Tema 2.1: Función exponencial. Funciones trigonométricas

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Comenzaremos tratando de definir la función exponencial sobre todo el plano $\mathbb{C}$ de modo que resulte una extensión de la ya conocida exponencial real. Para ello, presentaremos varios bloques de propiedades que verifica esta última y examinaremos cuál es el que mejor puede servir a nuestro objetivo.

Con su ayuda introduciremos las funciones trigonométricas seno y coseno. (Otras, como la tangente y las recíprocas de cada una de ellas, se estudiarán a través de ejercicios.)

Bloque I. La exponencial real es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$. Además,

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ y } e^x \to +\infty, \text{ si } x \to +\infty.$$

Está claro que estas propiedades nada nos pueden dar como guía, pues ninguna de ellas tiene sentido en $\mathbb{C}$.

Bloque II. La exponencial real es la única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ verificando las siguientes propiedades:

a. $x, y \in \mathbb{R} \implies f(x+y) = f(x)f(y)$

b. f es continua en un punto

c. $f(1) = e$

Analizaremos después este bloque.

Bloque III. La exponencial real es la única función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ verificando las siguientes propiedades:

a. f es derivable en $\mathbb{R}$

b. $x \in \mathbb{R} \implies f'(x) = f(x)$

c. $f(0) = 1$

Este método podría ser el que siguiéramos; pero existe otro camino más cómodo, y es el que vamos a elegir:

Bloque IV. Para todo $x \in \mathbb{R}$ sabemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Consistirá, ahora, en aprovechar la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!}$, y cambiar $x \in \mathbb{R}$ por $z \in \mathbb{C}$.

Definición. La función exponencial compleja queda definida por

$$\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad \exp(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Acostumbraremos a escribir $\exp(z) = e^z$.

Claramente,
1. está bien definida, pues la serie tiene radio de convergencia infinito; y
2. extiende al caso real.

Con esta definición, el bloque tercero queda superado:

Proposición. La exponencial compleja es la única función entera que extiende a la exponencial real (con $\exp(0) = 1$, en particular) y cuya derivada coincide consigo misma.

Demostración. Por la forma de definición, vía series de potencias, tenemos que

$$\exp \in \mathcal{H}(\mathbb{C}) \text{ y } \exp_{|\mathbb{R}}(z) = e^z, \forall z \in \mathbb{R}.$$

Así, su derivada se obtiene por derivación término a término:

$$\exp'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Probemos ya la unicidad: sea f otra tal función. Consideremos la función auxiliar

$$g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \qquad g(z) := f(z)\exp(-z), \forall z \in \mathbb{C}.$$

Esta tal g es entera y su derivada se anula en todos sus puntos:

$$g'(z) = f'(z)\exp(-z) - f(z)\exp(-z) = 0, \forall z \in \mathbb{C},$$

luego (por la conexión de $\mathbb{C}$) ha de ser constante. Pero como

$$g(z) = g(0) = 1, \forall z \in \mathbb{C},$$

se sigue que $f = \exp$. ■

Proposición. $e^{z+w} = e^z e^w, \forall z, w \in \mathbb{C}$.

Demostración. Para $a \in \mathbb{C}$, fijo, pero arbitrario, consideremos la función auxiliar

$$g(z) := e^{z+a}e^{-z}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Así definida, se trata de una función entera con derivada constantemente nula (confírmalo); por tanto:

$$g(z) = g(a) = e^a, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Como a es arbitrario:

$$e^a = e^{z+a}e^{-z}, \forall z, a \in \mathbb{C};$$

luego si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ son arbitrarios, tomando $a := \alpha + \beta$ y $-z := \beta$, al sustituir en la expresión anterior obtenemos lo deseado. ■

Corolario. La función exponencial es analítica en $\mathbb{C}$.

Demostración. Para $a \in \mathbb{C}$, fijo, pero arbitrario, se tiene:

$$e^z = e^{z-a+a} = e^{z-a}e^a = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^a}{n!} (z-a)^n , \forall z \in \mathbb{C}. \qquad \blacksquare$$

Proposición. $e^z = e^{\operatorname{Re} z} (\cos (\operatorname{Im} z) + i \sin (\operatorname{Im} z)) , \forall z \in \mathbb{C}.$

Demostración. Para $z = x+iy = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z$, por la proposición anterior, y gracias al seno y coseno reales:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \\ &= e^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n y^{2n+1}}{(2n+1)!} \right) = \\ &= e^x (\cos y + i \sin y) . \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Una consecuencia inmediata es que $0 \notin \exp(\mathbb{C})$; es más:

Corolario. $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ e $\operatorname{Im} z \in \operatorname{Arg}(e^z) , \forall z \in \mathbb{C}.$

Corolario. Si $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, entonces $\theta \in \operatorname{Arg}(z) \iff z = |z| e^{i\theta}$.

Demostración. Si $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$, entonces $z = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = |z| e^{i\theta}$. Y este mismo argumento es reversible. $\blacksquare$

Corolario. Si $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$, entonces $e^w = z \iff w = \ln |z| + i\theta : \theta \in \operatorname{Arg}(z)$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) $e^w = z \implies |e^w| = |z| = e^{\operatorname{Re} z} \implies \operatorname{Re} z = \ln |z|$; y, también, $\operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg}(e^w) = \operatorname{Arg}(z)$.

($\Longleftarrow$) Evidente: $e^{\ln|z|+i\theta} = e^{\ln|z|}e^{i\theta} = |z| e^{i\theta} = z$, donde $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$. $\blacksquare$

Corolario. Para cada $r > 0$, se tiene que

$$\{e^w : |w| > r\} = \mathbb{C} \backslash \{0\}.$$

Demostración. Sea $r > 0$, fijo, pero arbitrario, y sea $z \neq 0$. Por el corolario anterior, si consideramos

$$w_k := \ln |z| + i (2k\pi + \arg (z)) ,$$

tenemos $e^{w_k} = z$. Además, para $k \in \mathbb{N}$ conveniente, se puede hacer $|w_k| > r$; luego $z \in \{e^w : |w| > r\}$. **Q.E.D.**

Obsérvese cómo este resultado nos dice que el comportamiento de la función exponencial en el infinito es desastroso.

Para concluir con la "política de bloques", probaremos que el bloque II no es una buena alternativa. De hecho, funciones como

$$z \longrightarrow \exp(\overline{z}) \text{ o bien } z \longrightarrow \exp(\operatorname{Re} z)$$

verifican tales propiedades.

Concluimos el estudio de la función exponencial abordando el problema de su periodicidad.

Como

$$\begin{aligned} e^z &= e^{\operatorname{Re} z} e^{i \operatorname{Im} z} = e^x (\cos y + i \sin y) = \\ &= e^x [\cos(y + 2\pi) + i \sin(y + 2\pi)] = e^{z + i2\pi}, \end{aligned}$$

se tiene que $i2\pi$ es período de la función exponencial. Pasamos a estudiar este hecho con detalle.

Definición. Sea f una función compleja de variable compleja, $f : A \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, y sea $w \in \mathbb{C}$. Decimos que w es período para f si:

a. $z \in A \implies z + w, z - w \in A$

b. $z \in A \implies f(z + w) = f(z)$

Proposición. El conjunto de los períodos de una función compleja de variable compleja es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$.

Definición. Una función compleja de variable compleja se dirá periódica si tiene algún período no nulo.

Proposición. La función exponencial $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, es periódica con $i2\pi\mathbb{Z}$ como grupo de períodos.

Demostración. Para $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene $e^z = e^w \iff e^{z-w} = 1$. Tomando módulos, $1 = e^{\operatorname{Re} z - \operatorname{Re} w}$, luego $\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w$. También: $\operatorname{Im}(z - w) = \operatorname{Im} z - \operatorname{Im} w \in \operatorname{Arg}(e^{z-w}) = \operatorname{Arg}(1) = 2\pi\mathbb{Z}$; luego existe un entero k tal que $w = z + i2k\pi$. ■

Definición. Diremos de una función periódica que es simplemente periódica cuando su grupo de períodos sea cíclico. Cualquier generador del grupo de los períodos de una función simplemente periódica se dirá período fundamental (de la tal función).

Corolario. La función exponencial es simplemente periódica con período fundamental $i2\pi$.

Concluimos ya este tema con unos contenidos mínimos sobre las funciones seno y coseno complejas.

El hecho de que

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y),$$

para $x \in \mathbb{R}$, nos da:

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \operatorname{Re} e^{ix} = \frac{e^{ix} + \overline{e^{ix}}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
\sin(x) &= \operatorname{Im} e^{ix} = \frac{e^{ix} - \overline{e^{ix}}}{i2} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i2};
\end{aligned}$$

y, por tanto, nos sugiere la siguiente definición.

Definición. Las funciones seno y coseno complejas de variable compleja, quedan dadas por las fórmulas:

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i2}, \\
\cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

De modo inmediato, se sigue el

Teorema. Seno y coseno son funciones enteras con derivadas:

$$\sin'(z) = \cos(z) \ \text{ y } \ \cos'(z) = \sin(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Y también, la siguiente

Proposición. Para $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene:

i. $\sin(-z) = -\sin(z)$
ii. $\cos(-z) = \cos(z)$
iii. $\sin^2(z) + \cos^2(z) = 1$
iv. $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \sin(w)\cos(z)$
v. $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

Ojo con la afirmación iii. en esta proposición: $|\sin(z)|^2 + |\cos(z)|^2 = 1$, ¡es falso, en general!

Proposición. Seno y coseno son funciones (simplemente) periódicas de período fundamental 2π.

Proposición. Para $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \ \text{ y } \ \sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Proposición. Las funciones seno y coseno son analíticas en todo el plano.

Demostración. Lo haremos para el seno, pues el caso del coseno opera de forma totalmente análoga. La clave, la expresión del seno de una suma. Para $a \in \mathbb{C}$, fijo, pero arbitrario, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sin(z) &= \sin[(z-a)+a] = \sin(z-a)\cos(a) + \sin(a)\cos(z-a) = \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \cos(a)}{(2n+1)!}(z-a)^{2n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin(a)}{(2n)!}(z-a)^{2n} =: \\
&=: \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \qquad \forall z \in \mathbb{C},
\end{aligned}$$

para convenientes coeficientes a_n. ■

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Las funciones *seno hiperbólico* y *coseno hiperbólico* se definen por:

   $$\sinh(z) := \tfrac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad \cosh(z) := \tfrac{e^z + e^{-z}}{2}; \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

   Encuéntrese la relación entre las funciones sinh, cosh y las funciones sin y cos, y utilícese esta relación para expresar $\mathrm{Re}(\sin z)$, $\mathrm{Im}(\sin z)$, $|\sin(z)|$, $\mathrm{Re}(\cos(z))$, $\mathrm{Im}(\cos(z))$ y $|\cos z|$ en términos de $\mathrm{Re}(z)$ e $\mathrm{Im}(z)$.

2. Sea $w \in \mathbb{C}\backslash\{1\} : w^3 = 1$. Exprésese $\exp(z) + \exp(wz) + \exp(w^2 z)$ como serie de potencias. Evalúense las series numéricas

   $$\text{a. } \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{8^n}{(3n)!}, \quad \text{b. } \sum_{n=0}^{+\infty} \tfrac{27^n}{(3n+1)!}.$$

3. Sea una función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ verificando la condición

   $$f(z+w) = f(z)f(w), \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}.$$

   Pruébese que, si es derivable en un punto, entonces es entera. Determínense todas las funciones que verifican la propiedad anterior.

4. Estúdiese la convergencia de las siguientes series de funciones complejas de variable compleja:

   $$\text{a. } \textstyle\sum_{n\geq 0} \exp(-nz), \qquad \text{b. } \textstyle\sum_{n\geq 0} \exp\left(-nz^2\right).$$

5. Dado $w \in \mathbb{T}$, discútase la existencia del límite

   $$\lim_{r\to+\infty} \exp(rw).$$

6. Pruébese que 2π es un período fundamental para las funciones seno y coseno.

7. Estúdiese el comportamiento en el infinito de las funciones seno y coseno.

8. Calcúlense los radios de convergencia de las series de potencias siguientes

$$\begin{array}{ll} \text{a. } \sum_{n\geq 0} \cos(in)\, z^n; & \text{b. } \sum_{n\geq 0} \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right) z^n; \\ \text{c. } \sum_{n\geq 0} \frac{1}{\sin^n(1+in)} z^n; & \text{d. } \sum_{n\geq 0} \cosh\left(\frac{i}{n}\right) z^n. \end{array}$$

9. Hágase un estudio, lo más detallado posible, de la *función tangente* como función compleja de variable compleja.

10. Den los coeficientes de orden menor o igual a tres en las series de potencias correspondientes a las funciones siguientes:

$$\begin{array}{llll} \text{a. } e^z \sin(z)\,; & \text{b. } (\sin z)(\cos z)\,; & \text{c. } \frac{e^z-1}{z}; & \text{d. } \frac{e^z-\cos z}{z}; \\ \text{e. } \frac{1}{\cos z}; & \text{f. } \frac{\cos z}{\sin z}; & \text{g. } \frac{\sin z}{\cos z}; & \text{h. } \frac{e^z}{\sin z}. \end{array}$$

11. Resuélvanse las ecuaciones siguientes con $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{array}{lll} \text{a. } \cos z = \sqrt{3}; & \text{b. } \cos z = \frac{1}{2}; & \\ \text{c. } \cos z = \cosh\, z; & \text{d. } \sin z = i \sinh z; & \text{e. } \cos z = i \sinh 2z. \end{array}$$

12. Pruébense las fórmulas siguientes:

   (a) $|\cos z|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2y + \cos 2x) = \sinh^2 y + \cos^2 x = \cosh^2 y - \sin^2 x.$

   (b) $|\sin z|^2 = \frac{1}{2}(\cosh 2y - \cos 2x) = \sinh^2 y + \sin^2 x = \cosh^2 y - \cos^2 x.$

   Dedúzcase que
$$|\cos z|^2 + |\sin z|^2 = 1 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}\ .$$

13. Discútanse funciones inversas para las funciones seno y coseno. Por ejemplo, ¿es $z \to \sin z$ inyectiva en $0 \leq \operatorname{Re} z < 2\pi$? ¿Es sobre?