PRÁCTICA 5.
APLICACIONES LINEALES
1.- NÚCLEO DE UNA APLICACIÓN LINEAL.

Ya conocemos la utilización del comando NullSpace para determinar si un sistema de ecuaciones lineales tiene una o más de una solución. Recordemos que, NullSpace[A] donde A $\in M_{nxm}(R)$, calcula una base del subespacio vectorial de $M_{mx1}(R)$ de las soluciones de la ecuación matricial AX = 0.
Por lo tanto si A es la matriz de una aplicación lineal respecto a determinadas bases, NullSpace[A] nos proporciona una base del núcleo de la aplicación lineal (en coordenadas respecto de la base del espacio de partida que se ha utilizado para la matriz A).

** **

NOTA IMPORTANTE: LAS MATRICES SE ESCRIBEN POR COLUMNAS. VER EL SIGUIENTE EJEMPLO:

** **

EJEMPLO

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre R $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, de V y $\{w_1, w_2, w_3\}$ base de W. Supongamos que f: $V \rightarrow W$ es una aplicación lineal tal que

$f(v_1)=w_1+w_2-4\ w_3$
$f(v_2)=3\ w_1+w_2$
$f(v_3)=2\ w_1+w_2-2\ w_3$
$f(v_4)=w_1+2\ w_2$

Calcular una base del núcleo de f.

RESOLUCIÓN

En primer lugar calculamos la matriz de f en las bases dadas.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

y ahora usamos el comando

```
[NullSpace[{{1, 3, 2, 1}, {1, 1, 1, 2}, {-4, 0, -2, 0}}]
```

que nos da como

```
{{-1, -1, 2, 0}}
```

Esto significa que una base para el núcleo de f es,
$\{u = -v_1 - v_2 + 2\ v_3\}$

EJERCICIO

Sea f $R^3 \rightarrow R^4$, definida por
$f(x,y,z)=(x+z, y-z, x+y, x-y+2\ z)$
Encontrar una base del núcleo de f.

2.- IMAGEN DE UNA APLICACIÓN LINEAL
a) EL COMANDO Reduce

Dado un sistema de ecuaciones, con el comando
Reduce [{ecuaciones separadas por comas}, {variables separadas por comas}]
se puede encontrar bajo que condiciones exactamente el sistema tienen solución y cual es dicha solución.

EJEMPLO
Resolver el sistema de ecuaciones lineales
a=2x+y,
b=x-y
c=-x+3y
RESOLUCIÓN
Usamos el comando Reduce
```
Reduce[{a == 2  x + y, b == x - y, c == -x + 3  y}, {x, y}]
```
Se obtiene como solución
```
3 c == 2 a - 7 b && x == a + b/3
  y == 1/3 a - 2 b
```
La primera ecuación, que no involucra a las variables, es la condición compatibilidad del sistema mientras que las dos siguientes son la solución mismo cuando dicha condición se cumple.

b) UNA APLICACIÓN PRÁCTICA

Supuesto que las ecuaciones de una aplicación lineal f : V→W vienen dadas por la ecuación matricial AX = Y con A $\in M_{nxm}$; X $\in M_{mx1}$ e Y $\in M_{nx1}$ un vector w $\in$ W está en Im f si y sólo si, cuando Y es la matriz columna de las coordenadas de w, la ecuación matricial anterior tiene solución.

Por lo tanto podemos utilizar el comando Reduce para obtener las condiciones de, compatibilidad del sistema y así las ecuaciones del subespacio Im f.
Observa el siguiente ejemplo

EJEMPLO
Sea f R^3 R^4 definida por:
f(x,y,z)=(x+z, y-z, x+y, x-y+2 z)
Calcular Im f,
RESOLUCIÓN
Las ecuaciones de esta aplicación lineal son
a=x+z
b=y-z
c=x+y
d=x-y+2z
Así pues aplicamos el comando Reduce de la siguiente forma
```
Reduce[{x + z == a, y - z == b, x + y == c, x - y + 2  z == d}, {x, y, z}]
```
Como solución obtenemos
```
b == a - d && c == 2 a - d && x == a - z && y == a - d + z
```
Las dos primeras ecuaciones que sólo involucran a los "parámetros" a, b, c, d representan las condiciones de compatibilidad del sistema, son las ecuaciones que buscamos.
Las otras dos ecuaciones, que involucran a las incógnitas, son soluciones del sistema para el caso en que se cumplan las condiciones de compatibilidad anteriores.
Por lo tanto (a, b, c, d) $\in R^4$, está en Im f si y sólo si
b=a-d
c=2a-d,
o bien
a-b-d=0
2a-c-d=0,
lo que nos proporciona las ecuaciones cartesianas del subespacio Im f.

EJERCICIO

Sea f: $R^3 \rightarrow R^4$, la aplicación lineal definida por

$f(1,0,0)=(-1,-2,3,-2)$

$f(0,1,0)=(2,1,-2,4)$

$f(0,0,1)=(1,-4,5,2)$

Encontrar una base del subespacio Im f.