Tema 4.5: Desigualdades de Cauchy. Teorema de Liouville. Teorema Fundamental del Álgebra

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Para una función f holomorfa en un entorno de un punto a, su serie de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(z-a)^n$ converge en $D(a,r)$, para cierto $r>0$. Y, tal y como ya se puso de manifiesto, la sucesión de coeficientes no puede ser cualquiera. Concretamente, podemos hacer los siguientes cálculos:

$$\left.\begin{array}{c} f \in \mathcal{H}(\Omega), a \in \Omega, \overline{D(a,r)} \subset \Omega, \\ \rho > 0 : \overline{D(a,r)} \subset D(a,\rho) \subset \Omega \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{1}{\limsup \sqrt[n]{\frac{\left|f^{n)}(a)\right|}{n!}}} \geq \rho > r \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{\frac{\left|f^{n)}(a)\right|}{n!}} < 1/r \\ \Rightarrow \exists m \in \mathbb{N} : \left|f^{n)}(a)\right| < n!/r^n, \forall n \geq m. \end{array} \right.$$

Observamos que estas desigualdades se verifican a partir de un natural m en adelante. Este inconveniente se supera con las desigualdades de Cauchy:

Teorema (Desigualdades de Cauchy). Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Entonces:

$$\left|f^{n)}(a)\right| \leq M(f,a,r)\frac{n!}{r^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

donde $M(f,a,r) := \max\{|f(z)| : z \in C(a,r)\}$.

Demostración. La fórmula de Cauchy para las derivadas nos da

$$f^{n)}(a) = \frac{n!}{i2\pi}\int_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Luego,

$$\left|f^{n)}(a)\right| \leq \frac{n!}{2\pi}\frac{M(f,a,r)}{r^{n+1}}2\pi r = M(f,a,r)\frac{n!}{r^n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Q.E.D.

Teorema (de Liouville). Toda función entera y acotada es constante. (Es decir, no hay más funciones holomorfas y acotadas en todo $\mathbb{C}$ que las constantes.

Demostración. Sea $M > 0$ una cota superior para f. Para $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$ arbitrarios, por las desigualdades de Cauchy tenemos que

$$|f'(a)| \leq \frac{1!M(f,a,r)}{r^1} \leq \frac{M}{r}.$$

Haciendo $r \to +\infty$, tendremos $f'(a) = 0$, siendo arbitrario el tal a en $\mathbb{C}$.

Consecuentemente, f tiene derivada nula en todo el plano $\mathbb{C}$, lo que, al ser un conexo, obliga a que f sea constante. **Q.E.D.**

Algunas consecuencias del teorema de Liouville son aplicables más allá del Análisis (complejo o real):

Corolario (Teorema Fundamental del Álgebra). Sea p un polinomio con coeficientes complejos tal que no se anula. Entonces p es constante.

Demostración. Por no tener p ceros, podemos considerar la función

$$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ dada por } f(z) := \frac{1}{p(z)}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ocurre que es entera y con límite (cero) en ∞, por tanto, acotada. Por Liouville, f es constante; y, por tanto, p será constante. **Q.E.D.**

Corolario (del Teorema de Liouville). Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y es no constante, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Demostración. Supongamos que $\mathbb{C}\backslash\overline{f(\mathbb{C})} \neq \varnothing$, y sea w uno de sus elementos. Existirá $r > 0$ tal que $D(w,r) \subset \mathbb{C}\backslash\overline{f(\mathbb{C})}$ (¿por qué?), y consideremos la función

$$g(z) := \frac{1}{f(z) - w}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tal g es entera y está acotada (por $1/r$); luego, por Liouville, g (y así f) será constante, en contradicción con la hipótesis. Así, $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. **Q.E.D.**

Nota: Este resultado se mejorará notablemente más adelante (teorema de Picard): $\mathbb{C}\backslash f(\mathbb{C})$ es, de hecho, vacío o se reduce a un único punto.

A continuación vemos cómo cierta generalización del teorema de Liouville es posible:

Proposición. Sea f una función entera verificando

$$|f(z)| \leq M\,|z|^{\alpha}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\overline{D(0,R)}$$

para convenientes $M, R > 0$ y $\alpha \geq 0$. Entonces, f es un polinomio (de grado, a lo sumo, $E(\alpha)$).

Demostración. Razonando por argumentos de analiticidad para f, tendremos

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Para $r > R$, aplicamos las desigualdades de Cauchy para las derivadas:

$$\left| f^{n)}(0) \right| \leq M(f, a, r) \frac{n!}{r^n} \leq \frac{n! M r^\alpha}{r^n} = n! M r^{\alpha - n}, \qquad \left.\begin{array}{r} \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ \forall r > R \end{array}\right\}$$

Pero, en este caso, si $\alpha < n$, la arbitrariedad de r en $]R, +\infty[$ conlleva que sea $f^{n)}(0) = 0$ para todo natural $n > \alpha$. Luego f es el polinomio

$$f(z) = \sum_{n=0}^{E(\alpha)} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n, \forall z \in \mathbb{C},$$

cuyo grado no excede a la parte entera $E(\alpha)$ de α. **Q.E.D.**

Observemos que $\alpha \in [0, 1[$ nos da el teorema de Liouville.

Curiosamente, los resultados relativos a las desigualdades de Cauchy para las derivadas, se pueden obtener sin introducir técnicas de holomorfía; es decir, se pueden deducir desde el Análisis Real. Lo vemos a continuación.

Teorema (Identidad de Parceval). Sea $\sum_{n \geq 0} a_n (z - a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Sea f la función analítica en $D(a, R)$ definida por dicha serie de potencias. Entonces:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| f\left(a + re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \qquad \forall r \in \left]0, R\right[.$$

Demostración. Para cada $r \in \left]0, R\right[$, las igualdades

$$f\left(a + re^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta} \text{ y } \overline{f\left(a + re^{i\theta}\right)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a}_n r^n e^{-in\theta}$$

se darán uniformemente en $\theta \in [-\pi, +\pi]$. El producto de ambas será, igualmente, uniforme y lo podemos expresar así:

$$\left| f\left(a + re^{i\theta}\right) \right|^2 = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k \overline{a}_j r^{k+j} e^{i(k-j)\theta} \right).$$

Como la convergencia es uniforme, podemos integrar y conmutar series e integración, de modo que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left| f\left(a + re^{i\theta}\right) \right|^2 d\theta &= \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_k \overline{a}_j r^{k+j} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(k-j)\theta} d\theta \right) = \\ &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{j=0}^{n} a_j \overline{a}_j r^{2j} = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n}, \end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de que

$$\int_{-\pi}^{+\pi} e^{im\theta} d\theta = \begin{cases} 2\pi, \dots. & m = 0 \\ 0, \dots.. & m \neq 0 \end{cases}$$

Q.E.D.

Corolario Sea $\sum\limits_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$ y sea f la función analítica en $D(a, R)$ definida por dicha serie de potencias. Entonces:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leq [M(f, a, r)]^2, \qquad \forall r \in]0, R[\,.$$

Demostración. Evidente sin más que mayorar en la integral de la fórmula de la identidad de Parceval. **Q.E.D.**

Corolario Sea f una función analítica en un abierto Ω. Sean $a \in \mathbb{C}$ y $R > 0$ tales que $\overline{D(0, R)} \subset \Omega$. Entones, si $0 < r < R$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\left| f^{n)}(a) \right|}{n!} \right)^2 r^{2n} \leq [M(f, a, r)]^2\,.$$

Demostración. Se le aplicará el corolario anterior al hecho de que las funciones analíticas sean representables en series de Taylor. **Q.E.D.**

Este resultado permite obtener una mejora considerable en las desigualdades de Cauchy para las derivadas; en efecto: si fijamos $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tendremos

$$\left(\frac{\left| f^{m)}(a) \right|}{m!} \right)^2 r^{2m} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\left| f^{n)}(a) \right|}{n!} \right)^2 r^{2n} \leq [M(f, a, r)]^2\,;$$

luego

$$\frac{\left| f^{m)}(a) \right|}{m!} r^m \leq M(f, a, r)\,, \qquad \forall m \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \forall r \in]0, R[\,.$$

Y terminamos comprobando que la foma polinómica de f puede ser muy concreta bajo severas restricciones:

Corolario. Sea Ω un dominio del plano complejo y sea f una función holomorfa en él. Supongamos que existen $a \in \Omega$, $r > 0$ y $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tales que

$$\overline{D(a, r)} \subset \Omega \text{ y } \left| f^{m)}(a) \right| = m! \frac{M(f, a, r)}{r^m}.$$

Entonces

$$f(z) = \frac{f^{m)}(a)}{m!} (z-a)^m, \qquad \forall z \in \Omega.$$

Demostración. La serie de potencias de f centrada en a es váida en un disco de radio $R > r$, con $D(0,R) \subset \Omega$. Combinando las hipótesis de ahora con el corolaro anterior:

$$[M(f,a,r)]^2 = \left(\frac{\left|f^{m)}(a)\right|}{m!}\right)^2 r^{2m} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{\left|f^{n)}(a)\right|}{n!}\right)^2 r^{2n} \leq [M(f,a,r)]^2,$$

y, por tanto, $\left|f^{n)}(a)\right| = 0$, para todo $n \in (\mathbb{N} \cup \{0\}) \setminus \{m\}$. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Sea una f función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$ verificando verificando que

$$|f(z)| \leq \frac{1}{1-|z|}, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Prueba que $\left|f^{n)}(0)\right| \leq e\,(n+1)!, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

2. Sea $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ una serie de potencias con radio de convergencia $R > 0$. Prueba que la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n!} z^n$ converge en todo el plano $\mathbb{C}$. Sea

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} z^n, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Prueba que para cada $r \in \,]0,R[$, puede encontrarse $M > 0$ tal que $\left|f^{n)}(z)\right| \leq \frac{M}{r^n} \exp\left(\frac{|z|}{r}\right), \forall z \in \mathbb{C}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

3. Sea f una función entera verificando que

$$\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0.$$

Prueba que f es constante.

4. Sea f una función entera verificando que

$$f(z) = f(z+1) = f(z+i), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Prueba que f es constante.