Tema 1.2: Topología del plano complejo. La esfera de Riemann

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

E. de Amo

Pretendemos dotar al plano complejo $\mathbb{C}$ de una estructura topológica. Si de lo que se trata es de buscar entre los candidatos, la topología asociada a la distancia dada por el valor absoluto habrá de ser la primera a considerar:

$$d(z,w) := |z-w|, \forall z,w \in \mathbb{C}.$$

Acostumbraremos a escribir, como es usual,

$$z_n \to z :\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Longrightarrow d(z_n, z) < \varepsilon.$$

En estas circunstancias, se van a verificar las siguientes propiedades que resumimos sin demostración:

Proposición. Sean (z_n) y (w_n) dos sucesiones en $\mathbb{C}$, convergentes a z y w, respectivamente. Entonces:

- **i.** $z_n + w_n \to z + w$
- **ii.** $z_n w_n \to zw$
- **iii.** Si $w \neq 0$ (y, por tanto, $w_n \neq 0, \forall n \geq n_0$), entonces $\frac{z_n}{w_n} \to \frac{z}{w}$

Proposición. Para que la serie de números complejos $\sum_{n\geq 0} z_n$ sea convergente, es suficiente que $\sum_{n\geq 0} |z_n|$ también lo sea.

Test de mayoración de Weierstrass. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$ y $\sum_{n\geq 1} f_n$ una serie de funciones de A en $\mathbb{C}$. Supongamos que existe una sucesión de reales positivos $(M_n)_{n\geq 1}$, tal que

- **a.** $|f_n(a)| \leq M_n, \forall a \in A, \forall n \in \mathbb{N}$, y
- **b.** $\sum_{n\geq 1} M_n$ converge.

Entonces la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge absoluta y uniformemente en A.

De hecho, el par $(\mathbb{C}, d)$ es un espacio métrico completo (no estamos hablando de otra cosa, hasta ahora, que el plano euclídeo). Además, $\mathbb{C}$ es un cuerpo topológico: es lo que nos dice la primera de las proposiciones arriba enunciadas sobre la compatibilidad de las operaciones suma y producto y la distancia d. Será útil, por tanto, el

Teorema de Hausdorff. En todo espacio métrico E, son equivalentes:

- **i.** E es compacto.
- **ii.** Toda sucesión en E admite parcial convergente en E.
- **iii.** Todo subconjunto infinito en E tiene acumulación en E.

Observemos que $\mathbb{C}$ es un espacio métrico localmente compacto, pues los discos cerrados (de centro $z \in \mathbb{C}$ y radio $r > 0$)

$$\overline{D(z,r)} := \overline{\{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}}$$

son compactos. Podemos aplicar, por tanto, es aplicable el

Teorema de Alexandroff. Sea X un espacio topológico localmente compacto y de Hausdorff. Sea ∞ un objeto matemático tal que $\infty \notin X$. Consideremos el par (X_∞, τ), donde $X_\infty := X \cup \{\infty\}$ y τ es la familia dada por

$$\{\text{abiertos de } X\} \cup \{A \subset X_\infty : X \backslash A \text{ compacto}\}.$$

Entonces

- **i.** (X_∞, τ) es un espacio topológico compacto y de Hausdorff.
- **ii.** La topología inducida en X por X_∞ es la de partida de X.

Si aplicamos este teorema al plano complejo $\mathbb{C}$ obtendremos lo que llamamos el plano ampliado $\mathbb{C}_\infty$, que acostumbraremos a escribir como $\overline{\mathbb{C}}$. Es evidente que los entornos de cada punto $z \in \mathbb{C}$ admiten discos abiertos contenidos en ellos, de la forma

$$D(z,r) := \{w \in \mathbb{C} : |z-w| < r\}.$$

(El caso paradigmático será cuando $z = 0, r = 1$: $\mathbb{D} := D(0,1)$, el disco unidad.)

Para el punto ∞, que llamaremos (punto del) infinito, una base de entornos es la dada por

$$\{U_\rho : \rho > 0\},$$

donde

$$U_\rho := \{z \in \mathbb{C} : |z| > \rho\} \cup \{\infty\} \subset \overline{\mathbb{C}}.$$

En efecto: si $G \in \tau$, con $\infty \in G$, se tiene que $\mathbb{C} \backslash G$ es compacto, luego acotado: existe $\rho > 0$ tal que si $z \in \mathbb{C} \backslash G$ entonces $|z| \leq \rho$; así, $U_\rho \subset G$. Y como consecuencia de ser $\{U_\rho : \rho > 0\}$ base de entornos:

Proposición. Para cada sucesión (z_n) de números complejos de tiene que

$$z_n \to \infty \Leftrightarrow |z_n| \to +\infty.$$

Es sencillo verlo:

$$z_n \to \infty \Leftrightarrow \{\forall \rho > 0, \exists m; n \geq m \Longrightarrow |z_n| > \rho\} \Leftrightarrow |z_n| \to +\infty.$$

Es importante observar que, pese a todo, en $\overline{\mathbb{C}}$ ya no se podrá operar como en $\mathbb{C}$: el objeto ∞ sólo se ha incorporado con fines topológicos, no operacionales; $\overline{\mathbb{C}}$ no es un cuerpo. De hecho, hay más:

Proposición. No hay ninguna distancia en $\overline{\mathbb{C}}$ que genere la topología τ.

En efecto; si fuese lo contrario, para tal $d : \overline{\mathbb{C}} \times \overline{\mathbb{C}} \to [0, +\infty[$ se tendría, en particular, que

$$n \to \infty \Leftrightarrow d(n, \infty) \to 0.$$

Pero:

$$d(n, 0) = n \leq d(0, \infty) + d(\infty, n) \leq d(0, \infty) + M, n \geq n_0,$$

de modo que $\mathbb{N}$ estaría acotado; y sabemos que esto no es bueno...

Pese a no poder obtener la topología de $\overline{\mathbb{C}}$ a partir de la distancia euclídea, es decir, pese a no poder extender la distancia euclídea a $\overline{\mathbb{C}}$, lo que sí que se puede es definir otra distancia en el plano $\mathbb{C}$ que sí se pueda extender a $\overline{\mathbb{C}}$. Nos familiarizaremos con la Esfera de Riemann y la Proyección Estereográfica.

Consideremos la esfera unidad del espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$:

$$S^2 := \left\{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 : a^2 + b^2 + c^2 = 1\right\}$$

y establezcamos

$$\chi : S^2 \to \overline{\mathbb{C}}$$

dada por

$$\chi\left(a, b, c\right) := \begin{cases} \frac{a+ib}{1-c} \ldots, & (a, b, c) \neq (0, 0, 1) \\ \infty \ldots, & (a, b, c) = (0, 0, 1) \end{cases}$$

La inversa de χ es fácilmente calculable:

$$\chi^{-1}\left(z\right) = \begin{cases} \left(\frac{z+\overline{z}}{1+|z|^2}, \frac{z-\overline{z}}{i\left(1+|z|^2\right)}, \frac{|z|-1}{1+|z|^2}\right) \ldots, & z \in \mathbb{C} \\ (0, 0, 1) \ldots, & z = \infty \end{cases}$$

(Comprueba la fórmula para χ^{-1}.)

Observamos que χ es homeomorfismo entre los espacios de Hausdorff compactos S^2 y $\overline{\mathbb{C}}$. (Por esta razón se le suele llamar Esfera de Riemann al plano ampliado.) La compacidad en $\overline{\mathbb{C}}$ aporta algo esencial que lo diferencia de $\mathbb{C}$: todas las sucesiones de complejos se acumulan en $\overline{\mathbb{C}}$.

Se define la distancia o métrica cordal en $\overline{\mathbb{C}}$ como la aplicación

$$\begin{aligned} \delta\left(z, w\right) \quad : &= \left|\chi^{-1}\left(z\right) - \chi^{-1}\left(w\right)\right| = \\ &= \begin{cases} \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \ldots, & z, w \in \mathbb{C} \\ \frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \ldots, & z \in \mathbb{C}, w = \infty \end{cases} \end{aligned}$$

(observa que $\chi^{-1}(z)$ y $\chi^{-1}(w)$ están sobre la esfera S^2, de ahí el nombre de"cordal").

(Comprueba que la fórmula anterior que nos da la distancia cordal en términos de z y w.)

Resumimos lo anterior:

Ventaja: la métrica cordal δ se tiene en todo $\overline{\mathbb{C}}$

Desventaja: $\left(\mathbb{C}, \delta_{|\mathbb{C}}\right)$ no es un métrico completo

Y podemos completar las propiedades de convergencia de sucesiones de $\mathbb{C}$ a $\overline{\mathbb{C}}$ del siguiente modo:

Proposición. **i.** Si $z_n \to \infty$ y $w_n \to w \in \overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$, entonces $z_n w_n \to \infty$

ii. Para $\{z_n; n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces $z_n \to \infty \Leftrightarrow \frac{1}{z_n} \to 0$

A continuación introducimos los contenidos topológicos mínimos que nos serán imprescindibles para lo que sigue. Si bien el contexto será generalizable a situaciones abstractas, nos limitaremos a presentar las definiciones y los resultados en el ambiente del plano complejo $\mathbb{C}$.

Recordemos que la acumulación de un conjunto A de números complejos se define como

$$A' := \{z \in \mathbb{C} : \exists (a_n) \subset A\backslash\{a\}; a_n \to a\};$$

que el cierre o adherencia $\overline{A}$ de un conjunto A de números complejos viene dado por

$$\overline{A} := A \cup A'$$

y que para todo conjunto $A \subset \mathbb{C}$ infinito y acotado, se tiene que $A' \neq \emptyset$.

Esta propiedad equivale, tal y como ocurre en todo euclídeo que se precie, a que toda sucesión infinita en un acotado admita una parcial convergente (propiedad de Weierstrass). Del mismo modo, para $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, son equivalentes (teorema de Heine-Borel):

i. A es cerrado y acotado

ii. A es compacto (todo cubrimiento por abiertos de A admite un recubrimiento finito).

La frontera de A, que la denotaremos por ∂A, se define como

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{\mathbb{C}\backslash A}.$$

Un conjunto A se va a decir conexo si no se puede expresar como la unión disjunta de dos abiertos relativos. En particular, ello conlleva que si el conexo A es un conjunto abierto y cerrado, entonces $A = \emptyset$ o bien $A = \mathbb{C}$. Para cada $a \in A$, llamaremos componente conexa de a, que se notará por $C_A[a]$, al mayor conexo en A tal que $a \in C_A[a]$.

Si no hay confusión, evitaremos el subíndice, de modo que se escribirá, simplemente, $C[a]$. Claramente, A es conexo si, y sólo si, $C[a] = C[b]$ para cualesquiera $a, b \in A$ y cada conjunto se puede expresar como unión disjunta de sus componentes conexas. Además $\{a\} = C[a]$, si, y sólo si, a es un punto aislado de A.

Un concepto central en este curso:

DEFINICIÓN DE DOMINIO.

Se dice dominio del plano complejo a cualquier Ω abierto y conexo. Es decir, cualquier punto del mismo admite como entorno a algún disco:

$$\forall a \in \Omega \exists r > 0 : D(a, r) \subset \Omega.$$

Las componentes conexas de un abierto son, igualmente, abiertos (de hecho, dominios).

Damos el paso a considerar propiedades funciones complejas de variable compleja.

Proposición. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}, f : A \to \mathbb{C}, l \in \mathbb{C}$ y $a \in A'$. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la otra:

i. Para toda sucesión (a_n) de elementos en $A \backslash \{a\}$ convergente a a, se tiene que $f(a_n) \to l$.

ii. Para cada real positivo ε, existe otro δ tal que si $0 < |x - a| < \delta, x \in A$, entonces $|f(x) - l| < \varepsilon$.

Se dirá, caso de verificarse estas afirmaciones, que f tiene límite l en el punto a; y escribiremos

$$l = \lim_{x \to a} f(x).$$

Proposición. Sean $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}, f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la otra:

i. Para toda sucesión (a_n) de elementos en A convergente a a, se tiene que $f(a_n) \to f(a)$.

ii. Para cada real positivo ε, existe otro δ tal que si $|x - a| < \delta, x \in A$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Se dirá, caso de verificarse estas afirmaciones, que f es continua en el punto a.

Es de observar que:

a. En caso de que $a \in A \cap A'$, ambos conceptos coinciden si, y sólo si,

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

b. Si a es punto aislado de A, dominio de f, siempre habrá continuidad (por el carácter local de la misma) y no tendrá sentido plantear la existencia o no de límite. De modo análogo, si $a \in A' \backslash A$, entonces no tendrá sentido plantear la continuidad o no de f en a.

Se trata de propiedades locales; en particular, se tiene cierta la siguiente

Propiedad del carácter local de la continuidad. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función y sea $a \in A$. Sea $\delta > 0$ y llamemos $B := \{x \in A : |x - a| < \delta\}$. Entonces, equivalen:

i. f es continua en a.

ii. $f_{|B}$ es continua en a.

Los ejemplos conocidos ya por nosotros, en este corto periodo de vida que llevamos con la variable compleja, son todos de funciones continuas con límite en todo su dominio:

a. el módulo o valor absoluto,

b. la conjugación de números complejos,

c. la suma y producto de números complejos...

d. salvo, el nada trivial ejemplo de la función argumento (principal, o cualquiera de sus ramas); lo cual se demostrará en breve.

Las propiedades fundamentales de las funciones continuas sobre conjuntos destacados que nos interesan las recogemos en la siguiente

Proposición. Sea $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua. Entonces:

i. Si A es un conjunto conexo, entonces $f(A)$ es conexo.

ii. Si A es un cojunto compacto, entonces $f(A)$ es compacto.

Vamos ya con propiedades nada triviales. Concretamente, comenzamos probando que el argumento principal es continuo en todo el plano salvo un rayo que parte del origen. Además, completaremos esta información probando que no es posible mejorar esta situación: ésto le va a pasar a cualquier determinación que tomemos para el argumento.

Proposición. La función argumento principal

$$\begin{aligned} \arg &: \mathbb{C}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \\ \arg(z) &: = \begin{cases} 2\arctan \frac{\operatorname{Im} z}{|z| + \operatorname{Re} z} ..., & z \notin \mathbb{R}^- \\ \pi..., & z \in \mathbb{R}^- \end{cases} \end{aligned}$$

es continua en $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$.

Demostración. Como $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-$ es un abierto y $\arg_{|\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_0^-}$ es continua, por su forma de definición, el carácter local de la continuidad nos dice que también lo va a ser $\arg$. Que la continuidad se rompe en el conjunto $\mathbb{R}_0^-$, se pone de manifiesto de la siguiente manera: consideramos $x \in \mathbb{R}^+$ y la sucesión (z_n) dada por

$$z_n := -x + i\frac{(-1)^n}{n} \to -x.$$

En estas condiciones, la sucesión

$$\arg(z_n) = 2\arctan\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{-x+\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}} = 2(-1)^n \arctan\frac{1}{-nx+\sqrt{1+n^2x^2}}$$

no es convergente, por lo que el argumento principal no converge en ningún punto de $\mathbb{R}^-$. ■

Proposición. Si S es una semirrecta cerrada que parte del origen $(0 \in S)$, entonces podemos encontrar una función continua f de $\mathbb{C}\backslash S$ en $\mathbb{R}$ tal que

$$f(z) \in \operatorname{Arg}(z), \forall z \in \mathbb{C}\backslash S.$$

Demostración. Sabemos que el argumento principal viene caracterizado por dos propiedades:

a. $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \Longrightarrow \arg(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

b. $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \Longrightarrow \arg(z) \in]-\pi,\pi]$.

Sea ahora $\theta \in \mathbb{R}$, y definamos $a_\theta : \mathbb{C}\backslash\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

a'. $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \Longrightarrow a_\theta(z) \in \operatorname{Arg}(z)$

b'. $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \Longrightarrow a_\theta(z) \in]-\pi,\pi]$.

Observamos que si $\varphi := a_\theta(z)$, con $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces $\varphi \in]\theta-\pi,\theta+\pi]$; luego

$$-\pi < \varphi - \theta \leq \pi.$$

Sea ahora $w := e^{i\theta}$. Así,

$$\varphi \in \operatorname{Arg}(z) \iff \varphi - \theta \in \operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right);$$

luego $a_\theta(z) = \arg\left(\frac{z}{w}\right) + \theta$ y, en consecuencia:

$$\begin{aligned} a_\theta \text{ es continua en } z &\iff \arg \text{ es continua en } \frac{z}{w} \iff \\ &\iff \arg\left(\frac{z}{w}\right) \neq \pi \iff a_\theta(z) \neq \pi + \theta \iff \\ &\iff \pi + \theta \notin \operatorname{Arg}(z). \end{aligned}$$

Q.E.D.

Un conjunto A del plano $\mathbb{C}$ se dice conexo por poligonales si cualesquiera dos puntos suyos se pueden unir por un conjunto finito de segmentos, todos completamente contenidos en A.

El siguiente resultado será clave (entre toda una multitud de cosas) para ver que en $\mathbb{C}$, la situación

$$\begin{array}{c}\text{conexo por poligonales}\\ \Downarrow \\ \text{conexo por arcos}\\ \Downarrow \\ \text{conexo}\end{array}$$

tiene recíproco cierto cuando se considera sobre dominios; es decir, si el conjunto, además de conexo, es abierto.

Lema de Conexión. Sean Ω un dominio del plano $\mathbb{C}$ y $\emptyset \neq A \subset \Omega$. Supongamos que A verifica la siguiente condición:

$$a \in A, D(a,r) \subset \Omega \implies D(a,r) \subset A.$$

Entonces $A = \Omega$.

Demostración. La hipótesis nos dice de A que es un abierto relativo en Ω. Por tanto, bastará probar que es, también, cerrado relativo a Ω. Sea $z \in \Omega \cap \overline{A}$. Ha de existir $r > 0$ tal que

$$D(z,r) \subset \Omega \text{ y } D\left(z, \frac{r}{2}\right) \cap A \neq \emptyset.$$

Sea, pues existe, $a \in A$ tal que $|z-a| < r/2$. Así, si $w \in D(a, r/2)$,

$$|w-z| \leq |w-a| + |z-a| < r,$$

luego $w \in \Omega$, de donde $D(a, r/2) \subset \Omega$. Aplicamos ahora la hipótesis de este lema: $D(a, r/2) \subset A$.

Pero esto conlleva que $z \in A$, luego A es un abierto y cerrado relativo a Ω no vacío: $A = \Omega$. **Q.E.D.**

Proposición. Todo dominio Ω del plano complejo $\mathbb{C}$ es conexo por poligonales.

Demostración. Sea $\alpha \in \Omega$. Llamemos

$$A := \{z \in \Omega : z \text{ se puede unir con } \alpha \text{ por una poligonal}\}.$$

Claramente $A \neq \emptyset$, ¿o no? Sea, pues, $a \in A$ y sea $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$. Es claro que

$$z \in D(a,r) \implies z \in A,$$

luego, por el lema de conexión, $A = \Omega$. **Q.E.D.**

Gracias a que $\mathbb{C}$ es localmente conexo (y, por tanto, los abiertos son, localmente, dominios):

Proposición. Las componentes conexas de un abierto A del plano complejo $\mathbb{C}$ son dominios.

Demostración. Sea Ω una componente conexa de A. Veamos que es abierta. Sea $a \in \Omega$ y sea $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset A$. Por argumentos de conexión habrá de ser $D(a,r) \subset \Omega$ (¡detalla el argumento!), luego Ω es un abierto. **Q.E.D.**

(Recordemos que en $\mathbb{C}$ los abiertos se pueden expresar como unión numerable de sus componentes conexas.)

Curvas en el plano complejo

Vamos a completar este tema con una introducción al concepto de curva, tal y como se va a usar en Variable Compleja.

Definición. Llamamos curva en el plano $\mathbb{C}$ a cualquier aplicación continua de la forma
$$\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Se acostumbra a escribir:
$$\gamma^* := \gamma\left([a,b]\right) := \{(x(t), y(t)) : t \in [a,b]\}$$
como la imagen de la curva, donde x, y son funciones continuas de $[a,b]$ en $\mathbb{R}$.

Observemos que, aunque escribamos
$$\gamma(t) = (x(t), y(t)),$$
debemos no confundir entre la aplicación γ y su (conjunto) imagen $\gamma^* \subset \mathbb{C}$. Con todo, se sobreentenderá, en cada caso, a quién nos estamos refiriendo. A $(x(a), y(a))$ se le llama origen de c, mientras que a $(x(b), y(b))$ se le llama extremo de γ. Si origen y extremo son el mismo punto, a la curva se le llama cerrada.

Observemos, igualmente, que las curvas pueden tener autocortes; es decir, no tienen porqué ser aplicaciones inyectivas (pensemos en un lazo, por ejemplo). Veamos algunos ejemplos que nos familiarizarán con expresiones con las que habremos de acostumbrarnos.

Ejemplo 1. **(Segmentos)** Dados $z, w \in \mathbb{C}$, el segmento de origen z y extremo x es la curva
$$[z,w] : [0,1] \to \mathbb{C}$$
dada por
$$[z,w](t) := tw + (1-t)z, \forall t \in [0,1].$$

Observemos cómo en este caso, la imagen $[z,w]^*$ de $[z,w]$ coincide con lo que en un exceso (¡recordemos que no hay orden en $\mathbb{C}$!) podría llamarse "intervalo de extremos" z y w, y que no podría escribirse de otra manera sino $[z,w]$. Esta curva recorre el segmento a velocidad constante, desde z a w.

Ejemplo 2. (Circunferencias) La expresión

$$\gamma^* := \{(a + r\cos(t), b + r\sin(t)) : t \in [0, 2\pi]\}$$

nos muestra la imagen de una curva cerrada γ que representa un circunferencia de radio $r > 0$ con centro en el punto $(a, b) \in \mathbb{C}$, y que es recorrida a velocidad constante en el sentido positivo (el contrario alas agujas del reloj). Notemos que, en nuestro lenguaje,

$$\gamma^* = C((a, b), r).$$

(Nuestro caso más familiar será el de la circunferencia unidad $\mathbb{T}$, cuando $a = b = 0, r = 1$.)

Ejemplo 3. (Yuxtaposición) Si disponemos de dos curvas

$$\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}, \gamma_2 : [c, d] \longrightarrow \mathbb{C}$$

tales que $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, se puede definir lo que se llama curva suma de ambas, y que se notará por $\gamma_1 + \gamma_2$, como la aplicación

$$\gamma_1 + \gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(2tb + (1 - 2t)a) ..., & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \gamma_2\left(2\left(t - \frac{1}{2}\right)d + 2(1 - t)c\right) ..., & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

O bien, si se prefiere una parametrización sencilla sobre el intervalo $[a, b + d - c]$, se puede hacer:

$$(\gamma_1 + \gamma_2)(t) := \begin{cases} \gamma_1(t) ..., & a \leq t \leq b \\ \gamma_2(c - b + t) ..., & b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Ejemplo 4. (Curva opuesta) Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ es una curva, su opuesta será la nueva curva dada por

$$-\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada por

$$-\gamma(t) := \gamma(b + a - t), \forall t \in [a, b].$$

Es decir, $(-\gamma)^* = \gamma^*$ y sus recorridos son opuestos: los hacen en sentido contrario el uno respecto del otro. (En particular, el origen de una es el extremo de la otra, y viceversa.) Por ello se dice que γ y $-\gamma$ son curvas opuestas o de orientaciones contrarias. Y, en particular, $\gamma + (-\gamma)$ es una curva cerrada: representa un "sendero de ida y vuelta".

Ejemplo 5. (Poligonales) Los ejemplos 1 y 3 nos permiten escribir, con pleno significado, expresiones de la forma:

$$[z_1, z_n] = [z_1, z_2] + [z_2, z_3] + ... + [z_{n-1}, z_n].$$

Ejemplo 6. Una curva no ha de ser necesariamente, como ya se dijo más arriba, inyectiva (verifica los cálculos y estudia con detalle lo que representa):

$$t \longrightarrow e^{it}, \forall t \in [-\pi, 2\pi].$$

Una curva se dice regular si es derivable en todo punto. Se dice regular a trozos si se puede expresar como yuxtaposición de curvas regulares. Se dirá camino si se trata de una curva cerrada regular a trozos.

Cuando una curva γ es regular, se puede calcular su longitud mediante la conocida fórmula:

$$\operatorname{long}(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt.$$

Puedes dar un vistazo de repaso y analizar las propiedades de las curvas anteriores, en los ejemplos, en relación a estos conceptos recién enunciados, así como completar los detalles en los ejemplos 7 a 9 que siguen. En particular, se puede refrescar lo concerniente a curvas rectificables, que no son otras que las funciones de variación acotada: en el caso de que sean curvas regulares, su longitud (el supremo, finito, de las correspondientes sumas poligonales asociadas) admite la representación integral que aparece arriba.

Ejemplo 7. $[-1, 1] + [1, 1 + i] + [1 + i, -1 - i]$

Ejemplo 8. $[1 - i, 0] + [0, 1 + i] + \gamma^*$, donde

$$\gamma(t) := \sqrt{2} e^{i\left(t+\frac{\pi}{4}\right)}, \forall t \in \left[0, 3\frac{\pi}{2}\right].$$

Ejemplo 9. $\gamma(t) := e^{it} \cos t, \forall t \in [0, 2\pi].$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Estúdiese la existencia de límite en el origen para la función compleja de variable compleja f definida en un entorno perforado del origen, cuando:

   a. $f(z) = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$, b. $f(z) = \frac{z \operatorname{Re} z}{|z|}$.

2. Sea f una función compleja de variable compleja uniformemente continua definida sobre el disco unidad $\mathbb{D}$. Pruébese que se trata de la restricción, al disco unidad (abierto), de alguna función g continua en el disco unidad cerrado $\overline{\mathbb{D}}$.

3. Sea f una función compleja de variable compleja continua en un dominio Ω. Supongamos que verifica

   $$\left|f^2(z) - 1\right| < 1, \qquad \forall z \in \Omega.$$

   Pruébese que o bien $\operatorname{Re} f(z) < 0$ o bien $\operatorname{Re} f(z) > 0$, para todo $z \in \Omega$.

4. Sea Ω un dominio del plano complejo y sea f una función compleja definida sobre él. Supongamos que $\operatorname{Re} f(z) \neq 0$ y que $f^2(z) = z$ en Ω. Pruébese que, bajo estas hipótesis, o bien $f(z) = \sqrt{z}$ o bien $f(z) = -\sqrt{z}$, para todo $z \in \Omega$.

5. Sea una sucesión (z_n) de números complejos no nulos convegente a otro complejo no nulo z, y sea $\theta \in \operatorname{Arg}(z)$. Pruébese la existencia de una sucesión (θ_n) tal que

$$\theta_n \in \operatorname{Arg}(z_n), \forall n \text{ natural y } \theta_n \to \theta.$$

(Indicación: redúzcase el problema al caso $z = 1$.)

6. Hágase un estudio detallado de la proyección estereográfica: cómo se transforma el hemisferio norte, cómo el hemisferio sur, cómo regiones acotadas de la esfera no tienen porqué serlo en su correspondiente región del plano complejo ampliado, etc. Por ejemplo, ¿qué acción significa sobre la esfera S^2 la función compleja de variable compleja $z \to f(z) = 1/z$?

7. Pruébese que la proyección estereográfica de cualquier circunferencia contenida en la esfera de Riemann es una recta o una circunferencia en el plano complejo, según que la circunferencia de partida pase o no, respectivamente, por el Polo Norte de la esfera.

8. ¿Qué condiciones han de verificar dos puntos del plano complejo para ser las proyecciones estereográficas de dos puntos diametralmente opuestos de la esfera de Riemann?

9. Considera la esfera de radio $\frac{1}{2}$ tangencialmente situada sobre el origen del plano complejo $\mathbb{C}$. Calcula las ecuaciones de la correspondiente proyección estereográfica.