Tema 4.4: Teorema de Riemann de singularidades evitables. Ceros de una función holomorfa. Principio de identidad

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Comenzamos en este tema extrayendo las primeras conclusiones a las que podemos llegar a partir del hecho de que toda función holomorfa sea analítica.

Teorema (de Riemann de singularidades evitables). Sean Ω un abierto del plano $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$. Son equivalentes:

i. $\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) : g(z) = f(z), \forall z \in \Omega \backslash \{a\}$.

ii. $\exists \lim\limits_{z \to a} f(z) \in \mathbb{C}$.

iii. f está acotada en un entorno perforado de a.

iv. $\exists \lim\limits_{z \to a} (z-a) f(z) = 0$.

A tal punto lo llamaremos singularidad evitable de f.

Demostración. i. $\Rightarrow$ ii. $\Rightarrow$ iii. $\Rightarrow$ iv., son evidentes.
iv. $\Rightarrow$ i. Definamos la siguiente función auxiliar:

$$F : \Omega \to \mathbb{C}; F(z) := \begin{cases} (z-a)^2 f(a), & z \in \Omega \backslash \{a\} \\ 0, & z = a \end{cases} .$$

Dado que $\Omega \backslash \{a\}$ es un abierto, por el carácter local de la derivabilidad, $F \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\})$. Además:

$$\lim_{z \to a} \frac{F(z) - F(a)}{z-a} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) = 0,$$

luego F es holomorfa en todo Ω.

Desarrollemos F en serie de potencias en un entorno de a:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z-a)^n , \forall z \in \overline{D(a,r)} \subset \Omega$$

para algún $r > 0$. Pero observemos que $c_0 = F(a) = 0$ y $c_1 = F'(a) = 0$; luego:

$$F(z) = (z-a)^2 \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+2} (z-a)^n, \qquad \forall z \in D(a,r).$$

Definamos

$$\varphi : D(a,r) \to \mathbb{C}; \quad \varphi(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+2} (z-a)^n, \qquad \forall z \in D(a,r).$$

Claramente,

$$\varphi \in \mathcal{H}(D(a,r)) : \varphi(z) = f(z), \forall z \in D(a,r) \backslash \{a\}.$$

Finalmente, sea la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por:

$$g(z) := \begin{cases} f(z), & z \in \Omega \backslash \{a\} \\ \varphi(a), & z = a \end{cases}$$

Esta función g, así definida, es holomorfa en $\Omega \backslash \{a\}$ y coincide con φ en el disco $D(a,r)$; luego también será holomorfa en a. Consecuentemente, g es la función que buscamos en i. **Q.E.D.**

Ya estamos en "condiciones de acabar" con las pseudo-extensiones:

Corolario. Sean Ω un abierto del plano $\mathbb{C}$, $a \in \Omega$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash \{a\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

Demostración. Por continuidad de f en a, tenemos que existe $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$. De ii. $\Rightarrow$ i., en el teorema anterior, se tiene lo deseado. **Q.E.D.**

A continuación nos vamos a preguntar por cuál ha de ser el tamaño del conjunto de los ceros de una función holomorfa; o bien, ¿en cuántos puntos de un dominio Ω han de coincidir dos funciones para que sean idénticas? Como observaremos, la conexión del abierto Ω pasa ya a cobrar una importancia decisiva en este curso.

Teorema. Sean Ω un dominio del plano $\mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $A := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$. Son equivalentes:

- **i.** $A' \cap \Omega \neq \varnothing$.
- **ii.** $\exists a \in A : f^{n)}(a) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$.
- **iii.** $f(z) = 0, \forall z \in \Omega$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ ii. Por argumentos de continuidad, al ser $a \in A' \cap \Omega$, será $f(a) = 0$. Razonemos por reducción al absurdo: $\left\{n \in \mathbb{N} : f^{n)}(a) \neq 0\right\} \neq \varnothing$. Llamemos k al mínimo de tal conjunto (¿por qué podemos afirmar que existe?). Sea, pues existe, $r > 0$ tal que $\overline{D(a,r)} \subset \Omega$. Así, para $z \in \overline{D(a,r)}$:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} c_n (z-a)^n = (z-a)^k \sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+k} (z-a)^{n+k} =: (z-a)^k g(z).$$

De este modo, hemos definido, mediante una serie de potencias, una función analítica g en un disco centrado en a. Pero esta función g verifica que $g(a) = c_k = \frac{f^{k)}(a)}{k!} \neq 0$; de lo cual se sigue que

$$\exists \delta > 0 : z \in D(a, \delta) \Rightarrow g(z) \neq 0.$$

En consecuencia,

$$z \in D(a, \delta) \backslash \{a\} \Rightarrow f(z) \neq 0 \Rightarrow z \notin A \Rightarrow A \cap D(a, \delta) = \{a\} \Rightarrow a \in \text{ Ais}\,(A)\,;$$

pero esto contradice que $a \in A'$.

ii. $\Rightarrow$ iii. Sea el conjunto

$$B := \left\{ z \in \Omega : f^{n)}(z) = 0, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}.$$

Es $B \neq \varnothing$. (¿Por qué?) Pretendemos hacer uso del lema de conexión: sea $b \in B$. Podemos suponer que, para cierto $r > 0$, $D(b, r) \subset \Omega$. Veamos que, de hecho, es $D(b, r) \subset B$. En efecto: desarrollando la función f en serie de potencias en torno de b, tendremos:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n)}(b)}{n!} (z - b)^n \,, \forall z \in D(b, r).$$

Pero, al ser $b \in B$, se sigue que $f^{n)}(b) = 0$ para $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$; y, en consecuencia, $f(z) = 0$, para todo $z \in D(b, r)$. Así, $z \in B$, sea quien sea z en el disco $D(b, r)$. Luego $B = \Omega$.

iii. $\Rightarrow$ i. Es evidente, ¿no? **Q.E.D.**

Más adelante se verá que, con Ω dominio y $A := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ subconjunto propio sin puntos de acumulación en Ω, podemos encontrar una función holomorfa en Ω cuyo conjunto de ceros es, exactamente, A. O dicho de otro modo: no se puede decir más de lo que ya se dice en este resultado.

Corolario (Principio de Identidad). Sean Ω un dominio del plano $\mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $A := \{z \in \Omega : f(z) = g(z)\}$. Si $A' \cap \Omega \neq \varnothing$, entonces $f(z) = g(z)$, para todo z en Ω.

Consecuencia inmediata de este hecho: la exponencial compleja y el seno y coseno complejos son las únicas extensiones enteras de las correspondientes funciones reales.

Corolario. Sea Ω un dominio del plano $\mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que f no sea idénticamente nula en Ω. Entonces, el conjunto $A := \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ es numerable.

Para su demostración precisaremos del siguiente resultado (válido en espacios métricos):

Lema (de la sucesión exhaustiva de compactos). Para todo abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$, existe una sucesión de compactos (K_n) tal que

$$K_n \subset K_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ y } \bigcup_{n=0}^{+\infty} K_n = \Omega.$$

Demostración. Basta considerar, para cada natural n, $K_n := \overline{D(0,n)}$, en el caso de que $\Omega = \mathbb{C}$. En caso contrario, la sucesión de compactos a considerar puede ser la dada por: $K_n := \left\{ z \in \overline{D(0,n)} : \text{ dist}\,(z, \mathbb{C} \backslash \Omega) \geq \frac{1}{n} \right\}$. **Q.E.D.**

Demostración (del Corolario). Con la notación del lema para la sucesión exhaustiva de compactos, y haciendo uso del teorema de Bolzano-Weierstrass, el conjunto $A \cap K_n$ es finito para cada n. (Si fuese infinito habría acumulación de A en Ω y, en consecuencia, habría de ser $f \equiv 0$, lo cual es falso). En consecuencia, como

$$A = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (A \cap K_n)\,,$$

se sigue la numerabilidad de A. **Q.E.D.**

Definición (de Orden de un cero de una función holomorfa). Sea f una función holomorfa en un punto a, donde $f(a) = 0$, pero supongamos que f no es idénticamente nula en un entorno del punto a. Llamamos orden del cero de la función f en el punto a (en virtud de que $\left\{ k \in \mathbb{N} : f^{k)}(a) \neq 0 \right\} \neq \varnothing$) al mínimo natural k tal que $f^{k)}(a) \neq 0$.

Corolario. Sean Ω un abierto del plano $\mathbb{C}, f \in \mathcal{H}\,(\Omega)$, $a \in \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$. Son equivalentes:

i. f tiene un cero de orden k en a.

ii. $\exists g \in \mathcal{H}\,(\Omega) : f(z) = (z-a)^k\, g(z), \forall z \in \Omega$ con $g(a) \neq 0$.

Demostración. i. $\Rightarrow$ ii. Consideremos la función auxiliar

$$\varphi\,(z) := \frac{f(z)}{(z-a)^k}, \forall z \in \Omega \backslash \{a\}.$$

Tal función será holomorfa en $\Omega \backslash \{a\}$, pero

$$\begin{aligned} \lim_{z \to a} (z-a)\varphi(z) &= \lim_{z \to a} \left[\frac{(z-a)\,(z-a)^k}{(z-a)^k} \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-k} \right] \\ &= \lim_{z \to a} \left[(z-a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{n+k)}(a)}{(n+k)!} (z-a)^n \right] = 0. \end{aligned}$$

Así, aplicando el teorema de Riemann de singularidades evitables, tendremos que existe la función g (que coincide con φ en Ω, y que es la) pedida en ii.

ii. $\Rightarrow$ i. Es cierto sin más que derivar en la expresión de la hipótesis. **Q.E.D.**

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones tienen singularidades evitables en el origen?

   a. $f(z) := \frac{\sin(z)}{z}$; b. $g(z) := \frac{\exp z}{z}$;
   c. $h(z) := \frac{(\exp(z)-1)^2}{z^2}$; d. $j(z) := \frac{\sin(z)-1}{z}$.

2. Prueba que la función $f : D(0,\pi) \to \mathbb{C}$ definida por

   $$f(z) := z\cot(z) \quad (0 < |z| < \pi), \quad f(0) = 1$$

   es holomorfa en $D(0,\pi)$. Obtenga el desarrollo de Taylor de f centrado en el origen haciendo uso de los números de Bernuilli. Deducir el desarrollo de Taylor de la función tangente en un entorno del origen. (Indicación: si sen $2z \neq 1$, se tiene $2\cot(z) = \cot(z) - \tan(z)$.)

3. Sea Ω un abierto del plano $\mathbb{C}$ y f una función continua en él. Supongamos que $f^2 \in \mathcal{H}(\Omega)$. Prueba que, entonces se tiene que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

4. Prueba que toda función entera f para la que se verifique

   $$|f(z)| \leq A + B|z|^k, \forall z \in \mathbb{C},$$

   donde $A, B, k \in \mathbb{R}^+$, es un polinomio. ¿Puedes concretar algo sobre su grado?

5. Sea Ω un dominio del plano complejo $\mathbb{C}$ tal que si $z \in \Omega$, entonces $\overline{z} \in \Omega$. Sea, por otra parte, una función f holomorfa en Ω tal que si $z \in \Omega \cap \mathbb{R}$, entonces $f(z) \in \mathbb{R}$. Prueba que, en este caso, se tiene $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, para cualquiera que sea z en Ω.

6. Sean f y g dos funciones holomorfas en un punto a tales que $f(a) = g(a) = 0$. Supongamos que ninguna de ellas es idénticamente nula en un entorno de a. Pruébese que el cociente $\frac{f}{g}$ tiene límite, posiblemente ∞, en el punto a, y además

   $$\lim_{z\to a} \frac{f}{g}(z) = \lim_{z\to a} \frac{f'}{g'}(z).$$

7. Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y sean f y g dos funciones folomorfas en Ω. Dado un punto $a \in \Omega$, supongamos que existe una sucesión de puntos $\{a_n\} \subset \Omega \setminus \{a\}$ convergente a a tal que

   $$f'(a_n)g(a_n) = f(a_n)g'(a_n), \forall n \in N.$$

   Prueba que las funciones f y g son dos funciones linealmente dependientes.

8. Prueba que si f es una función entera no constante, entonces existe $a \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} f(a) = 0$. Prueba que no existe ninguna función analítica tal que sobre la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$, tome los valores

   a. $1, 0, 1, 0, ...$; b. $1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, ...$;
   c. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6}, ...$; d. $f\left(\frac{1}{2k-1}\right) \neq 0, \quad f\left(\frac{1}{2k}\right) = 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

9. Sea Ω un dominio de $\mathbb{C}$ y sean f y g dos funciones folomorfas en Ω. Supongamos que $f^2 = g^2$ en Ω. Prueba que en este caso, o bien $f = g$, o bien $f = -g$.

10. En cada uno de los siguientes casos, decídase si existe o no una función holomorfa en el origen y tal que

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = a_n$$

para todo natural n suficientemente grande, cuando:

$$\begin{array}{l} \text{a. } a_{2n-1} = 1, \quad a_{2n} = 0; \quad \text{b. } a_{2n-1} = a_{2n} = \frac{1}{2n}; \\ \text{c. } a_n = \frac{n}{n+1}. \end{array}$$

11. ¿Existen funciones f analíticas en el intervalo $]-1,1[$, tales que para cada natural n verifiquen la siguientes relaciones?

$$\begin{array}{l} \text{a. } f\left(\frac{1}{2n}\right) = f\left(\frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{n}; \\ \text{b. } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}; \\ \text{c. } f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3}. \end{array}$$

12. Prueba que si el abierto Ω es un dominio, entonces el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio de integridad.

13. Dé un ejemplo de función holomorfa en el disco unidad $\mathbb{D}$, con infinitos ceros y no idénticamente nula.