# Tema 3.2: Transformaciones de Möbius

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Hay, al menos, tres razones importantes (en las que no entraremos en detalles más que los necesarios para nuestro curso) para considerar las transformaciones de Möbius:

**i.** algebraicas: son aplicaciones lineales de $\mathbb{C}^2$ en $\mathbb{C}^2$;

**ii.** geométrico-analíticas: son funciones analíticas; y

**iii.** físicas: relacionan $\mathbb{C}$ y la teoría de la relatividad.

También se les acostumbra llamar, además, aplicaciones bilineales, transformaciones homográficas, o bien, fracciones lineales.

Las transformaciones de Möbius son las funciones complejas de variable compleja de la forma

$$z \xrightarrow{\varphi} \frac{az+b}{cz+d}$$

donde los parámetros complejos $a, b, c, d$ son constantes sometidas a la restricción

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Sepamos (pues se verá más adelante) que esta tal $\varphi$ se puede descomponer del siguiente modo:

**a.** una traslación: $z \longrightarrow z + d/c$

**b.** una inversión: $z \longrightarrow 1/z$

**c.** una homotecia y un giro: $z \longrightarrow \frac{cb-ad}{c^2} z$

**d.** otra traslación: $z \longrightarrow z + a/c$.

Por tanto, la situación $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$, a la vista del apartado c., nos dice que la homotecia colapsa todo el plano en un punto. Son las llamadas transformaciones singulares. Nosotros, por tanto, estaremos interesados en las denominadas como transformaciones no-singulares.

Si se tiene que $c = 0$,

$$\varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d} = \alpha z + \beta; \alpha := \frac{a}{d} \neq 0, \beta := \frac{b}{d}$$

es una biyección de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ verificando $\lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \infty$. Por tanto, con $\varphi(\infty) := \infty$, tenemos una biyección continua de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$; es decir, un homeomorfismo, por la compacidad del propio $\mathbb{C}$ ampliado, $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Por otro lado, si $c \neq 0$, resulta que tiene sentido

$$\varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d}, \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\}.$$

Pero

$$\frac{az+b}{cz+d} = w \in \mathbb{C} \iff w \neq \frac{a}{c}$$

(pues $w = \frac{a}{c} \iff ad - bc = 0$), de modo que

$$w \neq \frac{a}{c} \implies z = \frac{dw-b}{a-cw} \in \mathbb{C}.$$

Resumiendo, la tal

$$\varphi : \mathbb{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\} \longrightarrow \mathbb{C} \backslash \{\frac{a}{c}\}$$

definida como arriba, es una biyección continua; y, además, verifica

$$\lim_{z\to -\frac{d}{c}} \varphi(z) = \infty \text{ y } \lim_{z\to\infty} \varphi(z) = \frac{a}{c}.$$

De este modo, definiendo

$$\varphi\left(-\frac{d}{c}\right) := \infty \text{ y } \varphi(\infty) := \frac{a}{c}$$

tendremos un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$, y podemos enunciar el siguiente resultado:

**Proposición.** Sean $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$. Si se define

$$\varphi : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$$

del siguiente modo:

**a.** para $c = 0$,

$$\begin{aligned} \varphi(z) &: = \frac{az+b}{d}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \\ \varphi(\infty) &: = \infty; \end{aligned}$$

**b.** o bien, para $c \neq 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &:= \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \forall z \in \mathbb{C} \backslash \{-\frac{d}{c}\} \\
\varphi\left(-\frac{d}{c}\right) &:= \infty \\
\varphi(\infty) &:= \frac{a}{c},
\end{aligned}$$

entonces $\varphi$ es un homeomorfismo de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

**Definición.** Llamamos transformación de Möbius de parámetros $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ (con $ad - bc \neq 0$) a la función $\varphi$ dada por la proposición anterior. Denotamos por $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ al conjunto de todas ellas.

Observemos que no hay relación de inclusión alguna entre la clase anterior y la clase de las funciones enteras.

**Ejercicio.** Justifica las siguientes afirmaciones:

**i.** Todo polinomio de grado 1 es la restricción al plano de alguna $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$.

**ii.** Toda $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ es una extensión al plano ampliado de alguna función racional en $\mathbb{C}$.

**iii.** No toda función entera es restricción al plano de alguna $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$.

Lo que sí que podemos hacer es operar con plena libertad en la clase $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$:

**Proposición.** $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ es un subgrupo (para la composición) del grupo de los homeomorfismos del plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$.

**Demostración**. Bastará con probar que si $\varphi, \psi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$, entonces $\psi \circ \varphi, \varphi^{-1} \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$. Sean, donde tengan sentido, las siguientes expresiones:

$$\varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d} \qquad \text{y} \qquad \psi(z) := \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}.$$

(Concretamente, precisamos que $z \notin \left\{\infty, \varphi^{-1}(\infty), \left(\varphi^{-1} \circ \psi^{-1}\right)(\infty)\right\}$.) Así:

$$\begin{aligned}
\psi[\varphi(z)] &= \psi\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) := \frac{\alpha \frac{az+b}{cz+d} + \beta}{\gamma \frac{az+b}{cz+d} + \delta} = \\
&= \frac{\alpha(az+b) + \beta(cz+d)}{\gamma(az+b) + \delta(cz+d)} =: \frac{\zeta z + \eta}{\xi z + \kappa},
\end{aligned}$$

es decir, la composición $\psi \circ \varphi$ se diferencia de algún elemento de $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ en, a lo más, tres puntos. Argumentos de continuidad nos llevan a afirmar que ambas deben ser la misma función de $\overline{\mathbb{C}}$ en $\overline{\mathbb{C}}$.

Para la inversa de $\varphi$ razonaremos del mismo modo, ahora para $w \notin \left\{\infty, \frac{a}{c}\right\}$, considerando

$$\varphi^{-1}(w) := \frac{dw-b}{-cw+a}. \qquad \blacksquare$$

Con lo demostrado obtenemos un plus de información:

**Corolario.** La transformación

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \varphi_A(z) := \frac{az+b}{cz+d}$$

del grupo lineal $GL(2,\mathbb{C})$ de las matrices de orden 2 con coeficientes complejos en la clase $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ de las transformaciones de Möbius es un epimorfismo de grupos.

Y tal y como observamos al principio de esta lección, en el grupo $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ existen varios subgrupos de interés:

**a.** las traslaciones: $z \longrightarrow z+b, \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \qquad (b \in \mathbb{C})$

**b.** las homotecias: $z \longrightarrow \rho z, \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \qquad (\rho > 0)$

**c.** los giros: $z \longrightarrow e^{i\theta} z, \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \qquad (\theta \in \mathbb{R})$

**d.** las inversiones (el único que no deja fijo al $\infty$): $z \longrightarrow 1/z, \forall z \in \overline{\mathbb{C}} \backslash \{0\}$

**e.** y la identidad, ¡por aquello de que sea grupo!: $z \longrightarrow z, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$

**Proposición.** Toda transformación de Möbius se puede expresar como composición de traslaciones, homotecias, giros e inversiones.

**Demostración**. Sea $\varphi(z) := \frac{az+b}{cz+d}$. Para $c=0$, $\varphi(z) := \alpha z + \beta$; así:

$$z \xrightarrow{\text{giro}} e^{i\arg(\alpha)} z \xrightarrow{\text{homotecia}} |\alpha|\, e^{i\arg(\alpha)} z \xrightarrow{\text{traslación}} |\alpha|\, e^{i\arg(\alpha)} z + \beta.$$

Y si $c \neq 0$, podemos descomponer $\varphi(z) = \varphi(z) - \frac{a}{c} + \frac{a}{c} = \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c}$; y así:

$$z \xrightarrow{\text{traslación}} z + \frac{d}{c} \xrightarrow{\text{inversión}} \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{giro}} e^{i\arg\left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)} \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{homotecia}}$$
$$\xrightarrow{\text{homotecia}} \left|\frac{bc-ad}{c^2}\right| e^{i\arg\left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)} \frac{1}{z+\frac{d}{c}} \xrightarrow{\text{traslación}}$$
$$\xrightarrow{\text{traslación}} \left|\frac{bc-ad}{c^2}\right| e^{i\arg\left(\frac{bc-ad}{c^2}\right)} \frac{1}{z+\frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

que ya nos da lo deseado. $\blacksquare$

La utilidad que, en la práctica, le vamos a sacar a la estructura algebraica de la clase $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ se sigue manifestando en el siguiente resultado, de obvia comprobación:

**Corolario.** Si $M \subset \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ y las familias de homotecias, giros, inversiones y traslaciones están en $M$, entonces para que $M = \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ es suficiente que $\varphi, \psi \in M \implies \varphi \circ \psi \in M$.

Esta lección la vamos a completar con el estudio de propiedades de carácter geométrico para los elementos de $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$:

**a.** Las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes.

**b.** Las transformaciones de Möbius llevan circunrectas en circunrectas.

**c.** Las transformaciones de Möbius "conservan" los puntos simétricos (en el sentido en el que se van a definir) respecto de una circunrecta.

**Proposición.** Las transformaciones de Möbius son aplicaciones conformes.

**Demostración**. Es consecuencia inmediata del corolario anterior (pues en los cuatro casos se trata de funciones derivables con derivada que no se anula) y de la regla de la cadena. ■

Bajo el mismo hilo argumental, es decir, sacándole provecho al corolario anterior, podemos probar que:

**Proposición.** La imagen por una transformación de Möbius de una circunrecta del plano ampliado es otra circunrecta.

**Demostración**. Bastará con ver que la propiedad deseada se verifica para las inversiones (en los demás casos, es trivialmente cierta); y, en particular, será suficiente probarlo para la inversa:

$$\varphi\left(z\right) := \frac{1}{z}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$$

(es decir, $0 \xrightarrow{\varphi} \infty$). Escribamos $w := 1/z$. Por $\Gamma\left(A, B, C, D\right)$ denotamos, como ya es costumbre, a la circunrecta de ecuación:

$$A\left(z + \overline{z}\right) + iB\left(\overline{z} - z\right) + C\left(z\overline{z} - 1\right) + D\left(z\overline{z} + 1\right) = 0.$$

Así, para $z \notin \{0, \infty\}$:

$$\begin{aligned} z \quad & \in \quad \Gamma\left(A, B, C, D\right) \\ & \iff \quad A\left(\frac{1}{w} + \frac{1}{\overline{w}}\right) + iB\left(\frac{1}{\overline{w}} - \frac{1}{w}\right) + C\left(\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} - 1\right) + D\left(\frac{1}{w}\frac{1}{\overline{w}} + 1\right) = 0 \\ & \iff \quad A\left(w + \overline{w}\right) + iB\left(w - \overline{w}\right) + C\left(1 - w\overline{w}\right) + D\left(1 + w\overline{w}\right) = 0 \\ & \iff \quad w \in \Gamma\left(A, -B, -C, D\right). \end{aligned}$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned} 0 \quad & \in \quad \Gamma\left(A, B, C, D\right) \iff D - C = 0 \iff \Gamma\left(A, -B, -C, D\right) \text{ es una recta} \\ & \iff \quad \infty \in \Gamma\left(A, -B, -C, D\right); \end{aligned}$$

y también:

$$\begin{aligned}\infty \quad &\in \quad \Gamma(A,B,C,D) \iff \Gamma(A,B,C,D) \text{ es una recta} \iff D+C=0 \\ &\iff \quad 0 \in \Gamma(A,-B,-C,D).\end{aligned}$$

Por tanto,

$$z \in \Gamma(A,B,C,D) \iff \varphi(z) \in \Gamma(A,-B,-C,D), \forall z \in \overline{\mathbb{C}}. \qquad \blacksquare$$

¿Cómo se transforman las regiones del plano determinadas por circunrectas según aplicaciones de Möbius? Será muy útil saber establecer determinados isomorfismos (conformes) del plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$ vía transformaciones de Möbius.

Denotemos, por comodidad, $\Gamma := C(a,r)$. Denotaremos las regiones exterior e interior de $\Gamma$, respectivamente, por:

$$\begin{aligned}\Gamma^{+} \quad &: \quad = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| > r\} \cup \{\infty\} \\ \Gamma^{-} \quad &: \quad = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < r\}.\end{aligned}$$

Observemos que ambas son (las dos) componentes conexas de $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Gamma$.

En el caso de que $\Gamma$ sea una recta, tendremos:

$$\Gamma := \{z_0 + \lambda u : \lambda \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\} = \left\{z \in \mathbb{C} : \frac{z-z_0}{u} \in \mathbb{R}\right\} \cup \{\infty\}$$

(donde, sin pérdida de generalidad, podemos considerar $u \in \mathbb{T}$ y $\operatorname{Re} u > 0$ o bien $\operatorname{Re} u = 0, \operatorname{Im} u > 0$). En este caso, se consideran los dominios:

$$\begin{aligned}\Gamma^{+} \quad &: \quad = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z-z_0}{u}\right) > 0\right\} \\ \Gamma^{-} \quad &: \quad = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}\left(\frac{z-z_0}{u}\right) < 0\right\},\end{aligned}$$

que, como antes, son (las) componentes conexas de $\overline{\mathbb{C}}\backslash\Gamma$.

Sean $\varphi$ una transformación de Möbius y $\Gamma$ una circunrecta del plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$. Como $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ es un homeomorfismo, también lo habrá de ser

$$\varphi_{|\overline{\mathbb{C}}\backslash\Gamma} : \overline{\mathbb{C}}\backslash\Gamma \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}\backslash\Gamma.$$

Por tanto, transforma componentes conexas en componentes conexas y, o bien

$$\varphi\left(\Gamma^{+}\right) = (\varphi(\Gamma))^{+} \text{ y } \varphi\left(\Gamma^{-}\right) = (\varphi(\Gamma))^{-}$$

o, de otro modo, sería

$$\varphi\left(\Gamma^{+}\right) = (\varphi(\Gamma))^{-} \text{ y } \varphi\left(\Gamma^{-}\right) = (\varphi(\Gamma))^{+}.$$

Este hecho nos proporciona un interesante método de construcción de isomorfismos conformes.

**Ejemplo.** Transformación del disco unidad $\mathbb{D}$ en el semiplano de la derecha $\mathbb{C}^{\rightarrow}$.

Sea la $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ dada por

$$\varphi\left(z\right) := \frac{z-1}{z+1}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Consideremos $\Gamma := \{iy : y \in \mathbb{R}\} \cup \{\infty\}$. Claramente $\varphi\left(\Gamma\right) \subset \mathbb{T}$ (de hecho, se trata de una igualdad). Como $\varphi\left(-1\right) = \infty$, argumentos de continuidad nos dicen que

$$\varphi\left(\Gamma^{-}\right) = \overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{\mathbb{D}} \text{ y } \varphi\left(\Gamma^{+}\right) = \mathbb{D}.$$

Obsérvese, de paso, cómo la acotación no es un invariante por isomorfismos conformes: $\mathbb{D}$ y $\mathbb{C}^{\rightarrow} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ son isomorfos.

En nuestra búsqueda de isomorfismos particulares, nos encontramos con que la única transformación de Möbius que deja invariantes al origen, a la unidad y al infinito en el plano ampliado es la identidad:

**Lema.** Si $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ es tal que $\varphi\left(0\right) = 0$, $\varphi\left(1\right) = 1$ y $\varphi\left(\infty\right) = \infty$, entonces

$$\varphi\left(z\right) = z, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

**Demostración**. Como ha de ser $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, se sigue que:
a. $\varphi\left(\infty\right) = \infty \implies c = 0 \implies \varphi\left(z\right) = \alpha z + \beta$;
b. $\varphi\left(0\right) = 0 \implies \beta = 0 \implies \varphi\left(z\right) = \alpha z$; y
c. $\varphi\left(1\right) = 1 \implies \alpha = 1 \implies \varphi\left(z\right) = z$. ■

(La terna $\{0, 1, \infty\}$ es lo que se dice propia: sus elementos son distintos dos a dos.)

Además, que la imagen de una circunrecta por una transformación de Möbius sea la recta real (ampliada con $\infty$) nos permite establecer un potente método de construcción de isomorfismos: analízalo en la demostación (parte "existencia") del siguiente hecho.

**Lema.** Para cualquier terna (propia) $\{z_2, z_3, z_4\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, existe una única $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ tal que

$$\varphi\left(z_2\right) = 0, \varphi\left(z_3\right) = 1 \text{ y } \varphi\left(z_4\right) = \infty.$$

**Demostración**. Definamos, para probar su existencia, la siguiente aplicación:

$$\varphi\left(z\right) := \frac{z-z_2}{z-z_4}\frac{z_3-z_4}{z_3-z_2}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}},$$

pues si $\{z_2, z_3, z_4\} \subset \mathbb{C}$, se verifica trivialmente lo deseado; si, por el contrario, alguno de ellos es $\infty$, entonces bastaría definir (de modo que queda "englobado" en lo anterior, por argumentos de continuidad):

$$\begin{aligned} z_2 = \infty &\implies \varphi(z) := \tfrac{z_3-z_4}{z-z_4} \\ z_3 = \infty &\implies \varphi(z) := \tfrac{z-z_2}{z-z_4} \\ z_4 = \infty &\implies \varphi(z) := \tfrac{z-z_2}{z_3-z_2} \end{aligned}$$

para tener la existencia de $\varphi$. (Justifica los detalles.)

Para la unicidad, si $\varphi$ y $\psi$ son dos tales transformaciones de Möbius, entonces $\varphi \circ \psi^{-1}$ también lo será y, además, deja fijos, uno a uno, a los elementos de la terna $\{0, 1, \infty\}$; y el lema anterior se encarga del resto: $\left[\varphi \circ \psi^{-1}\right](z) = z$ para todo $z \in \overline{\mathbb{C}}$, de donde $\varphi = \psi$. **Q.E.D.**

A partir de este hecho, ya se puede intuir que hay muchas maneras (infinitas, veremos) de transformar una circunrecta en otra dadas ambas a priori, mediante transformaciones de Möbius. Pero ésto será consecuencia de otros hechos no menos notables.

**Proposición.** Para cualesquiera ternas (propias) $\{z_2, z_3, z_4\}$ y $\{w_2, w_3, w_4\}$ en $\overline{\mathbb{C}}$, existe una única transformación de Möbius $\varphi$ tal que

$$\varphi(z_k) = w_k, k = 2, 3, 4.$$

**Demostración**. Existen únicas transformaciones de Möbius que llevan (según el orden dado por los puntos en cada terna)

$$\begin{aligned} \{z_2, z_3, z_4\} &\xrightarrow{\varphi_1} \{0, 1, \infty\} \text{ y} \\ \{w_2, w_3, w_4\} &\xrightarrow{\varphi_2} \{0, 1, \infty\}. \end{aligned}$$

Considerando $\varphi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$, tenemos la existencia. Para la unicidad, si $\psi$ es otra distinta a $\varphi$, pero en iguales condiciones, tendríamos que

$$\varphi_1 \circ \left[\psi^{-1} \circ \varphi\right] \circ \varphi_1^{-1} \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$$

deja fija la terna $\{0, 1, \infty\}$, luego es la identidad. En consecuencia, se sigue la unicidad. **Q.E.D.**

Ahora, un hecho evidente... aquí su prueba:

**Corolario.** Por cualquier terna (propia) $\{z_2, z_3, z_4\} \subset \overline{\mathbb{C}}$ del plano ampliado pasa una, y sólo una, circunrecta.

**Demostración**. En el caso en el que la terna sea $\{0, 1, \infty\}$, es claro que la circunrecta es $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Para los demás casos, podemos razonar la existencia de una única transformación de Möbius $\varphi$ que lleva (los puntos uno a uno de) la terna $\{z_2, z_3, z_4\}$ en (los de) la $\{0, 1, \infty\}$. Pero $\varphi^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) =: \Gamma'$ es una circunrecta que contiene a la terna $\{z_2, z_3, z_4\}$, y, por tanto, si $\Gamma$ fuese otra tal circunrecta: $\{0, 1, \infty\} \subset \varphi(\Gamma)$, de donde $\Gamma' = \varphi^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \Gamma$. **Q.E.D.**

**Corolario.** Dadas dos circunrectas $\Gamma$ y $\Gamma'$ distintas del plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$, el conjunto

$$\left\{\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right) : \varphi(\Gamma) = \Gamma'\right\}$$

es infinito (no numerable).

**Demostración**. Es inmediato sin más que pensar en la posibilidad en número de escoger ternas (propias) de puntos en $\Gamma$ y $\Gamma'$, respectivamente, y establecer correspondientes elecciones de $\varphi$. ■

El concepto de punto simétrico, como ya se anticipó, será clave para poder manipular con habilidad las transformacions de Möbius en la búsqueda de isomorfismos concretos. Para llegar a él usaremos el concepto de razón doble, que halla su sustento en el lema de arriba.

**Definición (de Razón doble).** Dada una cuaterna (propia) de puntos del plano ampliado $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset \overline{\mathbb{C}}$, se llama razón doble de dichos puntos (así ordenados) a la imagen de $z_1$ por la única transformación de Möbius $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ que lleva $\{z_2, z_3, z_4\}$ en $\{0, 1, \infty\}$ en dicho orden. Se expresará

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) := \varphi(z_1).$$

Claramente, se verifica que

$$\varphi(z) = (z, z_2, z_3, z_4), \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

**Proposición.** La razón doble es un invariante para el grupo de las transformaciones de Möbius; es decir: si $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \overline{\mathbb{C}}$ y $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$, entonces

$$(\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

**Demostración**. Dadas $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \overline{\mathbb{C}}$ y $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$, sean las razones dobles siguientes

$$\begin{array}{rcl} \psi_1 & \in & \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right) : \psi_1(z) = (z, z_2, z_3, z_4), \forall z \in \overline{\mathbb{C}}; \\ \psi_2 & \in & \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right) : \psi_2(w) = (w, \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)), \forall w \in \overline{\mathbb{C}} \end{array}$$

(que sabemos que existen y que son únicas). Pero entonces:

$$\left(\psi_2 \circ \varphi \circ \psi_1^{-1}\right)(w) = w, \forall w \in \overline{\mathbb{C}},$$

de donde

$$\psi_2 \circ \varphi = \psi_1,$$

y, por tanto,

$$\begin{array}{rcl} (z_1, z_2, z_3, z_4) & = & \psi_1(z_1) = (\psi_2 \circ \varphi)(z_1) \\ & = & \psi_2[\varphi(z_1)] = (\varphi(z_1), \varphi(z_2), \varphi(z_3), \varphi(z_4)). \end{array}$$ ■

**Corolario.** Cuatro puntos (distintos) cualesquiera del plano ampliado están sobre una misma circunrecta si, y sólo si, su razón doble (la de cualquiera de ellos respecto de los otros tres) es un número real.

**Demostración**. Supongamos que existe una circunrecta que los contiene: $\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \subset \Gamma$. Ha de existir una única $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ tal que la terna $\{z_2, z_3, z_4\}$ se transforma en la terna $\{0, 1, \infty\}$. Pero, entonces,

$$\varphi(z_1) = (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \varphi(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\},$$

pero como $\infty = \varphi(z_4) \neq \varphi(z_1)$, ha de ser $\varphi(z_1) \in \mathbb{R}$.

Recíprocamente, si $\varphi(z) \in \mathbb{R}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, entonces $\varphi^{-1}(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ es una circunrecta que contiene a la cuaterna $\{z_1, z_2, z_3, z_4\}$, es decir, se trata de $\Gamma$. **Q.E.D.**

La idea intuitiva de lo que es la simetría respecto del eje real y la existencia y unicidad de las trasformaciones de Möbius respecto de cómo transformar una terna dada en otra, justifica la siguiente

**Definición (de Puntos simétricos respecto de una circunrecta).** Dados una circunrecta $\Gamma$ y dos puntos $z, w \in \overline{\mathbb{C}}$, diremos que éstos son simétricos con respecto a aquélla si existe una (única) $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ tal que $\varphi(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $\overline{\varphi(z)} = \varphi(w)$.

Es necesario poner de manifiesto la coherencia de la definición; es decir, que el conjugado $w$ es único para $z$ y $\varphi$ dados. Comenzamos con un lema que trivializa el contexto, pero es suficiente para nuestros propósitos.

**Lema.** Si $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ es tal que $\varphi(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, entonces

$$\overline{\varphi(z)} = \varphi(\overline{z}), \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

**Demostración**. Podemos escribir

$$x_2 := \varphi^{-1}(0), x_3 := \varphi^{-1}(1), x_4 := \varphi^{-1}(\infty) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Ha de ser

$$\varphi(z) = (z, x_2, x_3, x_4), \forall z \in \overline{\mathbb{C}},$$

y tendremos:

$$\begin{aligned} \varphi(\overline{z}) &= (\overline{z}, x_2, x_3, x_4) = (\overline{z}, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = \\ &= \overline{(z, x_2, x_3, x_4)} = \overline{\varphi(z)}, \forall z \in \overline{\mathbb{C}}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposición.** Sean $\Gamma$ una circunrecta y $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Entonces existe un único $z^* \in \overline{\mathbb{C}}$ tal que $z^*$ y $z$ son simétricos respecto de $\Gamma$. Además, para cualesquiera $\{z_2, z_3, z_4\} \subset \Gamma$, se tiene que

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = (\overline{z}, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4).$$

**Demostración**. Comenzamos probando la "unicidad". Notemos por $\varphi$ a la transformación que nos da el hecho de que $z^*$ y $z$ sean simétricos respecto de $\Gamma$:

$$\varphi(\Gamma) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ y } z^* = \varphi^{-1}\left(\overline{\varphi(z)}\right).$$

Supongamos, por reducción al absurdo, que tal simétrico $z^*$ no sea único:

$$\exists w \in \overline{\mathbb{C}}, \exists \psi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right) : \psi\left(\Gamma\right) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ y } \psi\left(w\right) = \overline{\psi\left(z\right)}.$$

Pero, entonces, $\varphi \circ \psi^{-1} \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ deja invariante el eje real (junto al punto $\infty$) y podemos aplicarle el lema anterior:

$$\begin{aligned} \varphi\left(w\right) &= \left(\varphi \circ \psi^{-1} \circ \psi\right)\left(w\right) = \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\left(\psi\left(w\right)\right) = \\ &= \left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\left(\overline{\psi\left(z\right)}\right) = \overline{\left(\varphi \circ \psi^{-1}\right)\left(\psi\left(z\right)\right)} = \overline{\varphi\left(z\right)}, \end{aligned}$$

de donde

$$\varphi\left(w\right) = \overline{\varphi\left(z\right)} = \varphi\left(z^*\right) \implies w = z^*.$$

Vamos con el "además", de donde nos surgirá, como propina, la "existencia". Para una terna $\{z_2, z_3, z_4\} \subset \Gamma$, sea la $\varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ tal que

$$\varphi\left(z\right) = \left(z, z_2, z_3, z_4\right), \forall z \in \overline{\mathbb{C}}.$$

Claramente, por ser razón doble, $\varphi\left(\Gamma\right) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ y $z^* = \varphi^{-1}\left(\overline{\varphi\left(z\right)}\right) =$ (acabamos de cobrar la propina)$= \varphi\left(z^*\right) = \overline{\varphi\left(z\right)}$; luego

$$\begin{aligned} \left(z^*, z_2, z_3, z_4\right) &= \left(\varphi\left(z^*\right), \varphi\left(z_2\right), \varphi\left(z_3\right), \varphi\left(z_4\right)\right) = \\ &= \varphi\left(z^*\right) = \overline{\varphi\left(z\right)} = \overline{\left(z, z_2, z_3, z_4\right)} = \\ &= \left(\overline{z}, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4\right), \forall z \in \overline{\mathbb{C}}. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

**Proposición.** La propiedad de simetría es un invariante para el grupo $\mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ de las transformaciones de Möbius; es decir, si $z^*$ y $z$ son simétricos respecto de $\Gamma$, entonces $\varphi\left(z^*\right)$ y $\varphi\left(z\right)$ son simétricos respecto de $\varphi\left(\Gamma\right), \forall \varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$.

**Demostración**. Objetivo: encontrar $\widehat{\psi} \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ tal que

$$\widehat{\psi}\left(\varphi\left(\Gamma\right)\right) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ y } \overline{\widehat{\psi}\left(\varphi\left(z\right)\right)} = \widehat{\psi}\left(\varphi\left(z^*\right)\right).$$

Sea, pues existe, la $\psi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ tal que

$$\psi\left(\Gamma\right) = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \text{ y } \overline{\psi\left(z\right)} = \psi\left(z^*\right).$$

Ocurre que

$$\psi \circ \varphi^{-1} \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right) \text{ y } \left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)\left(\varphi\left(\Gamma\right)\right) = \psi\left(\Gamma\right) = \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Además,

$$\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)\left(\varphi\left(z^*\right)\right) = \psi\left(z^*\right) = \overline{\psi\left(z\right)}$$

y

$$\overline{\psi\left(z\right)} = \overline{\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)\left(\varphi\left(z\right)\right)},$$

luego basta hacer $\widehat{\psi} := \psi \circ \varphi^{-1}$. $\blacksquare$

Concluimos con dos ejemplos (que será bueno llevar en la memoria, de ahora en adelante) de cálculo efectivo de simétricos.

**Ejemplo 1 (Simetría respecto de una recta).** Sean $a, b, \infty \in \Gamma$, y denotemos $z_2 := a, z_3 := b, z_4 := \infty$. Como ha de ser:

$$(z^*, z_2, z_3, z_4) = (\overline{z}, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4),$$

(con $z_4 = \infty$) se tiene que $\frac{z^*-z_2}{z_3-z_2} = \frac{\overline{z}-\overline{z}_2}{\overline{z}_3-\overline{z}_2} \implies \frac{z^*-a}{b-a} = \frac{\overline{z}-\overline{a}}{\overline{b}-\overline{a}}$; es decir,

$$|z^* - a| = |\overline{z} - \overline{a}| = |z - a|.$$

De la arbitrariedad de $a$ en $\Gamma$ se sigue que $z$ y $z^*$ equidistan de $\Gamma$.

**Ejemplo 2 (Simetría respecto de una circunferencia).** Sea $\Gamma := C(a, R)$. En este caso tendremos:

$$\begin{aligned}
(z^*, z_2, z_3, z_4) &= (\overline{z}, \overline{z}_2, \overline{z}_3, \overline{z}_4) = (\overline{z} - a, \overline{z}_2 - a, \overline{z}_3 - a, \overline{z}_4 - a) \\
&= \left(\text{vía } w \xrightarrow{\varphi} \frac{R^2}{w} : \varphi \in \mathcal{M}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)\right) \\
&= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - a}, \frac{R^2}{\overline{z}_2 - a}, \frac{R^2}{\overline{z}_3 - a}, \frac{R^2}{\overline{z}_4 - a}\right) \\
&= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - a}, z_2 - a, z_3 - a, z_4 - a\right) \\
&= \left(\frac{R^2}{\overline{z} - a} + a, z_2, z_3, z_4\right) \\
\implies \quad & z^* = \frac{R^2}{\overline{z} - a} + a \iff z^* - a = \frac{R^2}{\overline{z} - a},
\end{aligned}$$

y basta poner $z^*$ donde ponga $z$ en la ecuación de la circunferencia.

Nótese que si $a = 0$, entonces $z^* = \frac{R^2}{\overline{z}}$; y si, además, $R = 1$,

$$z^* = \frac{1}{\overline{z}} = \overline{z}^{-1}$$

es el simétrico de $z$ respecto de la circunferencia unidad $\mathbb{T}$.

**EJERCICIOS PROPUESTOS.**

1. Pruébese que las transformaciones de Möbius que dejan invariante el eje real se pueden escribir con sus cuatro parámetros reales.

2. Encuentre una transformación de Möbius que aplique la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ en una recta vertical, el punto 4 en el origen y a la circunferencia de radio 2 centrada en el origen la transforma en sí misma.

3. Encuentre una transformación de Möbius que aplique el dominio

$$\Omega := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0, |z - 2| > 1\}$$

sobre el anillo $A(0; \rho, 1)$, para conveniente $0 < \rho < 1$.

4. Pruébese que toda transformación de Möbius, distinta de la identidad, tiene uno o dos puntos fijos en el plano ampliado $\overline{\mathbb{C}}$. Determine todas las transformacones de Möbius que tienen

   **a.** a $\infty$ como único punto fijo.

   **b.** a 0 e $\infty$ como puntos fijos.

5. Sea $\Phi$ una transformación de Möbius con $a, b \in \mathbb{C}$ como puntos fijos. Pruébese que, para conveniente $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, tal $\Phi$ responde a la fórmula

$$\frac{\Phi(z) - a}{\Phi(z) - b} = \lambda \frac{z - a}{z - b}.$$

   Pruébese que toda circunrecta que pase por $a$ y $b$, se aplica por $\Phi$ en sí misma si, y sólo si, $\lambda$ es real. Pruébese que toda circunrecta respecto de la que $a$ y $b$ sean simétricos, se aplica por $\Phi$ en sí misma si, y sólo si, $|\lambda| = 1$.

6. Calcúlense todas las transformaciones de Möbius que llevan el disco unidad $\mathbb{D}$ en sí mismo.

7. Encuéntrense todas las transformaciones de Möbius que aplican el semiplano superior en el disco unidad.

8. Sean $a, b \in \mathbb{C}$ y $r, s > 0$. Encuéntrense todas las transformaciones de Möbius que aplican $D(a, r)$ en $D(b, s)$.

9. Caracterícese la condición que han de verificar los números $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, para que la aplicación de Möbius

$$\varphi(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

   transforme el semiplano superior $\mathbb{C}^{\uparrow}$ en sí mismo. (Vuelve al ejercicio 1.)

10. Determínense todas las transformaciones de Möbius que representen giros en la esfera de Riemann.

11. Determínese el grupo de transformaciones de Möbius que corresponden a rotaciones de la esfera de Riemann y que transforman los puntos $a$ y $b$ en la proyección estereográfica uno en el otro.

12. Halle los grupos de transformaciones de Möbius que corresponden, en la proyección estereográfica, a la rotación de la esfera de Riemann:

    (a) alrededor del (diámetro paralelo al) eje $0Z$ en $\mathbb{R}^3$;

    (b) alrededor del (diámetro paralelo al) eje real;

    (c) alrededor del (diámetro paralelo al) eje imaginario;

    (d) alrededor de aquel diámetro para el que un punto $a \in \mathbb{C}$ es la proyección estereográfica de uno de sus extremos.

13. Designemos por $\Omega$ al semiplano superior abierto. Obténgase una transformación conforme de $\Omega$ en el disco unidad $\mathbb{D}$, que lleve la terna $\{-1,0,1\}$ en la terna $\{-1,-i,1\}$. Obténgase un $z$ tal que $f(z)=0$. Obtenga $f(\frac{i}{2})$. (Indicación, por si te vale: $f=\varphi\circ s\circ\psi$, con $\varphi,\psi$ de Möbius y $s(\lambda):=\lambda^2$.)

14. ¿Puede encontrarse alguna transformación de Möbius que transforme un cuadrado en un triángulo?

15. Pruébese que la aplicación $z\to\overline{z}$ no es una transformación de Möbius.

16. Exprese la razón doble correspondiente a las 24 permutaciones de cuatro puntos en términos de $\lambda:=(z_1,z_2,z_3,z_4)$.

17. Encuentre una transformación de Möbius que aplique la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ en la circunferencia $C(1,2)$, que deje fijo al punto $-1$ y que lleve el origen a $i$.

18. Encuentre una transformación de Möbius que aplique el dominio

$$\Omega:=\{z\in\mathbb{C}:|z|<5,|z-2|>2\}$$

sobre el anillo $A\,(0;\rho,1)$, para conveniente $0<\rho<1$.

19. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio $\Omega$ sobre el disco unidad $\mathbb{D}$, en cada uno de los tres siguientes casos:

    (a) $\Omega:=\left\{z\in\mathbb{C}\backslash\{0\}:|\arg z|<\frac{\pi}{4}\right\}$.
    (b) $\Omega:=\left\{z\in\mathbb{C}:|z-1|<\sqrt{2},|z+1|<\sqrt{2}\right\}$.
    (c) $\Omega:=\left\{z\in\mathbb{C}:|z-1|<\sqrt{2},\operatorname{Re}z>0\right\}$.

20. Dados $a,b,c\in\mathbb{C}$, pruébese que existe una única circunrecta $\gamma$ tal que $a$ y $b$ son simétricos respecto de $\gamma$ y $c\in\gamma$.

21. Halla la homografía (ya sabes, la transformación de Möbius) que transforma la terna de puntos $\{-i,0,i\}$ en la terna $\{-1,i,1\}$. ¿En qué curva es transformado el eje imaginario $\operatorname{Re}z=0$?

22. ¿Puede ser transformada una banda en todo el plano mediante una transformación de Möbius? ¿Y mediante otro tipo de aplicación conforme?

23. Consideremos la transformación

$$\varphi_\alpha(z):=\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z},\forall z\in\mathbb{C}\qquad(\alpha\in\mathbb{D}).$$

    (a) Pruébese que:
        i. se trata de una biyección del disco unidad $\mathbb{D}$ sobre sí mismo;
        ii. lleva la circunferencia unidad $\mathbb{T}$ sobre sí misma;
        iii. $\varphi_\alpha(\alpha)=0,\varphi_\alpha^{-1}(z)=\varphi_{-\alpha}(z)$;

iv. $\varphi'_\alpha(0) = 1 - |\alpha|^2 \,, \varphi'_\alpha(\alpha) = \frac{1}{1-|\alpha|^2}$.

(b) Obténganse los puntos fijos de esta transformación. ¿Existe alguna recta que se quede invariante por dicha transformación?

24. Obténganse todos los complejos $\alpha$ para los que la función

$$f_\alpha(z) := \frac{z}{1 + \alpha z^2}$$

sea una biyección del disco unidad $\mathbb{D}$ sobre sí mismo.