

# PRÁCTICA 1

## ARITMÉTICA BÁSICA.

## MATRICES. DETERMINANTES.

### 1.- OPERACIONES ARITMÉTICAS ELEMENTALES

SUMA :  $x + y$   
DIFERENCIA :  $x - y$   
PRODUCTO :  $x*y$  o bien  $x y$   
DIVISIÓN :  $x/y$   
POTENCIA :  $x^y$

### 2.- CELDAS EVALUABLES

Esta celda y las anteriores son de texto sin embargo los ejemplos siguientes muestran celdas evaluables. Una celda evaluable contiene una o varias órdenes que el programa ejecuta pulsando simultáneamente Mayúscula + Intro o Intro en el teclado numérico. Prueba con los siguientes ejemplos.

### 3.- EJEMPLOS

4\*3-1 (\* se realizan las operaciones indicadas\*)  
4 3 + 4 5 (\* nótese el efecto del espacio \*)  
4 (3+5)  
4/2 - 1 (\* obsérvese la prioridad de las operaciones \*)  
4/(2 - 1) (\* nótese el efecto del paréntesis \*)  
2^3  
2^3^2 (\* nótese la prioridad de las operaciones \*)  
2^(3^2) (\* nótese el efecto del paréntesis \*)  
%+2 (\* % se refiere al resultado anterior \*)  
%%+3 (\* %% se refiere al penúltimo resultado \*)  
%4 (\* %n se refiere al resultado n-ésimo \*)

En una celda evaluable se puede incluir un texto usando los símbolos (\* al principio y \*) al final

### 4.- TIPOS DE NÚMEROS

#### NÚMEROS ENTEROS:

Las operaciones se realizan de forma exacta independientemente del tamaño del resultado. La única limitación es la memoria del ordenador. Evalúa el siguiente ejemplo.

$2^{4000}$

#### NÚMEROS RACIONALES:

En las operaciones con números racionales el resultado se expresa de forma exacta con notación racional.

$2/3 - 3/5 * 5/2$

#### NÚMEROS IRRACIONALES

El programa representa los números irracionales de forma exacta mediante constantes simbólicas

Sqrt[2] (\* Sqrt es la función raíz cuadrada y la expresión anterior es la forma de evaluar una función, en este caso Sqrt, en el punto 2 \*)

#### NÚMEROS COMPLEJOS

La representación de los números complejos es

$$a + b I$$

La aritmética compleja se expresa de la misma forma descrita anteriormente.

$$(2 - 3 I) * ((1 - I) / (-1 + 2 I))$$

## 5.- DISTINTA PRECISIÓN EN EL CÁLCULO.

#### NÚMEROS RACIONALES

Si en una operación con racionales se utiliza la expresión decimal de alguno de ellos, el resultado se expresa con notación decimal.

$$3/4 + 2/3 + 0.5$$

#### NÚMEROS IRRACIONALES

Para obtener aproximaciones decimales de números irracionales puede utilizarse `// N`, que calcula algunas cifras decimales, o bien, `N[expresión, n]` que calcula `n` dígitos de la expresión.

```
Sqrt[2] // N  
N[Sqrt[2], 200]
```

## 6. – MATRICES.

### a) NOTACIÓN MATRICIAL

1. La forma de denotar una matriz es escribir sus FILAS entre llaves y separadas por comas, cada fila, a su vez, es una lista de valores entre llaves separados por comas, como en el siguiente ejemplo.

```
A = {{1, 2, 0}, {0, -1, 1}, {3, 1, 1}}  
(* en este caso se trata de una matriz cuadrada de tamaño 3, que hemos denotado por A *)
```

2. EL comando `MatrixForm` permite visualizar una matriz en forma de tabla.

```
MatrixForm[A] (* observa el uso de los corchetes *)  
MatrixForm[{{1, 2, 0}, {0, -1, 1}, {3, 1, 1}}] (* esta es otra forma *)
```

### b) MATRICES ESPECIALES

1. La matriz unidad de cualquier tamaño pueden denotarse de la siguiente forma.

```
IdentityMatrix[2] (* el número entre corchetes es el tamaño de la matriz *)
```

2. También puede escribirse de forma sencilla una matriz diagonal.

```
DiagonalMatrix[{Pi, Pi/2, Pi/4}]  
(* los valores entre corchetes son los de la diagonal principal *)
```

### c) OPERACIONES ELEMENTALES CON MATRICES

#### i) SUMA DE MATRICES DEL MISMO TAMAÑO

Para sumar dos matrices que tienen que ser de igual tamaño se usa `+`.

```
M1 = {{a, b}, {c, d}};  
M2 = {{1, 2}, {3, 4}};  
M1 + M2 = {{a, b}, {c, d}} + {{1, 2}, {3, 4}}
```

#### ii) PRODUCTO DE UNA MATRIZ POR UN ESCALAR

Para multiplicar una matriz por un escalar se usa el comando \*.

$2*\{a, b\}, \{0, 1\}$

### iii) PRODUCTO DE MATRICES

Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera tienen que ser igual al número de filas de la segunda se usa el comando.

$\{a, 0, -1\}, \{b, 1, 0\} . \{1, 0, 0\}, \{a, b, 1\}, \{-1, 0, 1\}$

### iv) PRODUCTO DE MATRICES

Cuando se multiplican dos matrices y una de ellas consta de una sola fila o una sola columna puede utilizarse una notación alternativa. Para denotar una matriz de estas características basta escribir sus valores entre llaves separados por comas, tanto para matrices fila como para matrices columna. Esta es, en realidad, la notación de las coordenadas de un vector y para el producto de este tipo de matrices produce el mismo resultado que si se realiza como en el caso general.

$\{1, 2, 0\}, \{2, 0, -1\} . \{a\}, \{b\}, \{c\}$   
 $\{1, 2, 0\}, \{2, 0, -1\} . \{a, b, c\}$   
 $\{a, b\} . \{1, 2, 0\}, \{2, 0, -1\}$   
 $\{a, b\} . \{1, 2, 0\}, \{2, 0, -1\}$

## 7.- EL COMANDO Det.

Para calcular el valor de un determinante se utiliza el comando Det

### EJEMPLO

Calcular el siguiente determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 9 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 4 & 6 & -7 & 1 \end{vmatrix}$$

### RESOLUCIÓN

Basta utilizar el comando Det Fíjate en la notación

$\text{Det}[\{1, 4, -3, -7\}, \{2, 0, 4, 9\}, \{1, -1, 1, -3\}, \{4, 6, -7, 1\}]$   
el resultado es  
627

### EJERCICIO

Calcular los siguientes determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 12 & 123 & 1234 \\ 2 & 23 & 234 & 2341 \\ 3 & 34 & 341 & 3412 \\ 4 & 41 & 412 & 4123 \end{vmatrix}$$
$$\begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix}$$

## 8. INVERSA DE UNA MATRIZ REGULAR

Dada A matriz cuadrada regular podemos calcular su inversa con el comando `Inverse[A]`.

### EJEMPLO

Estudiar si la siguiente matriz es invertible y en caso afirmativo obtener su inversa

$$\begin{pmatrix} -2 & -9 & -8 & 5 \\ -3 & -12 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

### RESOLUCIÓN

En primer lugar comprobamos si es regular calculando el determinante

$$\det \begin{bmatrix} -2 & -9 & -8 & 5 \\ -3 & -12 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

y obtenemos que el valor es el -1, ahora calculamos la matriz inversa,

$$\text{Inverse} \begin{bmatrix} -2 & -9 & -8 & 5 \\ -3 & -12 & 10 & 6 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -2 & -6 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

y el resultado es,

`{{0, 1, 0, -2}, {1, -34, 49, 50}, {0, -2, 3, 3}, {2, -64, 93, 94}}`

puesto en forma de matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & -34 & 49 & 50 \\ 0 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & -64 & 93 & 94 \end{pmatrix}$$

## 9. EL COMANDO Minors

### a) SINTAXIS.

El comando `Minors[A,k]` sirve para calcular cada uno de los menores de orden k de la matriz A. Puede aplicarse a matrices de cualquier tamaño y k ha de ser menor o igual que el mínimo entre el número de filas y el de columnas.

### EJEMPLO

Calcular los menores de orden 3 de la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 7 & -2 & -4 & -6 \\ 2 & 5 & -8 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 4 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

### RESOLUCIÓN

Fíjate en la notación para usar este comando

```
Minors[{{1, 1, -1, 1, -2, -1} {4, -5, 7, -2, -4, -6}, {2, 5, -8, 4, -3, 1}, {3, -3, 4, -1, -3, -4}}, 3]
```

Obtenemos

```
{{291, 0, -249, -249, -194, 421, 227, -166, -166, 166, 97, -380, -283, 83, 83, -83, 113, 113, -113, 0}}
```

Los valores corresponden a los menores de orden 3 de matriz dada ordenados primero de izquierda a derecha y después de arriba a abajo.

### b) APLICACIÓN AL CÁLCULO DEL RANGO DE UNA MATRIZ.

Con este comando se puede determinar el rango de una matriz, aplicándolos sucesivamente hasta que encontremos menores no nulos.

### EJERCICIO

Calcula el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

## 10. EL COMANDO RowReduce

a) El comando RowReduce[A] permite calcular la forma de Hermite (por filas) de una matriz.

### EJEMPLO

Calcular la forma de Hermite de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

### RESOLUCIÓN

```
RowReduce[{{1, 2, 3}, {2, 3, 4}, {3, 4, 5}}] // MatrixForm
```

Obteniéndose la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para calcular la forma de Hermite por columnas basta primeramente trasponer la matriz.

b) Si la matriz A es invertible se puede calcular su inversa con este comando basta colocar la identidad a la derecha de la matriz, y calcular su forma de Hermite y las columnas añadidas, en el mismo orden forman la matriz inversa,

#### EJEMPLO

Calcular la matriz inversa de A

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

#### RESOLUCIÓN

Para ello consideramos la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y la reducimos haciendo

RowReduce[B]

Obteniendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Con lo que la matriz inversa de A sería

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como fácilmente se puede comprobar calculando,  
[Inverse[A],

c) También sirve este comando para resolver sistemas de ecuaciones cuando son determinados

#### EJEMPLO

Resolver el sistema

$$\begin{aligned} 2x + 2y + 10z &= 18 \\ 2x + 3y + 12z &= 23 \\ 2y + 5z &= 11 \end{aligned}$$

#### RESOLUCIÓN

Basta con escribir:

RowReduce[{{2, 2, 10, 18}, {2, 3, 12, 23}, {0, 2, 5, 11}}]

Obteniéndose:

$$\{\{1, 0, 0, 1\}, \{0, 1, 0, 3\}, \{0, 0, 1, 1\}\},$$

Es decir, como soluciones:  $x = 1$ ,  $y = 3$ ,  $z = 1$ .

0 incluso para ver si un sistema es incompatible o indeterminado.

#### EJERCICIO

Comprobar que el siguiente sistema es incompatible usando el comando RowReduce:

$$\begin{aligned} 2x + 5y + 3z + 2t &= 2 \\ 3x + 5y + 4z - t &= 5 \\ x + 5y + 4z + 2t &= 2 \\ 11x + 15y + 8z &= 3 \end{aligned}$$

d) También sirve este comando para calcular el rango de una matriz,

### EJERCICIO

Calcula el rango de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -5 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -1 & 3 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & -1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$