PRÁCTICA 7.
Diagonalización.

1.- VALORES PROPIOS.

Para calcular los valores propios de una matriz cuadrada utilizamos el comando Eigenvalues[A]. Si se desea calcular el polinomio característico basta utilizar el comando Det[A - λIdentityMatrix[n]]

EJEMPLO
Encontrar los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN
Utilizamos el comando Eigenvalues
Eigenvalues[{{1+α,-α,α}, {2+α,-α,α-1},{2,-1,0}}]
y obtenemos como solución,
{-1, 1, 1}
por lo tanto los valores propios son
-1 con multiplicidad 1
1 con multiplicidad 2,

EJERCICIO
Calcular los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} a & a-1 & 1-a \\ a-2 & a & 2-a \\ a-2 & a-1 & 3-a \end{pmatrix}$$

NOTA
Dado que no hay un algoritmo que permita calcular, en general, las raíces de un polinomio de grado mayor o igual a 5, para matrices de este, tamaño se puede calcular una aproximación numérica de dichas raíces, con los comandos
Eigenvalues[A] // N o bien
N[Eigenvalues[A], k].

2.- VECTORES PROPIOS.

Para calcular los vectores propios asociados a los valores propios de una matriz cuadrada se usa el comando Eigenvectors[A].

EJEMPLO
Calcular los vectores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN
Usamos el comando "Eigenvectors"
Eigenvectors[{{1+α, -α, α}, {2+α,-α, α-1}, {2, -1, 0}}]
obtenemos como resultado,{{0, 1, 1}, {2, 3, 1}, {0, 0, 0}}
Para una matriz de tamaño n el comando Eigenvectors proporciona n vectores, añadiendo el vector nulo tantas veces como sea necesario. Los vectores no nulos son una familia de vectores propios linealmente independientes.
Sin embargo no se obtiene a qué valor propio corresponde cada vector propio, no nulo.

EJERCICIO
Estudiar si las siguientes matrices son diagonalizables, y en su caso obtener la forma diagonal y la matriz de paso:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

3.- SUBESPACIOS PROPIOS.

Para calcular los vectores propios asociados a una valor propio concreto podemos utilizar el comando Nullspace

EJEMPLO
Calcular los valores propios y los subespacios propios de la aplicación lineal f: $R^3 \to R^3$ cuya matriz en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

RESOLUCIÓN
Ya hemos calculado los valores propios de la matriz y son –1 con multiplicidad 1 y 1 con multiplicidad 2.
Para calcular una base del subespacio propio asociado al valor propio -1,

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha+1 & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha+1 & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0+1 \end{pmatrix}$$

cuya solución es {0, 1, 1}
Por lo tanto el subespacio propio asociado al valor propio -1 el es generado por el vector (0, 1, 1), para el valor propio 1,

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha-1 & -\alpha & \alpha \\ 2+\alpha & -\alpha-1 & \alpha-1 \\ 2 & -1 & 0-1 \end{pmatrix}$$

y obtenemos {2, 3, 1}
El subespacio propio asociado al 1 está generado por el vector (2,3,1). Los dos vectores propios linealmente independientes obtenidos son los mismos que calcula el comando Eigenvectors, pero en este caso sabemos a qué valor propio corresponden.

EJERCICIO
Calcular los valores propios y subespacios propios de la matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Analizar si es diagonalizable.