Tema 0: Introducción al curso de Análisis Complejo

Facultad de Ciencias Experimentales, Curso 2008-09

Enrique de Amo, Universidad de Almería

Estos apuntes sobre Teoría de Funciones de una Variable Compleja han sido elaborados desde dos referentes:

a. La forma en la me fue enseñada y la aprendí en la Universidad de Granada;

b. La experiencia docente de los tres últimos años en los que la he impartido en la Universidad de Almería (cursos 2005-06 a 2007-08).

Se puede decir, sin temor a equivocarse, que el curso de Análisis Complejo es uno de los más "cerrados" de la Licenciatura de Matemáticas: *cualquier sucesión de resultados que en él expongamos nos lleva* al Teorema de Riemann de Representación Conforme: para todo dominio (abierto y conexo) propio del plano y todo punto arbitrario suyo, existe una única biyección holomorfa con inversa holomorfa entre él y el disco unidad llevando dicho punto al origen. Será el más bello colofón a todo un año de trabajo.

Es también la forma clásica en la que se establecen los contenidos en las Universidades arriba citadas y en casi todo texto que se conciba para dar un curso académico en una variable compleja. (Véase, por ejemplo, el texto ¡excelente! de Ash y Novinger, disponible en la red y citado en la Bibliografía.)

Creemos acertado plantear el curso como un recorrido natural que nos va acercando a diferentes problemas aparentemente independientes cuyas verificaciones resultan ser equivalentes; entre otros:

a. la existencia de primitiva (para una función holomorfa);

b. la existencia de raíz cuadrada holomorfa (para una función holomorfa);

c. que toda función armónica sea la parte real de una función holomorfa;

d. que los conjuntos abiertos y conexos (dominios) del plano complejo no tengan agujeros;

e. que las funciones holomorfas (o analíticas) sean límite de polinomios (en la llamada topología uniforme sobre compactos).

Los teoremas de tipo Cauchy, la versiones local (para dominios estrellados) y la general (para ciclos nulhomólogos) serán las herramientas principales para lograr el cuerpo de esta teoría, como ya hemos dicho, tan bien elaborada con el paso del tiempo (¡y del esfuerzo de tantos matemáticos!).

Los contenidos que aquí se presentan aspiran a ser material suficiente para los quince créditos de los que dispone este curso. No obstante, algunos temas que no se presentan, por limitaciones de espacio, dejan cierto sabor a renuncia, pues los podemos también considerar contenidos básicos.

En particular, nos referimos a la renuncia a todo lo relativo a Prolongación Analítica (Teorema de Monodromía). Sin embargo, tampoco andamos faltos de justificación (además de la clásica y socorrida de "un curso de estas características..."): esta teoría presenta una conexión natural (vía dominios de holomorfía) para las teorías de las funciones analíticas de una y de varias variables complejas (desembocando en la teoría de las superficies de Riemann) y, por tanto, sería material excelente para unos estudios de post-grado, si así se estimara.

Del mismo modo, y con el mismo alcance de un post-grado, destacamos la renuncia al estudio de las funciones elípticas. Se trata de un aspecto clásico que no deje de ser actual con sus aplicaciones en la Teoría Analítica de Números.

1 Un recorrido por los antecedentes

Vamos a estudiar, en este curso, los contenidos que le son propios al análisis (procesos de convergencia o límite coherentes con la estructura de cuerpo) sobre el conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Estos entes matemáticos, los complejos, aparecen, por vez primera, en textos de mediados el S.XVI (siempre en relación con problemas donde era preciso encontrar solución a determinadas ecuaciones), pero no se desarrollarán plenamente hasta los SS. XVIII y XIX.

Nombres de una docena de matemáticos famosos asociados a alguno de estos dos periodos son:

a) Nicolás Fontana, conocido como Tartaglia, 1500-1557
b) Rafael Bombelli, 1526-1573
c) Jerónimo Cardano, 1501-1576
d) Renato Descartes, 1596-1650
e) Godofredo Guillermo de Leibniz, 1646-1716
f) Leonardo Euler, 1707-1783
g) Gaspar Wessel, 1745-1818
h) Juan Roberto Argand, 1768-1833
i) Carlos Federico Gauss, 1777-1855
j) Augusto Luis Cauchy, 1789-1857
k) Jorge Federico Bernardo Riemann, 1826-1866
l) Carlos Weierstrass, 1815-1897

Al igual que el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales “aparece” con la necesidad de contar en el ser humano, el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros con el intercambio en los negocios, el de los racionales, $\mathbb{Q}$, con la transmisión de herencias y, finalmente, el cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales ante la elevación del pensamiento humano que quería calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado, podríamos pensar que la superación del espíritu matemático, en el deseo de resolver ecuaciones tan inocentes como las de la forma

$$x^2 + 1 = 0, \text{ o bien } x^2 + 2x + 2 = 0, \qquad (1)$$

es quien ha llevado a la introducción del conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos.

Ciertamente, el hecho de que

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

siga siendo solución formal de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (2)$$

con $a, b, c \in \mathbb{C}$ (lo cual nos hace contemplar a $x = \pm\sqrt{-1}$ y a $x = 1 \pm \sqrt{-1}$, respectivamente, como parejas de soluciones de las dos ecuaciones citadas en (1)) sea motivo suficiente en muchísimos textos de la literatura sobre variable compleja para autores de reconocido prestigio, puede consolar nuestro deseo de saber "por qué" es necesario introducir un nuevo conjunto para hacer Análisis, ahora "Analisis Complejo".

Sin embargo, nos parece más oportuno "echar mano" de las ecuaciones cúbicas, reducibles todas ellas a expresiones de la forma

$$x^3 = 3px + q, \qquad (3)$$

con $p, q \in \mathbb{R}$, para justificar, desde un punto de vista que supere el mero prurito matemático de "construcción del edificio matemático", esta nueva extensión numérica. En efecto, recuperemos la ecuación cuadrática (2).

Observamos que, reescribiéndola convenientemente, podemos verla como la solución del problema de en qué puntos x se cortan una parábola y una recta:

$$x^2 = mx + n. \qquad (2')$$

Es evidente que tal problema ofrece tres soluciones (igualmente plausibles), a saber:

a) hay dos puntos de corte: situación $b^2 > 4ac$, o bien $m^2 > -4n$,

b) hay una única solución: cuando $b^2 = 4ac$, o bien $m^2 = -4n$, y

c) no existe solución, porque no se cortan parábola y recta; lo cual ocurre cuando $b^2 < 4ac$, o bien $m^2 < -4n$.

Por ello, podríamos decir que la búsqueda de "soluciones", forzando la aparición de lo que querríamos que fuesen nuevos números, es casi artificial o puramente estética a la luz de este argumento. (Podríamos pensar en un error histórico esta concepción del origen y necesidad de los complejos. No obstante, han sido tantos, y tan buenos, matemáticos los que así lo han justificado en sus textos, que humildad obliga.) Sin embargo, sí que nos parece acertado, como hace algún que otro autor en la bibliografía consultada, el recurso a la ecuación cúbica (3).

En efecto: ahora se trata del corte de las curvas

$$y = x^3 \qquad \text{e} \qquad y = 3px + q;$$

¡de las cuales sabemos que siempre existe, al menos, una solución!

En la búsqueda de dicha solución para la ecuación cúbica (3), Cardano (para quien los complejos "eran -sólo- una herramienta que se usa cuando es útil") publicaba en 1545, en su *Artis Magnæ*, un resultado debido a Tartaglia (del cual no daba honrado reconocimiento... posiblemente, porque la fórmula se la habían "sacado", tanto uno como el otro, a un tercero -que pudo ser Escipión del Ferro, al menos, para una versión especial de esta fórmula):

$$x = \left(q + \sqrt{q^2 - p^3}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(q - \sqrt{q^2 - p^3}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (4)$$

sería una solución de la cúbica (3). (Y Ferrari, un estudiante de Cardano, la extendió a la solución por radicales de polinomios de cuarto grado.)

Bombelli (para quien en su obra L'Algebra afirmaba -de los números complejos-que "parecen descansar más en lo sofisticado que en la verdad") se dió cuenta de que aunque podía ocurrir que $q^2 < p^3$ -y dejar de tener sentido (4)- la discusión geométrica anterior -que justifica siempre la existencia de al menos una solución para (3)- seguía siendo válida... y dos siglos antes de que la Matemática se "acostumbrara" a ver los complejos como puntos del plano, se atrevió a hacer el siguiente razonamiento que, de paso, establecía las bases para el cálculo con números complejos.

Veamos en qué consiste lo que se puede llamar el "pensamiento salvaje" de Bombelli: trabajando con el ejemplo

$$x^3 = 15x + 4, \qquad (3')$$

obtiene, según (4), el valor

$$x = (2 + i11)^{\frac{1}{3}} + (2 - i11)^{\frac{1}{3}} \qquad (5)$$

como solución formal de dicha ecuación, donde hemos escrito $i := \sqrt{-1}$. Pero notemos que $x = 4$ es una solución (real) de la ecuación (3'). Pues bien, su "pensamiento salvaje" fue suponer que la solución real $x = 4$ se puede "recuperar" a partir de (5): puede existir un real n tal que

$$\begin{array}{c} \sqrt[3]{2 + i11} = 2 + in \\ \sqrt[3]{2 - i11} = 2 - in. \end{array}$$

Con esta hipótesis de trabajo, el respeto a las reglas algebraicas obligaría a:

a) que la suma de expresiones de la forma $(u + iv)$y $(a + ib)$, con $u, v, a, b \in \mathbb{R}$, fuese dada por

$$(u + iv) + (a + ib) := (u + a) + i\,(v + b)\,;$$

e igualmente,

b) para el producto

$$(u + iv)\,(a + ib) := ua + i\,(va + ub) + i^2 vb,$$

donde dando valores $i^2 = -1$ y $n = \pm 1$, obtendríamos

$$(2 + ni)^3 = 2 \pm i11,$$

además de darle expresión formal a la suma y producto de números complejos dos siglos antes de que se pudieran interpretar como puntos del plano (con autores como Wessel, Argand o Gauss), así como una interpretación conveniente de la terminología y (la geometría) de las operaciones (suma y producto) entre ellos.

Precisamente, la expresión $i := \sqrt{-1}$ (introducida por Leibniz a partir del bautizo por Descartes de tales números como "imaginarios") cobra especial interés con Euler en el S.XVIII, cuando prueba la famosa fórmula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta,$$

que da, entre otras cosas, la maravillosa relación

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

ligando los cinco números, sin duda, más famosos del Análisis. (Para Leibniz, "el número imaginario... es un anfibio entre el ser y el no ser".)

Pero, aunque pareciera que la intuición de un genio como Euler no le daría malas "pasadas", es oportuno llamar la atención sobre el siguiente argumento erróno, que subyace al hecho de que para Euler, expresiones como $\sqrt{-2}\sqrt{-3} = \sqrt{6}$, eran usadas sin la menor precaución:

$$-1 = i^2 = ii = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1,$$

lo cual sabemos que ¡no es bueno que sea cierto! (Evidentemente, ligerezas como la anterior sólo se le pueden permitir a genios como el de Euler; para otro cualquiera, sería un error de bulto...)

Sin embargo, la razón, en conjunción con la argumentación geométrica, puede ser la base de excelentes intuiciones que nos allanen muchos caminos.

En la base del error conceptual anterior nos vamos a encontrar con el hecho de la aparición de las llamadas multifunciones o funciones multiformes: funciones de variable compleja cuyo valor es todo un conjunto de números complejos; es decir, que su imagen no se reduce a un punto. La periodicidad de la función argumento es quien nos puede dar pistas al respecto, pues ahora no es momento de abundar en esto; salvo avanzar que elecciones convenientes de estas imágenes nos introducirán en el rico mundo de las superficies de Riemann... que escapan del alcance de este curso.

Aún restan algunas razones, muy poderosas, para optar por una estructura de cuerpo que incluya estrictamente al de los números reales. A continuación veremos una de ellas, la cual, por cierto, da pleno sentido a las palabras de Hadamard: "a menudo, el camino más corto entre dos verdades en el campo real pasa por el campo complejo".

Esta razón la encontramos en la teoría del desarrollo en series de potencias funcionales. Concretamente, para $x \in \mathbb{R}$, sabemos que

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \Leftrightarrow |x| < 1. \qquad (6)$$

A partir de ahí, podemos obtener

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} \qquad (7)$$

y

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n} \qquad (8)$$

siendo la validez de tales fórmulas para $|x| < 1$. Hasta cierto punto, a nadie habrá de sorprenderle tal radio de convergencia en (7)... sobre todo ¡si no ha olvidado lo estudiado en los cursos de Análisis Real!; pero, sí que es sorprendente lo que nos ocurre en (8): una función de clase infinito en toda la recta real, ¡cuya serie de potencias centrada en el origen no converge más allá de un radio 1!

Pensemos en los grafos respectivos (por comodidad, a priori, y pedagogía, a posteriori) de las funciones en (7) y (8) en valor absoluto. Hagamos ahora lo siguiente: vamos a desarrollar la función

$$x \to \frac{1}{a-x}$$

en su serie de potencias centrada en un punto $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, y $a > 0$ será su radio de convergencia. Así, haciendo el cambio $x = X - k$:

$$\frac{1}{a-x} = \frac{1}{a-(X-k)} = \frac{1}{a-k}\frac{1}{1-\frac{X}{a-k}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a-k)^{n+1}} X^n,$$

es decir,

$$\frac{1}{a-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a-k)^{n+1}} X^n \Leftrightarrow |X| < |a-k|.$$

Aplicando este resultado a $\frac{1}{1-x^2}$:

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} - \frac{1}{-1-x} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{(1-k)^{n+1}} - \frac{1}{(-1-k)^{n+1}} \right) X^n,$$

de donde $|X| < |1-k|$ y $|X| < |1+k|$; es decir,

$$R = \text{ radio de convergencia } = \min\{|1-k|, |1+k|\},$$

lo cual es razonable, por ser -1 y $+1$ polos de la función.

Pero ahora, vamos a aplicar el mismo estudio a la función $\frac{1}{1+x^2}$. Y nada extraño debería ocurrir..., salvo que, en este caso, se puede probar que

$$R = \sqrt{1+k^2}$$

¡Sorprendente! El radio de convergencia viene dado por la distancia de k a los puntos donde la serie no converge... que, en virtud del Teorema de Pitágoras, son los puntos $\pm i$. (El número R nos da, por tanto, la distancia a las unidades imaginarias desde k.)

Pues bien, la aplicación

$$z \to \frac{1}{1+z^2} \qquad (9)$$

es la (única) función que tiene a $\pm i$ como singularidades o polos. (El grafo de su valor absoluto es lo que se podría llamar "un doble hormiguero".)

Por tanto:

a) las secciones según los ejes imaginario o real, de la función compleja de variable compleja

$$z \to \frac{1}{1+z^2}$$

son completamente diferentes (ecuaciones (7) y (8));

b) si hacemos una rotación de 90^o en ella (es decir, multiplicamos por i, es decir, por $e^{i\pi/2}$), sería como considerar la función

$$z \to \frac{1}{1-z^2} \qquad (10)$$

en vez de la dada en (9); y, efectivamente, ahora los polos aparecen en 1 y -1. O dicho de otro modo, salvo un giro, las funciones (9) y (10) son, esencialmente, la misma... de lo cual sólo nos hemos podido cerciorar al acercarnos al cuerpo de los complejos.

Queremos llamar la atención sobre el hecho de lo que supondrá dotar de estructura de cuerpo a $\mathbb{R}^2$. La observación de la naturaleza de las aplicaciones f de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$ nos dirá cuán restrictiva será la definición “genuina” de una tal función compleja de variable compleja si partimos del hecho de considerarla como aplicación g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. En efecto. Si $z = x + iy$, entonces:

$$f(z) = f(x+iy) = g(x,y) = g\left(\frac{z+\overline{z}}{2}, \frac{z-\overline{z}}{i2}\right) \equiv g(z,\overline{z});$$

es decir, las funciones en dos variables reales genuinamente complejas son aquellas que no dependen de $\overline{z}$.

Para concluir esta primera parte de la introducción al cuerpo de los complejos, no queremos dejar de hacer -aunque sea de paso- el comentario, por su aplicación a otras ciencias, como la Física, la Ingeniería, etc., de lo poco que estos números tienen, “realmente”, de “imaginarios”.

Y cómo no, es importante destacar el papel que juegan a la hora de resolver integrales como

$$\begin{array}{ll} \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right) dx = \frac{\pi}{2} & \\ \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}, & a \in \,]0,1[\\ \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}, & a > 1 \end{array}$$

las cuales resultan de un cálculo muy complicado o imposible sólo con reales.

Hoy en día, los complejos cobran especial actualidad por el papel destacado que tienen en el estudio de los sistemas dinámicos que acompañan a la Teoría de los Fractales y el Caos. Por otro lado, a partir de los años 60 del siglo pasado, la teoría de varias variables complejas (que en nada supone un análogo a la situación en variable real: no es un mero elenco de resultados análogos que se verifican o dejan de verificarse...) ha cobrado un auge investigador de gran envergadura, siendo el lugar de encuentro de fecundas áreas del saber matemático más actual (geometría diferencial, análisis armónico, ecuaciones en derivadas parciales, etc.)... pero éso ya es para otro curso, al menos.

2 Un recorrido por los contenidos de este curso

El curso está concebido como todo un proceso, en el que partiendo del estudio de la geometría del plano $\mathbb{C}$, dotándolo de estructura de cuerpo y a través del estudio de las funciones f complejas de variable compleja que admiten desarrollo en serie de potencias, se logra la clasificación de los dominios (abiertos y conexos) del plano cuyo complementario no tiene componentes conexas acotadas, en dos grupos; a saber, sólo se pueden distinguir (vía isomorfismos) dos tipos de tales abiertos: el propio $\mathbb{C}$ y el disco unidad $\mathbb{D}$. Se trata del llamado teorema de Riemann de representación conforme.

Pero el camino será largo y estará lleno de momentos importantísimos. Vamos a detallarlos.

2.1 Capítulo 1: Funciones holomorfas. Teoría básica

Se presentan los personajes fundamentales del curso: el plano complejo $\mathbb{C}$, la esfera de Riemann o plano complejo ampliado $\overline{\mathbb{C}}$, y las funciones holomorfas (= derivables en abiertos) y las analíticas (= desarrollables en series de potencias); a la postre, las mismas (aunque de momento nos tendremos que contentar con que "analiticidad" $\Longrightarrow$ "holomorfía"). Se estudian las ecuaciones de Cauchy-Riemann para funciones diferenciables (sentido real) y las propiedades elementales de las series de potencias funcionales, respectivamente, para el estudio de aquéllas y éstas.

2.2 Capítulo 2: Funciones elementales complejas

Disponer del desarrollo en series de potencias resulta una máquina muy útil para producir funciones enteras que vayan más allá de los polinomios. Se extienden, gracias a esta herramienta, las funciones clásicas del análisis real: exponencial y las trigonométricas seno y coseno.

Será el momento privilegiado para observar cómo la consideración de sus recíprocas naturales no son funciones al uso: aparece el concepto de multifunción o función multiforme, y la necesidad de lo que llamaremos elección de ramas (holomorfas) uniformes de logaritmos y funciones potenciales.

Y se obtendrán resultados tan curiosos como que la imagen del plano por la exponencial es todo el plano salvo el origen; o bien, que se sigue verificando la igualdad fundamental de la trigonometría y, sin embargo pero sorprendentemente:

$$|\cos\alpha|^2 + |\sin\alpha|^2 \neq 1,$$

en general.

2.3 Capítulo 3: Aplicaciones conformes

El hecho de cuándo la diferenciabilidad real conlleva la derivabilidad compleja se resuelve completamente cuando nos detenemos en el estudio de una propiedad geométrica: la conservación de ángulos. Va resultar que este hecho es equivalente a que la función tenga determinante jacobiano no nulo.

Hacemos especial hincapié en los homeomorfismos de la esfera de Riemann: las transformaciones de Möbius y en cómo actúan éstas sobre las rectas y circunferencias del plano.

2.4 Capítulo 4: Teorema de Cauchy local. Primeras aplicaciones

Es el corazón del curso: aprece la integración sobre curvas, se caracteriza la existencia de primitiva, se ve la equivalencia entre holomorfía y analiticidad (Taylor: "holomorfía" $\Longrightarrow$ "analiticidad", al fin), se prueban las primeras versiones de los teoremas de Cauchy, y se estudia la topología conveniente para la clase de las funciones holomorfas, justificada en el comportamiento de las series de potencias funcionales. Se concluye viendo otra caracterización de las funciones holomorfas: aquellas que admiten una factorización análoga a los polinomios, ahora mediante productos infinitos.

2.5 Capítulo 5: Más propiedades locales de las funciones holomorfas

Las ecuaciones de Cauchy-Riemann "esconden" el papel de las partes real e imaginaria de una función compleja en la holomorfía de ésta. Ocurre que, por un lado, cuando la función sea holomorfa, ambas serán armónicas; y, por otro lado, para cada función armónica podremos probar que es, localmente, la parte real de una función holomorfa. Además, el hecho de que el grafo de $f : A \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ esté en $\mathbb{R}^4$ y no se pueda dibujar, se va a soslayar, gracias a las propiedades de extremo para funciones (sub)armónicas que, a su vez, nos darán el importantísimo principio del módulo máximo para funciones holomorfas.

El estudio del comportamiento local de una función (teoremas de la función inversa y de la aplicación abierta) es clásico en el análisis; también, cómo no, en el complejo. Se verá que las funciones holomorfas con derivada no nula son, de hecho, biyecciones locales biholomorfas.

Estas propiedades locales junto al estudio de la imagen de las funciones enteras (holomorfas en todo el plano) completan este capítulo, probándose que (teorema pequeño de Picard) no hay ninguna función entera (no constante) que deje de tomar más de un valor en su imagen (recuerda que: $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$):

2.6 Capítulo 6: Teorema de Cauchy global

La condición que se logra en los teoremas precedentes de Cauchy es de tipo geométrico: dominio estrellado. Queremos que la respuesta sea de tipo analítico: se hace necesario el concepto de índice de una curva cerrada respecto de un punto, y se logra el llamado teorema general de Cauchy.

2.7 Capítulo 7: Singularidades. Principio del argumento

Que una función analítica deje de serlo en algún punto... ¡puede llegar a ser interesantísimo! Fíjate, después de ver con Taylor que holomorfía y analiticidad son la misma cosa, ahora llega Laurent con desarrollos en series (indizadas éstas en $\mathbb{Z}$, ¡se nos queda pequeño $\mathbb{N}$!) que nos van a informar sobre la naturaleza del punto de no holomorfía. Y en particular, el término a_{-1} del desarrollo $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$, será la estrella invitada.

Aprenderemos, también, a calcular integrales y localizar los ceros de ciertas funciones en ciertos dominios.

2.8 Capítulo 8: Caracterización de los dominios simplemente conexos

Imagina el domino del plano que quieras; sólo debes restringirte a que no tenga "agujeros". Pues bien, si no has pensado en el propio $\mathbb{C}$ entonces... resulta que hay una infinidad de biyecciones biholomorfas que lo pueden transformar en el disco unidad $\mathbb{D}$. Este resultado de Riemann será el que nos ayude "a cerrar" el curso con un corolario que va a resumir, a modo de proposiciones equivalentes, los hechos fundamentales de todos los contenidos vistos este año.

Si el desarrollo temporal del curso lo permite, terminaremos probando que sobre los abiertos del plano, las funciones racionales son densas en la clase de las holomorfas: algo que le ocurrirá a los polinomios si, y sólo si, el abierto es $\mathbb{C}$ o isométrico a $\mathbb{D}$: una equivalencia más al corolario-resumen.

Nota. Las lecciones 4.7 y 8.4 están concebidas como respectivos colofones a cada cuatrimestre. La experiencia nos ha demostrado que la docencia es un ejercicio vivo y, por tanto, es material que se puede presentar o no, en función del desarrollo de cada año concreto.