Tema 3.1: Interpretación geométrica de la derivada. Aplicaciones conformes

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

En esta lección pretendemos conectar la derivabilidad de las funciones complejas con una propiedad geométrica, cual es la conservación de ángulos, que, a posteriori, caracterizará la existencia de derivada compleja (no nula) para las funciones diferenciables (en el sentido real) con determinante jacobiano no nulo. Así pues, obtendremos la interpretación geométrica de la derivada en el sentido complejo: serán aquellas funciones diferenciables (en el sentido real) que conserven ángulos.

Definición. Sean $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}$ una curva, $t \in [a,b]$ y $z := \gamma(t)$. Diremos que γ admite tangente en t (aunque nos acostumbraremos a evitar el parámetro y nos referiremos directamente a z) cuando γ sea derivable en t con $\gamma'(t) \neq 0$.

Inmediatamente se nos dan razones del porqué "es bueno" que la derivada $\gamma'(t)$ no sea nula:

Lema. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ y $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ una curva. Sea $\widehat{\gamma} := f \circ \gamma$. Para $t \in [a,b]$, sean $z := \gamma(t)$ y $w := f(z)$. Supongamos que γ tiene tangente en z y que f es derivable en z con derivada no nula. Entonces, la curva $\widehat{\gamma}$ tiene tangente en w con

$$\operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}'(t)\right) = \operatorname{Arg}(f'(z)) + \operatorname{Arg}(\gamma'(t)).$$

Demostración. La regla de la cadena nos dice que $\widehat{\gamma}$ es derivable en t con derivada no nula:

$$\widehat{\gamma}'(t) = f'(z)\gamma'(t) \neq 0.$$

Por tanto, la curva $\widehat{\gamma}$ tiene tangente en w. Usando las propiedades del argumento:

$$\operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}'(t)\right) = \operatorname{Arg}(f'(z)\gamma'(t)) = \operatorname{Arg}(f'(z)) + \operatorname{Arg}(\gamma'(t)). \qquad \blacksquare$$

La fórmula en el lema anterior nos da ya la interpretación geométrica de la derivada compleja (cuando $f'(z) \neq 0$): "cuando una curva γ con tangente en t es transformada en otra curva $\widehat{\gamma}$ mediante una función derivable con $f'(z) \neq 0$,

$\gamma(t) = z$, la tangente de la curva en z experimenta un giro de ángulo (exactamente) igual al argumento de $f'(z)$."

Obsérvese que al ser transformada la curva γ en la $\widehat{\gamma}$, el giro que experimenta en el punto z no depende de las curvas, si no de la función f que transforma una en otra. Es decir, todas las curvas que pasen por z al ser tratadas por f van a experimentar el mismo giro en dicho punto. Esto lo podemos formalizar así:

Definición. Sean dos curvas $\gamma_1 : [a_1, b_1] \longrightarrow \mathbb{C}$ y $\gamma_2 : [a_2, b_2] \longrightarrow \mathbb{C}$ que pasan por un mismo punto $z \in \mathbb{C}$: existen $t_1 \in [a_1, b_1]$ y $t_2 \in [a_2, b_2]$ tales que $\gamma_1(t_1) = \gamma_2(t_2) = z$. Supongamos que ambas admiten tangente en z. Se define el ángulo de γ_1 y γ_2 en z como $\operatorname{Arg}(\gamma_1'(t_1)) - \operatorname{Arg}(\gamma_2'(t_2))$.

Corolario. Una función derivable con derivada no nula conserva los ángulos.

En efecto, usando el lema anterior:

$$\operatorname{Arg}(\gamma_1'(t)) - \operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}_1'(t)\right) = \operatorname{Arg}(f'(z)) = \operatorname{Arg}(\gamma_2'(t)) - \operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}_2'(t)\right),$$

de donde se tiene que

$$\operatorname{Arg}(\gamma_1'(t)) - \operatorname{Arg}(\gamma_2'(t)) = \operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}_1'(t)\right) - \operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}_2'(t)\right). \qquad \blacksquare$$

Definición. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $z \in \Omega$ y $w := f(z)$. Se dice que f es conforme en z si se verifican las siguientes dos condiciones:

a. para toda curva γ en Ω con tangente en z, la curva transformada $\widehat{\gamma} := f \circ \gamma$ tiene tangente en w; y

b. para γ_1 y γ_2 dos curvas en Ω que se corten en z y $\widehat{\gamma}_1 := f \circ \gamma_1, \widehat{\gamma}_2 := f \circ \gamma_2$, entonces

$$\operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}_1'(t)\right) - \operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}_2'(t)\right) = \operatorname{Arg}(\gamma_1'(t)) - \operatorname{Arg}(\gamma_2'(t)).$$

Es decir, ser conforme supone conservación de tangencia y de ángulos; en concreto, el corolario anterior se lee ahora así:

Corolario. Si una función es derivable con derivada no nula en un punto, entonces es conforme en dicho punto.

Vamos a encarar nuestro objetivo: hacer reversible el resultado anterior. Bajo hipótesis naturales de regularidad probaremos la condición a. en la definición anterior.

Lema. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $z \in \Omega$ y $w := f(z)$. Supongamos que f es diferenciable (en el sentido real) en z con determinante jacobiano no nulo ($|Jf(z)| \neq 0$). Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \Omega$ es una curva que pasa por z y tiene tangente en dicho punto z, entonces la curva $\widehat{\gamma} := f \circ \gamma$ tiene tangente en w.

Demostración. Para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^2$, diferenciabilidad y derivabilidad son la misma cosa. Por la regla de la cadena para funciones diferenciables, la diferenciabilidad de γ conllevará la de $\widehat{\gamma}$ y se tiene:

$$\widehat{\gamma}'(t) = Jf(z)\gamma'(t)$$

($\widehat{\gamma}'(t)$ y $\gamma'(t)$ vectores en $\mathbb{R}^2$). Por ser $|Jf(z)| \neq 0$, la diferencial $Jf(z)$ es una biyección lineal del plano, luego $\gamma'(t) \neq 0$ conlleva $\widehat{\gamma}'(t) \neq 0$. **Q.E.D.**

Teorema. Sean $\Omega = \overset{\circ}{\Omega} \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{C}(\Omega)$, $z \in \Omega$ y supongamos que f es diferenciable (en el sentido real) en z con su determinante jacobiano no nulo ($|Jf(z)| \neq 0$). Entonces, son equivalentes:

- **i.** f es derivable en z.
- **ii.** f es conforme en z.

Demostración. Para probar i. $\Longrightarrow$ ii., basta ver que $f'(z) \neq 0$ y, entonces, aplicar el corolario anterior. Sean $u := \operatorname{Re} f, v := \operatorname{Im} f$ y $z := x + iy \in \Omega$. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann nos dan:

$$\begin{aligned} 0 \quad \neq \quad |Jf(z)| &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & -\frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x} \end{vmatrix} = \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'(z)|^2 . \end{aligned}$$

ii. $\Longrightarrow$ i. Basta ver que f verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Vamos a hacer actuar la diferencial $Jf(z) := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de f en z sobre dos curvas concretas pasando por z. Sea $\rho > 0$ tal que $\overline{D(a,\rho)} \subset \Omega$. Definamos

$$\begin{aligned} \gamma_1, \gamma_2 \quad &: \quad [0,\rho] \longrightarrow \Omega; \\ \gamma_1(t) \quad &: \quad = z + t, \\ \gamma_2(t) \quad &: \quad = z + wt, \forall t \in [0,\rho], \end{aligned}$$

donde $w := \alpha + i\beta \in \mathbb{T}$, fijo, pero arbitrario. Así definidas, γ_1 y γ_2 son dos curvas que se cortan en $z = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ con tangentes $\gamma_1'(0) = 1$ y $\gamma_2'(0) = w$. Sean la nuevas curvas $\widehat{\gamma}_1 := f \circ \gamma_1$ y $\widehat{\gamma}_2 := f \circ \gamma_2$. Aplicando el lema anterior, con la fórmula $\widehat{\gamma}_k'(t) = Jf(z)\gamma_k'(t)$, $k = 1, 2$,

$$\left.\begin{array}{r} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta b \\ \alpha c + \beta d \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \widehat{\gamma}_1'(0) = a + ic \\ \widehat{\gamma}_2'(0) = (\alpha a + \beta b) + i(\alpha c + \beta d) \end{array}\right.$$

Como hay conservación de ángulos:

$$\operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}_2'(0)\right) - \operatorname{Arg}\left(\widehat{\gamma}_1'(0)\right) = \operatorname{Arg}\left(\gamma_2'(0)\right) - \operatorname{Arg}\left(\gamma_1'(0)\right),$$

entonces

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{\widehat{\gamma}_2'(0)\,\widehat{\gamma}_1'(0)}{\gamma_2'(0)\,\gamma_1'(0)}\right)=0,$$

es decir:

$$\frac{\widehat{\gamma}_2'(0)\,\widehat{\gamma}_1'(0)}{\gamma_2'(0)\,\gamma_1'(0)}\in\mathbb{R}^+,$$

o lo que es lo mismo:

$$\frac{[(\alpha a+\beta b)+i(\alpha c+\beta d)]\,1}{(a+ic)\,w}=\frac{[(\alpha a+\beta b)+i(\alpha c+\beta d)]}{(a+ic)(\alpha+i\beta)}\in\mathbb{R}^+ \qquad (*)$$

(donde, recordemos, $\alpha^2+\beta^2=1$). Particularizando en $\alpha=0$ y $\beta=1$, se tiene que

$$\exists\lambda>0: b+id=\lambda i\,(a+ic) \qquad (**)$$

lo que sustituido en $(*)$:

$$\frac{[(\alpha a+\beta b)+i(\alpha c+\beta d)]}{(a+ic)(\alpha+i\beta)}=\frac{(a+ic)\,\alpha+i\lambda\,(a+ic)\,\beta}{(a+ic)(\alpha+i\beta)}=\frac{\alpha+i\lambda\beta}{\alpha+i\beta}\in\mathbb{R}^+.$$

Y otra vez hacemos elección adecuada para α y β: $\alpha=\beta=\sqrt{2}/2$. Así: $\frac{1+i\lambda}{1+i}\in\mathbb{R}^+$, y, por tanto,

$$\exists\mu>0: 1+i\lambda=(1+i)\,\mu \implies \lambda=\mu=1.$$

Pero, entonces, de la fórmula $(**)$ se sigue que

$$b+id=-c+ia \implies a=d, b=-c,$$

es decir, la función diferenciable f verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann en z. **Q.E.D.**

Corolario. Para un difeomorfismo real f entre dos abiertos Ω_1 y Ω_2 del plano $\mathbb{C}$, son equivalentes:

- **i.** f es un isomorfismo (biyección biholomorfa)
- **ii.** f es conforme en Ω_1

Por ello, y de ahora en adelante, a los isomorfismos acostumbraremos a llamarlos isomorfismos conformes.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Hágase un estudio geométrico de la holomorfía en el origen de la función

$$z\to\frac{\overline{z}^2}{z},\forall z\neq 0.$$

2. Sea la función
$$f(z) := \frac{z-1}{z+1}, \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}.$$
¿Dónde es holomorfa? Obténgase un desarrollo para f en serie de potencias centrado en un punto arbitrario $a \neq -1$. Calcúlense $f(i\mathbb{R})$ y $f(\mathbb{R})$. ¿Se conservan los ángulos bajo los que se cortan en el origen los ejes coordenados y sus imágenes respectivas por f en el punto $f(0)$?

3. Encuéntrese una transformación conforme que lleve el hemisferio norte del disco unidad $\mathbb{D}^{\uparrow} := \{z \in \mathbb{D} : \operatorname{Im} z > 0\}$ en todo el disco unidad $\mathbb{D}$.

4. Comenta la frase: "Si la derivada es nula en un punto dado, nada se puede afirmar sobre la conservación o no de ángulos". (Examínense las funciones
$$f(z) = f(re^{i\theta}) := r^2 e^{i\theta} \quad \text{y} \quad g(z) = g(re^{i\theta}) := r^2 e^{i2\theta}$$
en el origen.)

5. Constrúyase un isomorfismo conforme del dominio Ω sobre el disco unidad $\mathbb{D}$, en cada uno de los tres siguientes casos:
   (a) $\Omega := \left\{z \in \mathbb{C}\setminus\{0\} : |\arg z| < \frac{\pi}{4}\right\}$.
   (b) $\Omega := \left\{z \in \mathbb{C} : |z-1| < \sqrt{2}, |z+1| < \sqrt{2}\right\}$.
   (c) $\Omega := \left\{z \in \mathbb{C}; |z-1| < \sqrt{2}, \operatorname{Re} z > 0\right\}$.

6. Encuéntrese una transformación conforme que lleve la región exterior al area común a los círculos $|z \pm 1| \leq \sqrt{2}$ en la región exterior al disco unidad: $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}$.

7. ¿En qué es transformada una región cuadrangular mediante la función exponencial?

8. ¿En qué región es transformada una banda del plano por la función exponencial?

9. Halla la imagen de la banda (semi-infinita)
$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi\}$$
por la función exponencial. Detalla las fronteras mutuamente correspondientes.

10. Prueba que la función $z \longrightarrow \sin^2 z$ lleva la banda (semi-infinita)
$$\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 2\pi, \operatorname{Im} z \geq 0\}$$
en el semiplano superior cerrado. (Comienza pensando en cómo la función $z \longrightarrow \sin(z)$ transforma dicha banda.) Indica las partes correspondientes de la fronteras.

11. Encuéntrese una transformación conforme que lleve la banda semi-infinita

$$\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0, 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$$

en un semiplano.