1 Relaciones de orden

Sea R una relación binaria en un conjunto A. Si R satisface las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva se dice que R es una **relación de orden**. En este caso si a y b son elementos de A tales que aRb, lo denotaremos por $a \leq b$.

Si $\leq$ verifica la propiedad de que dados a y b en A, entonces $a \leq b$ o $b \leq a$, entonces la relación $\leq$ se denomina de **orden total**.

Sean A y B dos conjuntos tales que $B \subseteq A$ y $\leq$ una relación de orden en A. Podemos entonces definir varios elementos notables de A:

a) Elemento minimal de A es todo aquel elemento $a \in A$ tal que si $b \leq a$ entonces $a = b$.

b) Elemento maximal de A es todo aquel elemento $a \in A$ tal que si $a \leq b$ entonces $a = b$.

c) Mínimo de A es el elemento a de A tal que $a \leq b$ para todo $b \in A$.

d) Máximo de A es el elemento a de A tal que $b \leq a$ para todo $b \in A$.

e) Cota inferior de B es cualquier elemento $a \in A$ tal que $a \leq b$ para todo $b \in B$.

f) Cota superior de B es cualquier elemento $a \in A$ tal que $b \leq a$ para todo $b \in B$.

g) Ínfimo de B, es el máximo de las cotas inferiores de B.

h) Supremo de A, es el mínimo de las cotas superiores de B.

2 Retículos

Definición 2.1 *Sea L un conjunto parcialmente ordenado. Se dice que L es un semiretículo inferior (resp. superior) si para cualesquiera x e y elementos de L, existen el ínfimo, $inf(\{x, y\})$ (resp. el supremo, $sup(\{x, y\})$) del conjunto $\{x, y\}$.*

Un conjunto ordenado que es a la vez un semiretículo inferior y superior se denomina un retículo.

Ejemplos. a)El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z}$ con la relación de orden usual.

b) El conjunto de los divisores (en $\mathbb{N}$) de un número natural n, $D(n)$, con la relación aRb si y sólo si "a divide a b" es un conjunto parcialmente ordenado. Además, se tiene que $inf(\{a, b\}) = (a, b)$ y $sup(\{a, b)\} = m.c.m(a, b)$.

c) Sea X un conjunto y $A = \mathcal{P}(X)$ el conjunto de todos los subconjuntos de X. A con la relación de inclusicón.

Definición 2.2 *Un semigrupo se llama una banda si cada elemento es idempotente.*

Proposición 2.3 *La clase de los semiretículos coincide con al clase de todas las bandas abelianas.*

Un retículo se puede definir también de manera algebraica:

Definición 2.4 *Sean L un conjunto y $\vee$ y $\wedge$ dos operaciones binarias definidas en L. L se dice un retículo si es cerrado para ambas operaciones y si se verifican los siguientes axiomas para cualesquiera a, b, $c \in L$:*

Conmutatividad. *1.a) $a \vee b = b \vee a$ y 1.b) $a \wedge b = b \wedge a$.*

Asociatividad. *2.a)* $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ *y 2.b)* $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$.

Absorción. *3.a)* $a \wedge (a \vee b) = a$ *y 3.b)* $a \vee (a \wedge b) = a$.

Definición 2.5 *El dual de cualquier expresión en un retículo* L *es la expresión resultante de intercambiar las operaciones* $\vee$ *y* $\wedge$.

Teorema 2.6 (Principio de Dualidad) *El dual de cualquier teorema en un retículo es también un teorema.*

Corolario 2.7 *(Propiedades idempotentes) Sea* L *un retículo y* a *un elemento de* L*. Entonces:*

i) $a \vee a = a$.

ii) $a \wedge a = a$.

Aplicando las leyes de absorción se tiene que

$$a \wedge a = a \wedge (a \vee (a \wedge a)) = a$$

Lema 2.8 *Sea* L *un retículo y sean* a *y* b *elementos de* L*. Entonces:*

i) $a \wedge b = a$ *si y sólo si* $a \vee b = b$.

ii) La relación R *definida en* L *por* aRb *si y sólo si* $a \wedge b = a$ *o* $a \vee b = b$ *es una relación de orden en* L.

Teorema 2.9 *Las definiciones 1.1 y 1.4 son equivalentes.*

Definición 2.10 *Sean* $(L, \vee, \wedge)$ *y* $(L', \vee', \wedge')$ *dos retículos y* $f : L \to L'$*. Se dice que* f *es un homomorfismo de retículos si* $f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$ *y* $f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$*. Si además se tiene que* f *es biyectiva entonces se dice que* f *es un isomorfismo de retículos.*

Dados $(L, \vee, \wedge)$ *y* $(L', \vee', \wedge')$ *dos retículos, se dice que* L *y* L' *son isomorfos si existe un isomorfismo de retículos de* L *en* L'.

3 Retículos acotados

Definición 3.1 *Sea L un retículo. Se dice que L es un retículo acotado si existen mínimo,(también llamado elemento cero* 0*), y máximo(también llamado elemento uno,* 1*) para L.*

Ejemplos. i) En el conjunto de las partes de un conjunto, el conjunto vacío y el propio conjunto son el elemento cero y el elemento uno respectivamente.

ii) El conjunto de los números naturales ordenados por divisibilidad tiene elemento cero pero no elemento uno.

Lema 3.2 *Sea L un retículo acotado con mínimo,* 0*, y un máximo,* 1*. Entonces se tienen las siguientes igualdades para cualquier elemento a de L:*

a.1) $a \vee 1 = a$.

a.2) $a \wedge 1 = a$.

b.1) $a \vee 0 = a$.

b.2) $a \wedge 0 = 0$.

Teorema 3.3 *Todo retículo finito es un retículo acotado.*

4 Retículos modulares y distributivos

Definición 4.1 *Un retículo L se dice modular si para cualesquiera elementos $a, b, c \in L$ se tiene*

$$a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Teorema 4.2 *Un retículo L es modular si y solo si ninguno de sus subretículos es isomorfo al retículo del pentagono V_4^5.*

Definición 4.3 *Un retículo L se dice distributivo si para cualesquiera a, b, y c en L se verifican:*

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

y

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

Ejemplos. i) El retículo de las partes de un conjunto es distributivo.

ii) Toda cadena es un retículo distributivo.

iii) El conjunto de los números naturales ordenados por divisibilidad es un retículo distributivo.

Teorema 4.4 *Cada retículo distributivo es modular.*

Teorema 4.5 *Un retículo modular es distributivo si solo si ninguno de sus subretículos es isomorfo al retículo del diamante.*

Corolario 4.6 *Un retículo es distributivo si y solo si ninguno de sus subretículos es isomorfo al retículo del pentágono o el retículo del diamante.*

5 Retículos complementados

Definición 5.1 *Un retículo acotado con 0 y 1, L, se dice complementado si para cualquier elemento x de L, existe un elemento x' de L tal que $x \vee x' = 1$ y $x \wedge x' = 0$. Dicho elemento x' se denomina complementario o complemento de x.*

Es claro que $0' = 1$ y que $1' = 0$.

Proposición 5.2 *Sean L un retículo acotado y distributivo y x un elemento de L. Si y y z son complementos de x, entonces $y = z$.*

Corolario 5.3 *Sea L un retículo acotado y distributivo y x un elemento de L. Entonces $x = (x')'$.*

6 Álgebras de Boole

Definición 6.1 *Un álgebra de Boole es un retículo distributivo, acotado y complementado.*

Ejemplos: a) Sea A un conjunto y consideremos el conjunto de las partes de A, $\mathcal{P}(A)$. $(\mathcal{P}(A), \cup, \cap)$ es un álgebra de Boole.

b) Sea $B = \{0, 1\}$ un conjunto con dos elementos y definimos $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1 + 0 = 1 + 1 = 1$ y $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$ y $1 \cdot 1 = 1$ y $\overline{0} = 1$ y $\overline{1} = 0$. Las funciones $f : B^m \to B_2$ se denominan funciones de conmutación o funciones booleanas, $\mathcal{B}_m$. El conjunto de las funciones booleanas con $+, \cdot$ y la función complemento dada por $\overline{f}(x_1, ..., x_m) = \overline{f(x_1, ..., x_m)}$ es un álgebra de Boole.

Nota: Dada un álgebra de Boole $(B, \vee, \wedge)$, es usual denotar las operaciones $\vee$ y $\wedge$ por $+$ y $\cdot$ respectivamente.

Teorema 6.2 (leyes de De Morgan) *Sea B una álgebra de Boole y sean x e y elementos de B. Entonces $(x + y)' = x' \cdot y'$ y $(x \cdot y)' = x' + y'$.*

Definición 6.3 *Sea B un álgebra de Boole. Un elemento b de B se dice disyuntivamente irreducible si $b = x + y$ implica que $b = x$ o $b = y$.*

Definición 6.4 *Sea B un álgebra de Boole. Un elemento a de B se dice un átomo si es tal que $b \leq a$ para algún b en B, implica que $b = 0$.*

Lema 6.5 *Sea B un álgebra de Boole. Todo átomo de B es disyuntivamente irreducible.*

Proposición 6.6 *Sea B un álgebra de Boole finita. Los elementos disyuntivamente irreducibles de B distintos de 0 son los átomos de B.*

Teorema 6.7 *Sea B un álgebra de Boole finita. Entonces todo elemento de B puede expresarse de forma única como disyunción de un conjunto finito de átomos irredundantes.*

Definición 6.8 *Sean A y B dos álgebras de Boole y f de A en B un isomorfismo de retículos. Se dice que f es un isomorfismo de álgebras de Boole si $f(x') = f(x)'$ para todo $x \in A$.*

Lema 6.9 *Sean A y B dos álgebras de Boole y f de A en B un isomorfismo de retículos. Entonces f es un isomorfismo de álgebras de Boole si y sólo si $f(1_A) = 1_B$ y $f(0_A) = 0_B$.*

Teorema 6.10 (de Representación de las álgebras de Boole finitas) *Sea B un retículo finito y sea A el conjunto de sus átomos. Entonces B es un álgebra de Boole si y sólo si es isomorfa al álgebra de Boole $P(A)$.*

Teorema. La cardinalidad de cualquier álgebra de Boole finita es siempre 2^n y cualesquiera dos álgebras booleanas finitas con la misma cardinalidad son isomorfas.

Teorema. Para cada álgebra booleana finita $B \neq 0$ existe algún número entero n con

$$B \cong \{0,1\}^n.$$

Definición. Sea $x_1, ..., x_n$ un conjunto de n indeterminadas. Los polinomios booleanos en esas indeterminadas son los objetos uq pueden obtenerse de manera recursiva por la aplicación sucesiva de

i) $x_1, ..., x_n$ y 0 y 1 son polinomios booleanos;

ii) si f y g son polinomios booleanos, también lo son $f+g$, fg y f'.

Denotaremos el conjunto de polinomios booleanos en n indeterminadas por P_n.

Definición. Sea B un álgebra booleana, B^n el producto directo de n copias de B, y f un polinomio booleano en P_n. Entonces

$$\overline{f}_B : B^n \to B$$

definido por

$$(a_1, a_2, ..., a_n) \to f(a_1, ..., a_n)$$

se llama una función polinómica booleana inducida por f sobre B. Denotaremos por $P_n(B)$ el conjunto de todas las funciones polinómicas booleanas sobre B.

Teorema. Sea B un álgebra booleana; entonces el conjunto de $P_n(B)$ es un álgebra booleana y una subálgebra del álgebra booleana de todas las funciones de B^n en B.

Denotaremos por $\mathcal{B}$ el álgebra boolena $\{0, 1\}$

Definición Dos polinomios booleanos $p, q \in P_n$ son equivalentes $p \sim q$ si sus funciones asociadas sobre $\mathcal{B}$ son iguales.

Teorema. a) La relación $\sim$ es una relación de equivalencia.
b) $P_n/\sim$ es un álgebra de Boole y

$$(P_n/\sim) \cong P_n(\mathcal{B})$$

como álgebras booleanas.

Teorema. Sean $p, q \in P_n$ y B un álgebra booleana arbitraria. Si $p \sim q$, entonces $\overline{p}_B = \overline{q}_B$.

7 Formas normales

Definición. $N \subseteq P_n$ se llama un sistema de formas normales si:

a) Cada polinomio $p \in P_n$ es equivalente a un polinomio (su forma normal) de N;

b) Si $q_1, q_2 \in N$, entonces si los polinomios no son iguales no son equivalentes.

Teorema. Los siguientes conjuntos son sistemas de formas normales:

1) $N_d = \{\sum y_1 y_2 ... y_n\}$ donde cada y_i es igual a x_i o a $\overline{x_i}$.

2) $N_c = \{\prod(y_1 + ... + y_n)\}$ donde cada y_i es igual a x_i o a $\overline{x_i}$.

Definición. Dado un polinomio p

a) El polinomio único $p_d \in N_d$ tal que $p \sim p_d$ se llama la forma normal disyuntiva de p.

b) El polinomio único $p_c \in N_d$ tal que $p \sim p_c$ se llama la forma normal conjuntiva de p.