow |f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon.$$

Fijando $p \geq m$ y haciendo $q \to +\infty$:

$$|f_p(z) - f(z)| \leq \varepsilon. \qquad [*]$$

Observemos que la fórmula [∗] es válida para cualesquiera $p \geq m$ y $z \in K$. Luego

$$p_K(f_p - f) \leq \varepsilon, \forall p \geq m.$$

Pero también m y K son arbitrarios; por tanto, $f_n \underset{\mathcal{K}-u}{\rightarrow} f$. (Recuerda el argumento inicial en i. del teorema de convergencia de Weierstrass.) **Q.E.D.**

Resumimos lo visto en el siguiente teorema:

Teorema Sea Ω un abierto del plano complejo. Se verifican:

- **i.** La convergencia en $(\mathcal{C}(\Omega), d)$ es la uniforme sobre compactos.
- **ii.** $(\mathcal{C}(\Omega), d)$ es un espacio métrico completo.
- **iii.** $\mathcal{H}(\Omega)$ es un cerrado de $(\mathcal{C}(\Omega), \tau)$; y, por tanto, completo.
- **iv.** La aplicación $f \to f'$, de $\mathcal{H}(\Omega)$ en $\mathcal{H}(\Omega)$, es continua.

Demostración. i. y ii. son las dos proposiciones anteriores. iii. es otra forma de enunciar la primera parte del teorema de Weierstrass. La continuidad viene dada por el teorema de Weierstrass (la aplicación es continua por sucesiones) junto al hecho de que $\mathcal{H}(\Omega)$ sea espacio métrico. **Q.E.D.**

Concluimos con una promesa anunciada:

Proposición La topología τ de la convergencia uniforme sobre compactos en el espacio $\mathcal{C}(\Omega)$ de las funciones continuas no proviene de ninguna norma.

Demostración. Razonaremos por reducción al absurdo: sea $\|\circ\|$ la norma que induce a la topología τ. Como

$$B(0,1) := \{f \in \mathcal{C}(\Omega) : \|f\| < 1\}$$

es un entorno (abierto) del origen, existen $K \subset \Omega$ compacto y $\varepsilon > 0$ tales que

$$U(0, K, \varepsilon) \subset B(0,1).$$

Sea $z_0 \in \Omega \backslash K$ (que sabemos debe existir), y sea $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} f(z_0) = 1 \\ f(z) = 0, \ldots\ldots\ldots z \in K \\ 0 \leq f(z) \leq 1, \ldots z \in \Omega \end{cases}$$

(Podemos considerar, por ejemplo, $f(z) := \frac{d(z,K)}{d(z,K)+d(z,z_0)}$.) Para esta función:

$$p_K(nf) = 0, \forall n \in \mathbb{N},$$

de donde

$$nf \in U(0, K, \varepsilon), \forall n \in \mathbb{N},$$

y, por tanto, se tiene que

$$\|nf\| < 1, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \|f\| < \frac{1}{n}, \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f(z) = 0, \forall z \in \Omega,$$

lo cual es un absurdo. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sean un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$, una sucesión (f_n) de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$ y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función continua. Prueba la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

   (a) La sucesión (f_n) converge uniformemente a f sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

   (b) Para toda sucesión (z_n) de puntos en Ω convergente a un punto $z_0 \in \Omega$, la sucesión $(f_n(z_n))$ converge a $f(z_0)$.

2. Sean un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ y una sucesión (f_n) de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$ que converge uniformemente sobre compactos a una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Prueba que si $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es una función continua, entonces la sucesión $(g \circ f_n)$ converge uniformemente sobre compactos a la función $g \circ f$.

3. Sean un abierto Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ y una sucesión (f_n) de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$. Prueba la equivalencia de las siguientes afirmaciones:

(a) La sucesión (f_n) converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

(b) Cada punto de Ω tiene un entorno en el que la sucesión (f_n) converge uniformemente.

4. Sean abiertos Ω_1 y Ω_2 del plano complejo $\mathbb{C}$, $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2$, y sea una sucesión (f_n) de funciones continuas de Ω en $\mathbb{C}$. Prueba que si la sucesión (f_n) converge uniformemente sobre cada compacto $K_1 \subset \Omega_1$ y sobre cada compacto $K_2 \subset \Omega_2$, entonces (f_n) converge uniformemente sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

5. Sea la sucesión de funciones (f_n) de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, dada por

$$f_n(z) := \frac{1}{n}\sin(nz), \qquad \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Prueba que (f_n) converge uniformemente sobre $\mathbb{R}$, pero no converge uniformemente sobre ningún abierto de $\mathbb{C}$. (Sugerencia: considera la sucesión de derivadas (f_n').)

6. Prueba que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{1-z^n}$$

converge uniformemente sobre compactos en el disco unidad $\mathbb{D}$ y que, por tanto, su suma es una función folomorfa en $\mathbb{D}$.

7. Prueba que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{(1-z^n)(1-z^{n+1})}$$

converge uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{C}\backslash\mathbb{T}$ y determina la suma de dicha serie. (Vuelve al ejercicio 4.)

8. Prueba que la serie

$$\sum_{n\geq 1} \exp(-n)\sin(nz)$$

converge uniformemente sobre compactos del abierto

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < 1\}$$

y determina su suma.

9. Prueba que, para cada natural k, la serie de potencias

$$\sum_{n\geq 1} \frac{k}{kn(n+1)+1} z^n$$

tiene radio de convergencia 1. Sea f_k la función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ definida por la suma de dicha serie. Prueba que la sucesión (f_k) converge uniformemente en $\mathbb{D}$ y encuentra el desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen para la función límite.

10. Sea una función holomorfa en el disco unidad, $f \in \mathcal{H}(\mathbb{D})$, verificando $f(0) = 0$. Prueba que la serie

$$\sum_{n\geq 1} f\left(z^n\right)$$

converge en $\mathbb{D}$ y que su suma es holomorfa en $\mathbb{D}$. Reconsidera el ejercicio 6.

11. (*La función ζ de Riemann*) Sea la función $\zeta : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$\zeta(z) := \sum_{n\geq 1} n^{-z}$$

para $z \in \Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$. Prueba las siguientes afirmaciones sobre la función ζ de Riemann:

(a) ζ es analítica en el dominio Ω. Obténgase $\zeta'(z)$ para $z \in \Omega$.

(b) La convergencia de ζ en Ω no es uniforme.

(c) La serie

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (\log n)^k n^{-z}$$

es analítica en Ω.

12. Sea la función $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n^2}.$$

(a) Prueba que f es holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$.

(b) Obtenga $f'(z)$ para $z \in \mathbb{D}$. ¿Cuál es el radio de convergencia para la serie que representa a f'? ¿Se puede extender de manera holomorfa la función analítica f más allá del disco cerrado unidad $\overline{\mathbb{D}}$?

(c) Sea $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{H}(\Omega)$ uniformemente convergente $f_n \underset{unif}{\to} f$, en un dominio Ω. ¿Se puede afirmar convergencia uniforme de (f_n') a f' en dicho dominio Ω? Extrae conclusiones.

13. Calcula la integral

$$\int_{C\left(0,\frac{1}{2}\right)} \left(\sum_{n=-1}^{+\infty} z^n\right) dz.$$

14. Prueba que la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n! z^n}$$

define una función analítica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Calcula la integral de la tal función sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T}$.

15. Sea una función $f \in \mathcal{H}\left(D(0,2)\right)$ tal que $|f(z)| \leq 7$, si $|z| \leq 2$. Prueba que existe un real positivo δ tal que

$$z, w \in D(0,2), |z-w| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(w)| < \frac{1}{10}.$$

Busca un valor numérico para δ que sea independiente de f que tenga la propiedad anterior. (Indicación: usa la fórmula integral de Cauchy.)

16. Prueba que la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{1 + z^{2n}}$$

es analítica en $\mathbb{C} \backslash \mathbb{T}$.