Tema 1.1: El cuerpo de los números complejos. Módulo y argumento de un número complejo

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Notación. $\mathbb{N}$ denotará el conjunto de todos los números naturales

$$\{1, 2, ..., n, n+1, ...\}.$$

Es decir, se trata del conjunto de números reales inductivo más pequeño conteniendo la unidad 1. Con $\mathbb{Z}$ estaremos designando el conjunto de todos los enteros:

$$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup (-\mathbb{N}),$$

donde $-\mathbb{N}$ designa al conjunto de los elementos opuestos de cada natural. Así, natural y entero positivo serán equivalentes. Por $\mathbb{Q}$ denotaremos al conjunto de todos los racionales:

$$\left\{\frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\right\}.$$

Los tres conjuntos numéricos anteriores son conjuntos numerables, y están relacionados por las inclusiones:

$$\mathbb{N} \subsetneq \mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}.$$

El símbolo $\mathbb{R}$ denotará al conjunto de todos los números reales: cuerpo conmutativo totalmente ordenado y verificando el axioma del supremo. Estamos ya ante un conjunto no numerable. Se trata de un espacio completo: toda sucesión de Cauchy de números reales es convergente. Esto no pasaba en $\mathbb{Q}$: existen sucesiones de racionales que convergen a números no racionales; por ejemplo,

$$x_1 := 1; x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \to \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

En él dispondremos de subconjuntos destacados:

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^- &: = \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \\
\mathbb{R}^+ &: = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} \\
\mathbb{R}_0^- &: = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\} \\
\mathbb{R}_0^+ &: = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}
\end{aligned}$$

que son, respectivamente, los conjuntos de todos los reales negativos, positivos, no positivos y no negativos. Al conjunto $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ lo llamaremos de los irracionales. Elementos destacados en él, son

$$\sqrt{2}, \sqrt{3}, e \text{ y } \pi.$$

Tanto $\mathbb{Q}$ como $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ son conjuntos densos en $\mathbb{R}$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0 \quad \exists r \in \mathbb{Q}, \exists \alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : |x-r| < \varepsilon, |x-\alpha| < \varepsilon$$

♣♢♡♠♣♢♡♠♣♢♡♠♣♢♡♠♣♢♡♠♣♢♡♠♣♢♡♠

Consideremos el conjunto $\mathbb{R}^2$ de los pares ordenados de números reales, del cual sabemos que, con las operaciones (para $x, y, u, v, \alpha \in \mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rcl} \bigstar \text{ adición} & : & (x,y) + (u,v) := (x+u, y+v) \\ \bigstar \text{ producto externo} & : & \alpha(x,y) := (\alpha x, \alpha y) \end{array}$$

es un espacio vectorial real de dimensión 2.

Ahora, en el grupo aditivo $\left(\mathbb{R}^2, +\right)$, vamos a definir otro producto (ahora, interno) de la siguiente manera:

$$(x,y) \cdot (u,v) := (xu - yv, xv + yu).$$

Resulta de fácil comprobación que ahora $\left(\mathbb{R}^2, +, \cdot\right)$ es un cuerpo conmutativo, donde $(1,0)$ es el neutro o unidad para el producto y cada elemento (x,y) con x o y no cero admite un inverso (u,v) de la forma

$$u := \frac{x}{x^2+y^2}, v := \frac{-y}{x^2+y^2}.$$

A este cuerpo conmutativo lo llamaremos cuerpo de los números complejos, pues a sus elementos los llamaremos (números) complejos, y lo denotaremos por $\mathbb{C}$.

Observemos que la aplicación $a \to (a,0)$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, es un monomorfismo de cuerpos y, por ello, podemos identificar $\mathbb{R}$ con una parte de $\mathbb{C}$ y escribir $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$, haciendo la identificación $a \equiv (a,0)$. Con ello, podemos ver que no hay confusión posible entre las expresiones $a(x,y)$ y $(a,0)(x,y)$:

$\star$ $a(x,y) := (ax, ay)$, visto $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio;

$\star$ $(a,0)(x,y) := (ax - 0y, ay + 0x) = (ax, ay)$, visto $\mathbb{C}$ como cuerpo.

Este hecho nos permite una primera representación de los complejos vistos como elementos de un $\mathbb{R}$-espacio:

$$(x,y) = (x,0) + (0,y) = x(1,0) + y(0,1),$$

y, denotando por $i := (0,1)$, a la vez que usamos la identificación anterior de $\mathbb{R}$ con una parte de $\mathbb{C}$, tendremos la llamada forma binómica del número complejo (x,y):

$$x + iy,$$

mientras que a la otra, a (x,y), se le suele llamar forma cartesiana. Observemos que estas expresiones vienen dadas de manera única.

Definición. Dado un número complejo $z \in \mathbb{C}$, a los números reales x e y, que existen de manera única para tal z, verificando $z = x + iy$, se les llama, respectivamente partes real e imaginaria del complejo z; y se escribe

$$\operatorname{Re} z = x, \qquad \operatorname{Im} z = y.$$

Es claro que si $z, w \in \mathbb{C}$, entonces

$$z = w \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re} z = \operatorname{Re} w \\ \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w \end{cases}$$

En el cuerpo $\mathbb{C}$ no es posible introducir ningún orden (total) que lo haga cuerpo conmutativo totalmente ordenado; es decir, no podemos definir ningún orden total compatible con las propiedades de cuerpo conmutativo. En efecto: si por el contrario así fuese, tendríamos que $ii = i^2 > 0$, siendo $i^2 = -1$. Por otro lado, sabemos que ha de ser $-1 < 0$ (pues $1 = 1^2 > 0$). Luego no es posible definir un orden total en $\mathbb{C}$ compatible con su estructura de cuerpo.

En $\mathbb{C}$ también existe un automorfismo, llamado conjugación, que notaremos por $z \to \overline{z}$, y que viene dado por

$$\overline{z} := \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z.$$

Podemos pensar en la conjugación, evidentemente, como una inversión de $\mathbb{C}$, visto como plano, respecto de su eje "real". Esta propiedad de la conjugación, junto a otras, de demostración inmediata todas ellas, la enuncia mos en la

Proposición. Para $z, w \in \mathbb{C}$, se tienen:

- **i.** $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- **ii.** $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
- **iii.** $\overline{\overline{z}} = z$ (el automorfismo es involutivo).
- **iv.** $\operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2}, \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{i2}$.
- **v.** $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im} z = 0$.

Si R es una función racional en las variables reales x e y, con coeficientes reales, se observa que $\overline{R(z, \overline{z})} = R(\overline{z}, z)$. Luego

$$R(z, \overline{z}) \in \mathbb{R}, \forall z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow R(x, y) = R(y, x).$$

Otra función que consideraremos, importantísima a la postre, es el módulo o valor absoluto de un número complejo. Representa la distancia del complejo z al origen:

Definición. Para cada $z \in \mathbb{C}$, se define su módulo o valor absoluto como

$$|z| := \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z\overline{z}}.$$

Una vez más, la notación es coherente con la empleada en $\mathbb{R}$, pues si $z \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$:
$\star$ $|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2} = \sqrt{z^2}$ (por ser $z \in \mathbb{C}$);
$\star$ $|z| = \sqrt{z^2}$ (por ser $z \in \mathbb{R}$).

Proposición. Para $z, w \in \mathbb{C}$, se tienen:

i. $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$.
ii. $|z| = |\overline{z}| = |-z|$.
iii. $|zw| = |z|\,|w|$.
iv. $|z \pm w|^2 = |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\overline{w})$.
v. $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

La propiedad iv. se sigue del hecho de que $\operatorname{Re}\alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \overline{\alpha})$:

$$\begin{aligned} |z \pm w|^2 &= (z \pm w)\left(\overline{z \pm w}\right) = \\ &= z\overline{z} + w\overline{w} \pm z\overline{w} \pm w\overline{z} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 \pm 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \end{aligned}$$

De iv. también se desprende la conocida como Identidad del Paralelogramo:

Corolario. Para $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2\left(|z|^2 + |w|^2\right).$$

Su demostración es evidente: consiste en sumar las expresiones de iv. para los correspondientes signos "+" y "-".

Lo realmente complicado lo encontramos en la segunda desigualdad en v., que precisa del siguiente resultado, (ya conocido en el contexto real y) clave en todo lo que sigue:

Desigualdades triangulares. Para $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene:

i. $|z + w| \leq |z| + |w|$.
ii. $||z| - |w|| \leq |z - w|$.

Demostración. Hacemos cálculos para z, w complejos arbitrarios:

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\overline{w})| \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| \leq (|z| + |w|)^2, \end{aligned}$$

de donde, al extraer raíces cuadradas en ambos miembros, se deduce i. Para probar ii., basta observar que

$$|z| = |(z - w) + w| \leq |z - w| + |w| \Longrightarrow |z| - |w| \leq |z - w|,$$

donde hemos aplicado i. Alternando ahora los papeles de z y w, se tiene que

$$|w| - |z| \leq |w - z| = |z - w|,$$

y, por tanto, se concluye la prueba. ■

A continuación introducimos un concepto clave en variable compleja y que está en la base de su "distanciamiento" del análisis real con el que estamos familiarizados hasta ahora. Nos referimos al inicialmente "inocente" argumento de un número complejo: el concepto de multifunción y, por ende, el de ramas de una función, lo tendrán en su base.

Del análisis real tomamos el siguiente

Lema. Para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$, existe un único $\theta \in]-\pi, \pi]$ tal que

$$a = \cos\theta, b = \sin\theta.$$

Y, dado $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, podemos elegir convenientes $\rho > 0$ y $\theta \in]-\pi, \pi]$, tales que se puede representar

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) =: \rho e^{i\theta},$$

de manera única (en el sentido de que $\rho = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}$ y $\theta \in]-\pi, \pi]$).

Notación. Denotaremos por $\mathbb{T}$ a la circunferencia unidad $C(0, 1)$. Así, el lema anterior nos provee de una biyección entre el intervalo $]-\pi, \pi]$ y la circunferencia unidad. Observemos que podremos hacer uso de notaciones del estilo

$$\alpha + r\mathbb{T} = C(\alpha, r).$$

Definición. Diremos que el número real θ es un argumento del complejo no nulo z, si

$$z = |z| e^{i\theta},$$

y escribiremos

$$\operatorname{Arg}(z) := \left\{\theta \in \mathbb{R} : z = |z| e^{i\theta}\right\}.$$

Observamos, inmediatamente, que si θ_1 y θ_2 son argumentos de z entonces existe un (único) $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta_1 - \theta_2 = 2k\pi$. Su recíproco es también, trivialmente, cierto. (Observemos, igualmente, que el lema anterior es quien garantiza que $\operatorname{Arg}(z) \neq \emptyset$.) Por esta razón, uno de ellos va a jugar un papel importante:

Definición. Llamamos argumento principal del complejo no nulo z al único de sus argumentos θ_0 tal que $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$. Lo denotaremos por $\arg(z)$, y se acostumbra a escribir

$$\operatorname{Arg}(z) = \{\arg(z) + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}.$$

Para el cálculo del argumento principal es muy cómoda la fórmula que nos proporciona la siguiente

Proposición. Si $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, entonces

$$\arg(z) = \begin{cases} 2\arctan \frac{\operatorname{Im} z}{|z|+\operatorname{Re} z} ..., & z \notin \mathbb{R}^- \\ \pi ..., & z \in \mathbb{R}^- \end{cases}$$

Demostración. Para $z \in \mathbb{R}^-$, entonces

$$z = -|z| = |z|(-1 + i0) = |z|(\cos\pi + i\sin\pi) = |z|\, e^{i\pi},$$

de modo que $\pi \in \operatorname{Arg}(z)$, siendo, obviamente, $\pi \in \left]-\pi, \pi\right]$.

Consideremos ahora $z \notin \mathbb{R}^-$, y tomemos (a quién elegir ¡si no al candidato natural!):

$$\theta_0 := 2\arctan \frac{\operatorname{Im} z}{|z| + \operatorname{Re} z}.$$

Así, con

$$\theta_0 := 2\arctan \frac{\frac{\operatorname{Im} z}{|z|}}{1 + \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}} =: 2\arctan \frac{b}{1+a},$$

se sigue que

$$\tan\frac{\theta_0}{2} = \frac{b}{1+a}.$$

Pero esto conlleva que

$$\begin{cases} \sin\theta_0 = 2\frac{\tan\frac{\theta_0}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta_0}{2}} = b \\ \cos\theta_0 = \frac{1-\tan^2\frac{\theta_0}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta_0}{2}} = a \end{cases}$$

de donde (por ser $|z| + \operatorname{Re} z > 0 \Longrightarrow \arctan \frac{\operatorname{Im} z}{|z|+\operatorname{Re} z} \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$) se tiene

$$z = |z|(\cos\theta_0 + i\sin\theta_0) = |z|\, e^{i\theta_0},$$

con $\theta_0 \in \left]-\pi, \pi\right]$; luego $\theta_0 = \arg(z)$. **Q.E.D.**

Proposición. La aplicación $z \to \operatorname{Arg}(z)$, de $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, es un homomorfismo del grupo multiplicativo $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ en el aditivo $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$; es decir, si $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ entonces, se tiene:

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg}(z) + \operatorname{Arg}(w).$$

Demostración. Sea $\varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$. Sea (también arbitrario) $\theta_2 \in \operatorname{Arg}(w)$. Escribimos $\varphi = (\varphi - \theta_2) + \theta_2$ y hacemos cálculos:

$$\begin{aligned} zw &= |zw|\, e^{i\varphi} = |zw|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \\ &= |zw|\{\cos[(\varphi-\theta_2)+\theta_2] + i\sin[(\varphi-\theta_2)+\theta_2]\} \\ &= |zw|\{\cos(\varphi-\theta_2)\cos\theta_2 - \sin(\varphi-\theta_2)\sin\theta_2 + \\ &\quad +i[\sin(\varphi-\theta_2)\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos(\varphi-\theta_2)]\} \\ &= |z|\{\cos(\varphi-\theta_2) + i\sin(\varphi-\theta_2)\}\,|w|\{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\} \\ &= |z|\, e^{i(\varphi-\theta_2)}\,|w|\, e^{i\theta_2}, \end{aligned}$$

de donde $\theta_1 := \varphi - \theta_2 \in \text{Arg}(z)$ y, por tanto, $\varphi = (\varphi - \theta_2) + \theta_2 \in \text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)$.

Recíprocamente, sean dados $\theta_1 \in \text{Arg}(z)$ y $\theta_2 \in \text{Arg}(w)$. Por análogos cálculos a los recién realizados:

$$zw = |zw| \, e^{i(\theta_1 + \theta_2)},$$

luego $\theta_1 + \theta_2 \in \text{Arg}(zw)$. **Q.E.D.**

Proposición. Destacamos las siguientes propiedades:

i. $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \Longrightarrow \text{Arg}\left(z^{-1}\right) = -\text{Arg}(z)$

ii. $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \Longrightarrow \text{Arg}(\overline{z}) = -\text{Arg}(z)$

iii. $z, w \in \mathbb{C}\backslash\{0\} \Longrightarrow \text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)$

iv. (fórmula de de Moivre) Para cada natural n,

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

Sólo la última propiedad precisa de alguna explicación. Si $z = \cos\theta + i\sin\theta$, entonces

$$\text{Arg}(z^n) = n \arg(z) + 2\pi\mathbb{Z} = n\theta + 2\pi\mathbb{Z},$$

de donde $z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$. **Q.E.D.**

A continuación vamos a introducir las potencias de base z compleja y exponente $\frac{p}{q}$ racional. Para ello, comenzamos dando una definición, la de raíces n-ésimas de z, y un resultado relativo a ellas que nos garantiza su existencia y en qué número.

Definición. Dados $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, llamamos raíz n-ésima de z a cualquier complejo w tal que $w^n = z$.

Teorema. Si $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces:

i. $z = 0 \Longrightarrow \exists! w : w^n = 0$; a saber, $w = 0$.

ii. $z \neq 0 \Longrightarrow \exists w_1, ..., w_n : w_k^n = z$, si $k = 1, ..., n$.

Demostración. La primera de las afirmaciones es evidente sin más que observar que $0^n = 0$ y que $w \neq 0$ conlleva $w^n \neq 0$ para $n \in \mathbb{N}$.

Sean ahora $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ y w (que también será no nulo) tal que $w^n = z$. La fórmula de de Moivre nos dice que

$$\begin{aligned} w^n &= |w|^n \left(\cos\left[n \arg(w)\right] + i \, \sin\left[n \arg(w)\right]\right) \\ z &= |z| \left(\cos\left[\arg(z)\right] + i \, \sin\left[\arg(z)\right]\right); \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{cases} |w|^n = |z| \\ n \; \text{Arg}(w) = \; \text{Arg}(z), \end{cases}$$

y, por tanto,

$$\begin{cases} |w| = \sqrt[n]{|z|} \\ \arg(w) = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \text{ para algún } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pero, ¿cuántos argumentos resultan para w al recorrer k todos lo enteros? Tendremos

$$\theta_1, \theta_2 \in \operatorname{Arg}(w) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} : \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi.$$

Así,

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n} = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k'\pi}{n} \Leftrightarrow \frac{k-k'}{n} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k = k' \text{ (mód } n),$$

luego

$$k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\},$$

de modo que $z \in \mathbb{C} \backslash \{0\}$ posee n raíces n-ésimas; a saber:

$$w_k : \begin{cases} |w_k| = \sqrt[n]{|z|} \\ \arg(w_k) = \frac{\arg(z)}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

distintas dos a dos y equidistribuidas sobre la circunferencia $C\left(0, \sqrt[n]{|z|}\right)$ de centro 0 y radio $\sqrt[n]{|z|}$. **Q.E.D.**

Definición. Sean $z \in \mathbb{C}$ y $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (expresión irreducible, con $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$). La potencia de z con exponente $\frac{p}{q}$ se define como

$$z^{\frac{p}{q}} := \left(\sqrt[q]{z}\right)^p,$$

con la salvedad de que ha de ser $z \neq 0$ cuando $p \in -\mathbb{N}$.

Es de sencilla comprobación que $z^{\frac{p}{q}}$ consta de q elementos si $z \neq 0$, y que sólo tiene un elemento si $z = 0$. Caso de especial atención será el que prestemos a las raíces n-ésimas de la unidad; es decir, los complejos z tales que

$$z^n = 1.$$

Es de demostración inmediata, a partir del teorema anterior, que la unidad tiene sus n raíces equidistribuidas sobre la circunferencia unidad $\mathbb{T}$:

Proposición. Para cada natural n existen $w_1, w_2, ..., w_n \in \mathbb{T}$, distintos dos a dos, tales que $w_k^n = 1$, $k = 0, 1, ..., n-1$. Concretamente:

$$w_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}.$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Realice las operaciones indicadas:

$$\text{a. } \tfrac{1}{i}; \qquad \text{b. } \tfrac{1-i}{1+i}; \qquad \text{c. } \tfrac{2}{1-3i}; \qquad \text{d. } \left(1-i\sqrt{3}\right)^3.$$

2. Encuéntrense las partes real e imaginaria de $\left(1+e^{i\theta}\right)^{-1}$.

3. Obténganse:

$$\text{a. } (1+i)^{16}; \quad \text{b. } \sum_{k=0}^{100} i^k; \quad \text{c. } \left(2+i2\sqrt{3}\right)^9.$$

4. Obtenga el módulo y el argumento de cada uno de los siguientes complejos:

a. $3i$;	b. -2;	c. $1+i$;	d. $-1-i$;
e. $2+5i$;	f. $2-5i$;	g. $-2+5i$;	h. $-2-5i$;
	j. $bi \quad (b \neq 0)$;	k. $a+bi \quad (a \neq 0)$.	

5. En este ejercicio se probará que el cuerpo de los números complejos se puede identificar con una parte del espacio vectorial real $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ de las matrices cuadradas de orden dos: sea el conjunto

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \text{ números reales} \right\},$$

a cuyos elementos notaremos, sugerente y simplificadamente, por $M(a,b)$.

(a) Determínese la suma y el producto para cada dos elementos de M.

(b) Pruébese que, en particular, se tienen

$$\begin{aligned} M(a,0)+M(b,0) &= M(a+b,0) \\ M(a,0)M(b,0) &= M(ab,0) \end{aligned}$$

(c) Identifíquese el cuerpo de los reales con una parte de M.

(d) Pruébese que $M(0,1)^2 = M(-1,0)$ ($= -1$, con la identificación de arriba en c.).

(e) Hágase $M(0,1) := i$, y pruébese que $M(a,b) = a+bi$.

6. Encuéntrense fórmulas para sumar las expresiones siguientes:

(a) $1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos n\theta$

(b) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta+\cdots+\sin n\theta$

(c) $\cos\theta+\cos 3\theta+\cdots+\cos 2(n+1)\theta$

7. Dados dos números complejos cualesquiera z, w,

(a) pruébese que $|z+w| = |z| + |w|$ si, y sólo si, $z\overline{w}$ es un número real no negativo;

(b) discútase la posibilidad de que se alcance la igualdad en la desigualdad

$$||z| - |w|| \leq |z - w|\,.$$

8. Obténganse interpretaciones geométricas para los siguientes conjuntos de números complejos:

   (a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |2z+3| \leq 1\}$

   (b) $A = \{z \in \mathbb{C} : |2z+1| \leq |z|\}$

9. Sean A, B, C, D números reales sujetos a la condición $A^2 + B^2 + C^2 > D^2$. Pruébense que:

   (a) La ecuación

   $$A\,(z+\overline{z}) + iB\,(\overline{z} - z) + C\,(\overline{z}z - 1) + D\,(\overline{z}z + 1) = 0$$

   representa: una recta en el plano, caso de que $C + D = 0$; una circunferencia, de centro y radio a determinar, en el caso de que $C + D \neq 0$. ("Cincunrecta" de parámetros reales A, B, C, D, de ahora en adelante.)

   (b) Toda circunrecta en el plano responde a una ecuación de la forma dada arriba, para convenientes números reales A, B, C, D.

10. Sean α, β complejos y $k > 0$. Entonces, el conjunto de números complejos

    $$\{z \in \mathbb{C} : |z - \alpha| = k\,|z - \beta|\}$$

    es una circunferencia si $k \neq 1$ y es una línea recta cuando $k = 1$.

11. Sea $z = x + iy$ un número complejo no nulo. Pruébese que el argumento principal de z viene dado por la fórmula

    $$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} - \pi, & \text{si} \quad x < 0, y < 0 \\ -\pi/2, & \text{si} \quad x = 0, y < 0 \\ \arctan\frac{y}{x}, & \text{si} \quad x > 0 \\ \pi/2, & \text{si} \quad x = 0, y > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi, & \text{si} \quad x < 0, y \geq 0 \end{cases}$$