Tema 1.4: Series de potencias. Concepto de función analítica

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Este tema está dedicado a la introducción de un método expeditivo de creación de funciones holomorfas más allá de las racionales y que, a la postre, significará la caracterización de la holomorfía en términos de una convergencia adecuada para series funcionales.

Definición. Dados $a, a_0 \in \mathbb{C}$ y $\{a_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}$, llamamos serie de potencias centrada en el punto a a la serie funcional

$$\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n, \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

El primer asunto a tratar es de la convergencia (ya sea puntual, absoluta o uniforme) de tales series. Para este fin, sea

$$\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \in \overline{\mathbb{R}}$$

(recordemos que, dada una serie de números reales (x_n) se definen sus límites superior e inferior, respectivamente, como

$$\limsup x_n := \lim y_n \text{ y } \liminf x_n := \lim z_n,$$

donde $y_n := \sup\{x_n, x_{n+1}, ...\}$ y $z_n := \inf\{x_n, x_{n+1}, ...\}$, para cada natural n), y hagamos la definicón siguiente:

$$R := \begin{cases} 1/\alpha..., & \alpha \in \mathbb{R} \\ 0..., & \alpha = +\infty \\ +\infty..., & \alpha = 0 \end{cases}$$

Teorema. Sean la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$ y su correspondiente R, dado por la fórmula anterior. Entonces:

i. Si $R = 0$, entonces la serie sólo converge en el punto a.

ii. Si $R = +\infty$, entonces la serie converge absolutamente en todo $\mathbb{C}$ y uniformemente sobre cada compacto de $\mathbb{C}$.

iii. Si $R \in]0,+\infty[$, entonces la serie converge absolutamente en el disco $D(a,R)$ y uniformemente en cada compacto de $D(a,R)$. Además, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{C}\backslash\overline{D(a,R)}$.

Demostración. i. La convergencia en a es evidente. Veamos que no puede converger en ningún otro punto: supongamos, por el contrario, que sí, que converge en cierto $z_0 \neq a$. Pero, en dicho caso, tendríamos:

$$a_n (z_0 - a)^n \to 0,$$

o lo que es equivalente,

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} |z_0 - a| \to 0;$$

por tanto:

$$\exists M > 0 : n \geq n_0 \Longrightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} |z_0 - a| \leq M.$$

Pero, de este hecho se sigue que:

$$\alpha := \limsup \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{M}{|z_0 - a|} < +\infty,$$

lo cual contradice que sea $\alpha = +\infty$.

ii. Sea dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$. Podemos encontrar $\rho > 0$ tal que $K \subset D(a,\rho)$. Ahora bien, como

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n \rho^n|} = \limsup \rho \sqrt[n]{|a_n|} = \rho \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \rho 0 = 0,$$

el criterio de la raíz de Cauchy nos proporciona la convergencia de la serie

$$\sum_{n \geq 0} |a_n \rho^n| .$$

Ahora bien, como

$$z \in K, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |a_n (z-a)^n| \leq |a_n \rho^n| ,$$

se sigue (por el test de mayoración de Weierstrass) la convergencia absoluta y uniforme en K.

En particular, considerando el compacto formado por el simplete de un punto, se ha probado que hay convergencia absoluta sobre cada punto del disco.

iii. Sea cualquier compacto $K \subset D(a,R)$. Podemos elegir $\rho \in]0,R[$ tal que $K \subset D(a,\rho) \subset D(a,R)$. Como

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n \rho^n|} = \rho \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{\rho}{R} < 1,$$

por el criterio de la raíz de Cauchy, la serie

$$\sum_{n \geq 0} |a_n \rho^n|$$

converge; y como

$$z \in K, n \in \mathbb{N} \Longrightarrow |a_n (z-a)^n| \leq |a_n \rho^n|,$$

(te resulta familiar ya el argmento, ¿no?), el test de mayoración de Weierstrass nos proporciona la convergencia absoluta y uniforme en K. En particular, en cada punto de $D(a,R)$, la convergencia es absoluta.

Finalmente, si $z \in \mathbb{C} \backslash \overline{D(a,R)}$, es decir $|z-a| > R$, entonces:

$$\limsup |a_n (z-a)^n|^{\frac{1}{n}} = |z-a| \limsup |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|z-a|}{R} > 1,$$

de donde se sigue que el conjunto

$$\left\{n \in \mathbb{N} : |a_n (z-a)^n|^{\frac{1}{n}} > \rho \geq 1\right\} = \{n \in \mathbb{N} : |a_n (z-a)^n| > \rho^n \geq 1\}$$

ha de ser infinito. Pero esto obliga a que la sucesión $(a_n (z-a)^n)$ no sea nula y, por tanto, la serie

$$\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$$

no puede ser convergente. **Q.E.D.**

Definición. El número $R \in [0, +\infty]$, dado por el teorema anterior, se llamará radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$.

A la vista del resultado anterior, el conocimiento del carácter de una serie de potencias vendrá dado, casi completamente, por su radio de convergencia. En efecto: sólo no nos va a proporcionar información, en los casos $0 < R < +\infty$, para aquellos $z \in C(a,R)$. En estos casos, el estudio habrá de hacerse *ad hoc*.

Para la situación $a_n \neq 0$ $(n \geq n_0)$, será de gran utilidad el siguiente

Corolario. Sea una serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ y sea $R \in [0, +\infty]$ su radio de convergencia. Supongamos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \neq 0$, si $n \geq n_0$. Entonces:

- **i.** $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to +\infty \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty \Rightarrow R = 0$
- **ii.** $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 0 \Rightarrow R = +\infty$
- **iii.** $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \alpha \in]0, +\infty[\Rightarrow \lim \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \Rightarrow \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha \Rightarrow R = \frac{1}{\alpha}$

Estamos en condiciones de decir que las series de potencias permiten definir funciones (continuas) con clamorosa facilidad: supongamos dada una serie de potencias $\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$ y su correspondiente radio de convergencia $R > 0$. Podemos definir su dominio de convergencia como

$$\Omega := \begin{cases} D(a,R)..., & R < +\infty \\ \mathbb{C}..., & R = +\infty \end{cases}$$

y así, la función dada por

$$f : \Omega \to \mathbb{C}; f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \forall z \in \Omega$$

es continua (¡razónese!). Nuestro propósito es lograr probar su holomorfía en Ω.

Lema. Las series de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$ y $\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} (z-a)^n$ tienen el mismo radio de convergencia.

Demostración. Afirmamos, por una parte, que las series de potencias

$$\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n \text{ y } \sum_{n\geq 0} n a_n (z-a)^n$$

tienen el mismo radio de convergencia:

$$\begin{aligned} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} &\leq \limsup \sqrt[n]{n\,|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{n} \sqrt[n]{|a_n|} \\ &= \lim \sqrt[n]{n} \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \limsup \sqrt[n]{|a_n|}. \end{aligned}$$

Y, por otro lado, las series de potencias

$$\sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} (z-a)^{n+1} \text{ y } \sum_{n\geq 0} (n+1) a_{n+1} (z-a)^n$$

tienen el mismo carácter (es decir, convergen o no simultáneamente), lo cual se observa sin más que hacer

$$(n+1) a_{n+1} (z-a)^{n+1} = (z-a)(n+1) a_{n+1} (z-a)^n .$$

Por tanto, se concluye la tesis. **Q.E.D.**

Teorema. Supongamos que la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n (z-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Sea Ω su dominio de convergencia. Sea la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \forall z \in \Omega.$$

Entonces, f es indefinidamente derivable en Ω y

$$f^{k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (z-a)^n, \forall z \in \Omega, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Demostración. La haremos por inducción sobre el orden de derivación k. Consideremos la situación $k = 1$. Supongamos, también, que $a = 0$. Sean $b \in \Omega$ y $z \in \Omega \backslash \{b\}$. Tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(z)-f(b)}{z-b} &= \frac{\sum_{n=1}^{+\infty} a_n (z^n - b^n)}{z-b} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \frac{z^n - b^n}{z-b} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sum_{j=1}^{n-1} z^{n-j} b^{j-1}. \end{aligned}$$

Para cada natural n vamos a definir la función

$$\varphi_n(z) := a_n \sum_{j=1}^{n-1} z^{n-j} b^{j-1}, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Sea dado $r \in]|b|, R[$. Si $z \in D(0,r)$, entonces:

$$|\varphi_n(z)| \leq |a_n| \sum_{j=1}^{n-1} \left|z^{n-j}\right| \left|b^{j-1}\right| \leq |a_n| \sum_{j=1}^{n-1} r^{n-j} r^{j-1} = n |a_n| r^{n-1}.$$

Pero, aplicando el lema anterior, la serie $\sum_{n\geq 1} n |a_n| r^{n-1}$ es convergente. Podemos, por tanto, aplicar el test de mayoración de Weierstrass a la serie $\sum_{n\geq 1} \varphi_n$ para obtener su convergencia absoluta y uniforme en el disco $D(0,r)$. Sea ahora

$$\varphi(z) := \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(z), \forall z \in D(0,r).$$

Así definida, φ es continua en el disco; pero, además, si $z \in D(0,r)\backslash\{b\}$, como entonces

$$\frac{f(z) - f(b)}{z - b} = \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_n(z) = \varphi(z),$$

podemos tomar límites en b:

$$\lim_{z\to b} \frac{f(z) - f(b)}{z - b} = \varphi(b) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n b^{n-1},$$

y, por tanto, tenemos derivabilidad de f en Ω con

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} z^n, \forall z \in \Omega.$$

Sea ahora a arbitrario, no necesariamente 0. Consideremos la expresión

$$f(z) := g(z-a), \forall z \in \Omega$$

donde la función g está dada por

$$g(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \forall z \in \Omega.$$

Claramente, la regla de la cadena nos da lo que necesitamos, una vez probado ya todo lo anterior para $a = 0$.

Supongamos probado el resultado para cierto $k \in \mathbb{N}$: tendremos f derivable k-veces en Ω con

$$f^{k)}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+k)!}{n!} a_{n+k} (z-a)^n, \forall z \in \Omega.$$

Aplicando lo demostrado para $k = 1$ ahora a la función $f^{k)}$, tendremos que es derivable en Ω y su derivada $f^{k+1)}$, vendrá dada por

$$\begin{aligned} f^{k+1)}(z) &= \left(f^{k)}\right)'(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\,\frac{((n+1)+k)!}{(n+1)!} a_{(n+1)+k}\,(z-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+(k+1))!}{n!} a_{n+(k+1)}\,(z-a)^n\,, \forall z \in \Omega, \end{aligned}$$

de modo que queda probado el teorema en toda su extensión. **Q.E.D.**

Corolario. Si la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n\,(z-a)^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$ y sea la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$, dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z-a)^n\,, \forall z \in \Omega.$$

Entonces

$$a_k = \frac{f^{k)}(a)}{k!}, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Corolario (preludio al Principio de Identidad). Sean $\sum_{n\geq 0} a_n\,(z-a)^n$ y $\sum_{n\geq 0} b_n\,(z-a)^n$ series de potencias de respectivos radios de convergencia $R_1 > 0$ y $R_2 > 0$. Sean f_1 y f_2 las respectivas funciones holomorfas que definen dichas series sobre sus correspondientes dominios de convergencia Ω_1 y Ω_2. Supongamos que existe δ tal que $0 < \delta < \min\{R_1, R_2\}$ de modo que si $z \in D(a,\delta)$, entonces $f_1(z) = f_2(z)$. Entonces, las series de potencias son idénticas; es decir,

$$a_k = b_k, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Demostración. Basta darnos cuenta de que $a_k = \frac{f_1^{k)}(a)}{k!} = \frac{f_2^{k)}(a)}{k!} = b_k, \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. ■

¡Ya sí que estamos en condiciones de dar ejemplos de funciones holomorfas en $\mathbb{C}$ que no sean polinomios! Por ejemplo, la función (que debe resultarte muy sugerente y familiar, ¿no?) dada por

$$f(z) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}$$

no es polinómica: habrían de ser cero sus derivadas a partir de un momento en adelante; lo cual, claramente, no es el caso.

Definición (Concepto de función Analítica). Sean un abierto $\emptyset \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Decimos que f es analítica en Ω si para cada $a \in$

Ω existen $r_a > 0$ y una serie de potencias centrada en a, $\sum_{n \geq 0} a_n (z-a)^n$, de manera que $D(a, r_a) \subset \Omega$ y

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-a)^n, \forall z \in D(a, r_a).$$

Proposición. Toda función analítica es holomorfa y su derivada es una nueva función analítica.

Es un buen momento para un

Ejercicio. Prueba que las series de potencias son analíticas en todo su disco de convergencia.

Y para una muy fuerte

Observación: No sabemos, aún, si producto y composición conservan analiticidad. Este hecho tendrá contestación afirmativa, de manera evidente, en el próximo capítulo, cuando veamos la equivalencia entre los conceptos de holomorfía y analiticidad.

Concluimos este tema con un detalle sobre polinomios en dos variables reales y con valores en el plano, los cuales se pueden ver así:

$$p(x, y) = \operatorname{Re} p(x, y) + i \operatorname{Im} p(x, y), \forall x + iy \in \mathbb{C}.$$

Pues bien, de entre estos polinomios, llamaremos analíticos a aquellos p para los que existan coeficientes complejos $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_n$ (donde $\mathrm{grad}(p) = n$) tales que

$$p(x, y) = \alpha_0 + \alpha_1 (x + iy) + \alpha_2 (x + iy)^2 + ... + \alpha_n (x + iy)^n, \forall x + iy \in \mathbb{C}.$$

Si este es el caso, se acostumbra a escribir

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}; \qquad p(z) := \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k, \forall z \in \mathbb{C}.$$

Ejemplos. El polinomio

$$(x, y) \to x^2 + y^2 - i2xy$$

no es analítico; pero sí que lo es

$$(x, y) \to x^2 - y^2 - i2xy.$$

La suma, el producto y la composición de polinomios analíticos es otro polinomio analítico.

Proposición. Para un polinomio $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, equivalen:

i. p es analítico

ii. $\frac{\partial p}{\partial y} \equiv i \frac{\partial p}{\partial x}$

iii. $\frac{\partial p}{\partial \bar{z}} \equiv 0$

iv. p es una función entera

Demostración. Que ii. $\iff$ iii. $\iff$ iv. es trivial. Razona tú mismo que i. $\implies$ ii., o iii., o iv.

Veamos ii. $\implies$ i. Comenzamos expresando

$$p(x,y) = \sum_{k=0}^{n} q_k\left(x,y\right), \forall\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2,$$

donde los polinomios q_k son k-homogéneos ($k = 0, 1, 2, ..., n$):

$$q_k\left(x,y\right) := \sum_{j=0}^{k} c_{j,k} x^{k-j} y^j, \forall\left(x,y\right) \in \mathbb{R}^2,$$

y los coeficientes $c_{j,k}$ son constantes complejas para $0 \leq j \leq k \leq n$.

Por hipótesis ha de ser

$$\frac{\partial q_k}{\partial y} \equiv i \frac{\partial q_k}{\partial x}, k = 0, 1, 2, ..., n;$$

luego, efectuando cálculos

$$\begin{aligned} c_{1,k} x^{k-1} + 2c_{2,k} x^{k-2} y + ... + k c_{k,k} y^{k-1} &= i\left(k c_{0,k} x^{k-1} + (k-1)\, c_{1,k} x^{k-2} y + ...\right. \\ &\left. ... + c_{k-1,k} y^{k-1}\right). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$c_{j,k} = i^j \binom{k}{j} c_{0,k}$$

para $j \in \{1, 2, ..., n\}$ y $0 \leq j \leq k$; y, en consecuencia, se tiene que

$$q_k\left(x,y\right) = c_{0,k}\left(x + iy\right)^k,$$

y, por tanto, q_k es analítico. Como p es suma finita de ellos, se sigue lo deseado.
Q.E.D.

EJERCICIOS PROPUESTOS.

1. Determínese el radio de convergencia de cada una de las siguientes series

de potencias:

a. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$; b. $\sum\limits_{n\geq 0} z^{2n}$;

c. $\sum\limits_{n\geq 0} 2^n z^{n!}$; d. $\sum\limits_{n\geq 0} \left[3+(-1)^n\right]^n z^n$;

e. $\sum\limits_{n\geq 0} (n+a^n)\, z^n \quad (a>0)$; f. $\sum\limits_{n\geq 0} a^{n^2} z^n \quad (a\in\mathbb{C})$;

g. $\sum\limits_{n\geq 0} nz^n$; h. $\sum\limits_{n\geq 0} n^n z^n$;

i. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n}{n^n}$; j. $\sum\limits_{n\geq 2} (\log n)^2 z^n$;

k. $\sum\limits_{n\geq 0} 2^{-n} z^n$; l. $\sum\limits_{n\geq 0} n^2 z^n$;

m. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$; n. $\sum\limits_{n\geq 1} a^{n^2} z^{1+2+\ldots+n} \quad (a\in\mathbb{C})$;

ñ. $\sum\limits_{n\geq 1} \exp\left(\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n}\right) z^{n!}$.

2. Si la series de potencias $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ y $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ tienen radios de convergencia respectivos R y S, ¿qué podemos decir de los radios de convergencia de las series

$$\text{a. } \sum_{n\geq 0} (a_n+b_n)\, z^n \quad \text{y b.} \sum_{n\geq 0} (a_n b_n)\, z^n?$$

3. Dada la serie de potencias $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$, de radio de convergencia $R>0$, pruébese que las siguientes series tienen el mismo radio de convergencia R:

a. $\sum\limits_{n\geq 1} na_n z^n$; b. $\sum\limits_{n\geq 1} n^2 a_n z^n$;

c. $\sum\limits_{n\geq 1} n^d a_n z^n \quad (d\in\mathbb{N})$; d. $\sum\limits_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$.

4. Calcúlese el radio de convergencia de la serie $\sum \frac{1}{n!} a_n z^n$, sabiendo que la serie $\sum a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R\in\,]0,+\infty[$.

5. Supongamos que las cuatro partes en las que se descompone una serie, según que los coeficientes de la misma pertenezcan a un mismo cuadrante cerrado del plano complejo, dan series convergentes. Pruebe que entonces la serie dada converge absolutamente.

6. Exprese $\frac{1}{z}$ como suma de una serie de potencias centrada en $a\neq 0$, e indíquese dónde es válida la igualdad.

7. Determínense los valores del complejo z para los que hay convergencia absoluta de las series siguientes:

a. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{(1+z)^n}{2^n}$; b. $\sum\limits_{n\geq 0} \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^x$;

c. $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^n+z^{-n}}{n^2}$; d. $\sum\limits_{n\geq 0} \frac{z^n}{1-z^n}$.

8. Determine para qué valores hay convergencia en las series de potencias

$$\text{a. } \sum_{n\geq 1} (n+z)^{-1}; \qquad \text{b. } \sum_{n\geq 1} (n+z)^{-2}.$$

9. Obténganse desarrollos en series de potencias para las funciones

$$z \to (1+z)^{-2} \quad \text{y} \quad z \to (1+z)^{-3}$$

válidos para $|z| < 1$.

10. (*Criterio de Dirichlet*) Sea A un conjunto no vacío de números complejos y (f_n) y (g_n) dos sucesiones de funciones de A en el plano $\mathbb{C}$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

    (a) La sucesión (F_n) de sumas parciales de la serie $\sum f_n$, está uniformemente acotada en A.

    (b) La serie $\sum |g_n - g_{n+1}|$ converge uniformemente en A.

    (c) La sucesión (g_n) converge uniformemente a cero en A.

    Pruébese que, entonces, la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente en A. (Indicación: se tiene

$$\sum_{k=1}^{p} f_{n+k} g_{n+k} = -F_n g_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} F_{n+k} (g_{n+k} - g_{n+k+1}) + F_{n+p} g_{n+p}$$

    para cualesquiera naturales n y p, con $p \geq 2$.)

11. Sea (a_n) una sucesión de números reales decreciente y convergente a cero. Pruébese que la serie de potencias $\sum a_n z^n$ converge uniformemente en el conjunto

$$A := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1, |z-1| \geq \delta\}$$

    cualquiera que sea $\delta \in]0,1[$. Dedúzcase que dicha seire converge en todo punto de la circunferencia salvo, eventualmente, en el punto $z = 1$, y que, por tanto, su radio de convergencia es, al menos, 1.

12. Estúdiese el comportamiento en la circunferencia unidad de las siguientes series:

$$\text{a. } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} z^n; \qquad \text{b. } \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} z^{2n}; \qquad \text{c. } \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln n} z^{3n-1}.$$

13. (*Criterio de Abel*) Sea A un conjunto no vacío de números complejos y (f_n) y (g_n) dos sucesiones de funciones de A en el plano $\mathbb{C}$. Supongamos que se verifican las siguientes condiciones:

    (a) La serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A.

    (b) La sucesión de sumas parciales de la serie $\sum |g_n - g_{n+1}|$ está uniformemente acotada en A.

(c) La función g_1 está acotada en A.

Pruébese que, entonces, la serie $\sum f_n g_n$ converge uniformemente en A. (Indicación: se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{p} f_{n+k} g_{n+k} &= -\left(F_n - F\right) g_{n+1} + \sum_{k=1}^{p-1} \left(F_{n+k} - F\right)\left(g_{n+k} - g_{n+k+1}\right) + \\ &\quad + \left(F_{n+p} - F\right) g_{n+p}\end{aligned}$$

para cualesquiera naturales n y p, con $p \geq 2$, siendo F la suma de la serie $\sum f_n$.)

14. Sea una serie de potencias $\sum a_n z^n$ con radio de convergencia 1. Si dicha serie converge en un punto z_0 de la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, prueba las siguientes afirmaciones:

   (a) La serie converge uniformemente en el conjunto

   $$S := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 1, \frac{|z_0 - z|}{1 - |z|} \leq M \right\} \cup \{z_0\},$$

   cualquiera que sea $M > 1$.

   (b) Para $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, el sector circular definido por las condiciones

   $$|z_0 - z| \leq \cos\alpha, \quad \left|\arg\left(1 - \frac{z}{z_0}\right)\right| \leq \alpha$$

   queda contenido en S con tal de que se tome M suficientemente grande. Dedúzcase que

   $$\sum_{k=0}^{+\infty} a_n z_0^n = \lim_{r \to 1^-} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_n r^n z_0^n \right).$$

15. Sea f una función analítica en el disco unidad $\mathbb{D}$, que la expresaremos así:

   $$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n z^n, \forall z \in \mathbb{D}.$$

   Prueba que:

   (a) $f(x) \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} \iff a_n \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

   (b) f es una función par $\iff a_n = 0, \forall n \in (2k - 1)\,\mathbb{N}$

16. Prueba que existe una única función analítica, u, tal que

   $$u' = u - 1 \text{ y } u(0) = 2.$$

   ¿Cuál es su radio de convergencia?

17. Determina todas las funciones analíticas en el origen, u, tales que

$$u''(z) + \alpha^2 u(z) = 0 \qquad (\alpha > 0).$$

¿Cuál es su radio de convergencia?

18. Análogo al anterior, ahora para

$$u''(z) - \alpha^2 u(z) = 0 \qquad (\alpha > 0).$$

19. (Polinomios de Legendre) Calcula los coeficiente polinomiales $P_1(\alpha), ..., P_4(\alpha)$ en el desarrollo en serie de potencias de

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha z + z^2}} \\ &= 1 + P_1(\alpha) z + P_2(\alpha) z^2 + ... + P_n(\alpha) z^n + ... \end{aligned}$$

20. (Producto de Cauchy)

a. Supongamos que las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son absolutamente convergentes. Llamemos $A := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ y $B := \sum_{n=0}^{+\infty} b_n$. Definamos, para cada $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$c_k := \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}.$$

Prueba que la serie $\sum c_n$ converge y que es $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = AB$.

b. Supongamos que las series de potencias $\sum a_n z^n$ y $\sum b_n z^n$ tienen como respectivos radios de convergencia a $R_1 > 0$ y $R_2 > 0$. Prueba que el producto de Cauchy $\sum c_n z^n$ es una serie de potencias convergente para todo $|z| < \min\{R_1, R_2\}$.

c. Encuentra una fórmula para las series de potencias $\sum n z^n$