

PRÁCTICA 3.

ESPACIOS VECTORIALES I.

1.- NOTACIÓN VECTORIAL.

La forma de denotar los vectores utilizando sus coordenadas respecto de una base dada es $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Esta notación es la que se utiliza en la expresión matricial de los sistemas de ecuaciones lineales.

Las operaciones de un espacio vectorial se denotan $+$ para la suma y $\cdot$ un espacio para el producto de un escalar por un vector.

$$\{2, 4, -6, 0\} + \{-1, 5, 0, 3\}$$

$$\text{a } \{-1, 5, 0, 3\}$$

(* nótese que todas las operaciones se realizan con coordenadas de los vectores respecto de alguna base *)

2.- DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL.

Para estudiar si una familia de vectores es linealmente dependiente o independiente basta considerar sus coordenadas respecto de una base y estudiar el sistema de ecuaciones lineales obtenido de la combinación lineal igualada a cero.

En una práctica posterior estudiaremos un método alternativo que utiliza el cálculo del rango.

EJERCICIO .

Estudiar si los siguientes conjuntos de vectores linealmente dependientes o independientes.

a $(2, -1, 4), (4, 1, 8), (1, 0, 3)$ en $\mathbb{R}^3$

b $(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)$ en $\mathbb{R}^3$,

c $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}$ en M_2

d $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ en M_2

3.- CAMBIO DE BASE.

Para realizar un cambio de base en un espacio vectorial basta plantear y resolver el sistema de las ecuaciones de cambio de base. En una práctica posterior veremos un método alternativo que utiliza la inversión de matrices regulares.

EJERCICIO . Probar que los vectores

$$v_1 = (1, 1, 1)$$

$$v_2 = (1, 1, 2)$$

$$v_3 = (1, 2, 3)$$

son una base de $\mathbb{R}^3$ y calcular las coordenadas de $u = (6, 9, 14)$ respecto de dicha base.

EJERCICIO . En $\mathbb{R}^3$ se consideran los vectores

$$w_1 = (1, 2, 1)$$

$$w_2 = (1, 3, 2)$$

$$w_3 = (1, 1, 0)$$

$$w_4 = (3, 8, 5)$$

Obtener una subfamilia de $\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$ que sea linealmente independiente.

Llamamos B a dicha subfamilia y U al subespacio vectorial generado por ella. Así B es una base de U y $w_1, w_2, w_3, w_4 \in U$. Calcular sus coordenadas respecto de B .