formulario 4: Elasticidad Lineal

LEY DE HOOKE GENERALIZADA

1. Materiales anisótropos

1.1. Ecuación de Duhamel-Neumann

$$s_{ij} = s_{ij}^{0} + C_{ijkl}(e_{kl} - e_{kl}^{0}) - g_{ij}(\Theta - \Theta^{0})$$

donde σ_{ij} es el tensor de tensiones, C_{ijkl} es el tensor de comportamiento, ε es el tensor de deformaciones, γ es el tensor de dilatación térmica y Θ la temperatura. El superíndice "0" indica estado inicial.

1.2. Simetrías mayores y menores

Simetrías mayores	Simetrías menores
$C_{ijkl} = C_{jikl}$	$C_{ijkl} = C_{klij}$
$C_{ijkl} = C_{ijlk}$	

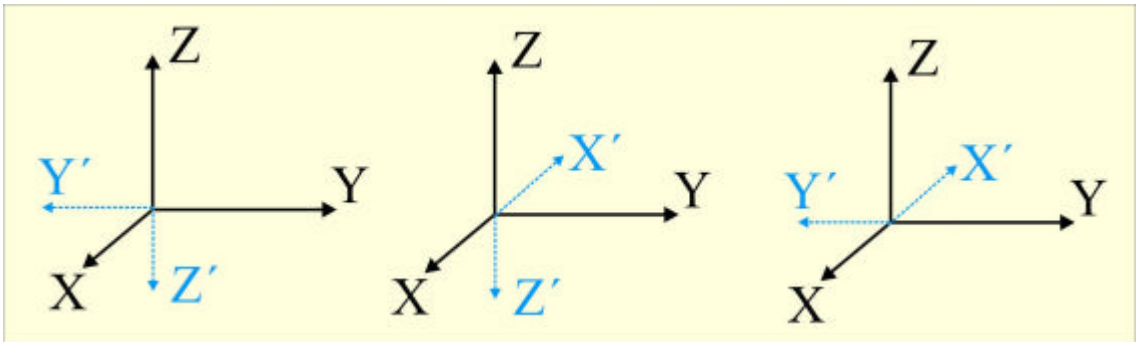
1.3. Ley de Hooke Generalizada

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ t_{xy} \\ t_{xz} \\ t_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} & c_{16} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & c_{34} & c_{35} & c_{36} \\ c_{14} & c_{24} & c_{34} & c_{44} & c_{45} & c_{46} \\ c_{15} & c_{25} & c_{35} & c_{45} & c_{55} & c_{56} \\ c_{16} & c_{26} & c_{36} & c_{46} & c_{56} & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{xy} \\ e_{xz} \\ e_{yz} \end{pmatrix}$$

2. Materiales ortótropos

2.1. Ortotropía

$$C_{ijkl} = C'_{ijkl}$$



2.2. Ley de Hooke Generalizada

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ t_{xy} \\ t_{xz} \\ t_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & 0 & 0 & 0 \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{xy} \\ e_{xz} \\ e_{yz} \end{pmatrix}$$

3. Materiales isótropos

3.1. Ley de Hooke Generalizada

$$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ t_{xy} \\ t_{xz} \\ t_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ c_2 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_1 - c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 - c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 - c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \\ e_{xy} \\ e_{xz} \\ e_{yz} \end{pmatrix}$$

3.2. Constantes de Lamé(l y m) y constantes elásticas (módulo de Young, E; coeficiente de Poisson, n y módulo de rigidez transversal G)

$$\left.\begin{aligned} c_1 &= 2m + l \\ c_2 &= l \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 - c_2 = 2m$$

$$E \equiv \frac{s_{(ii)}}{e_{(ii)}} \qquad n \equiv -\frac{e_{(jj)}}{e_{(ii)}} \qquad G \equiv \frac{1}{2}\frac{s_{ij}}{e_{ij}} \quad i \neq j$$

3.3. Ley de Hooke Generalizada y su inversión

	Ley de Hooke Generalizada	Inversión de la Ley de Hooke Generalizada
Constantes de Lamé	$s_{ij} = 2me_{ij} + l\,d_{ij}e_{kk}$	$e_{ij} = \frac{1}{2m}\left(s_{ij} - \frac{l}{2m+3l}d_{ij}s_{kk}\right)$
Constantes elásticas	$s_{ij} = \frac{E}{1+n}\left(e_{ij} + \frac{n}{1-2n}d_{ij}e_{kk}\right)$	$e_{ij} = \frac{1}{E}\left((1+n)s_{ij} - n d_{ij}s_{kk}\right)$

3.4. Tensor de comportamiento y tensor de flexibilidades

	Tensor de comportamiento	Tensor de flexibilidades
Constantes de Lamé	$C_{ijkl} = l d_{ij} d_{kl} + 2m d_{ik} d_{jl}$	$B_{ijkl} = \frac{1}{2m}\left(d_{ik} d_{jl} - \frac{l}{2m+3l} d_{ij} d_{kl} \right)$
Constantes elásticas	$C_{ijkl} = \frac{E}{1+n}\left(d_{ik} d_{jl} + \frac{n}{1-2n} d_{ij} d_{kl} \right)$	$B_{ijkl} = \frac{1}{E}\left((1+n) d_{ik} d_{jl} - n d_{ij} d_{kl} \right)$

3.5. Ley de Hooke Generalizada en componentes esférica y desviadora

$$s_{no} = \frac{E}{1-2n} e_{no} = 3K e_{no} \quad donde \quad K \equiv \frac{E}{3(1-2n)} \text{ (módulo deformación volumétrica)}$$

$$s_{des} = 2G e_{des}$$

3.6. Relaciones entre de constantes de comportamiento elástico

Constante/ Pareja	λ, μ	E, ν	K, μ	μ, ν	E, μ
λ	l	$\frac{En}{(1+n)(1-2n)}$	$\frac{3K-2m}{3}$	$\frac{2mn}{1-2n}$	$\frac{m(E-2m)}{3m-E}$
μ	m	$\frac{E}{2(1+n)}$	m	m	m
K	$\frac{3l+2m}{3}$	$\frac{E}{3(1-2n)}$	K	$\frac{2m(1+n)}{3(1-2n)}$	$\frac{mE}{3(3m-E)}$
E	$\frac{m(3l+2m)}{l+m}$	E	$\frac{9Km}{3K+m}$	$2m(1+n)$	E
ν	$\frac{l}{2(l+m)}$	n	$\frac{3K-2m}{6K+2m}$	n	$\frac{E}{2m}-1$

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL

Ecuación de equilibrio o de Cauchy:

$$\frac{\partial s_{ij}}{\partial x_i} + f_j = r\,a_j$$

Ecuaciones cinemáticas o geométricas:

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$

Ecuaciones de comportamiento o de Duhamel-Neumann:

$$s_{ij} = s_{ij}^{0} + C_{ijkl}(e_{kl} - e_{kl}^{0}) - g_{ij}(\Theta - \Theta^{0})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left(s_{ij}^{0} + C_{ijkl}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) - e_{kl}^{0}\right) - g_{ij}(\Theta - \Theta^{0})\right) + f_j = r\,a_j$$

ECUACIONES DE CONTORNO

$$\Gamma_u : \quad u_j = \bar{u}_j$$

$$\Gamma_s : \quad \left(s_{ij}^{0} + C_{ijkl}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) - e_{kl}^{0}\right) - g_{ij}(\Theta - \Theta^{0})\right) n_j = \bar{T}_i$$

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL

1. Resolución en desplazamientos: ecuación de Navier

$$\vec{f} + (l + m)\,\nabla(\nabla\vec{u}) + m\,\Delta\vec{u} = r\,\vec{a}$$

2. Resolución en tensiones: ecuaciones de Beltrami-Michell

$$\Delta s_x + \frac{1}{1+n}\frac{\partial^2 I_1(s)}{\partial x^2} = -\frac{n}{1-n}\nabla\vec{f} - 2\frac{\partial f_x}{\partial x}$$

$$\Delta s_y + \frac{1}{1+n}\frac{\partial^2 I_1(s)}{\partial y^2} = -\frac{n}{1-n}\nabla\vec{f} - 2\frac{\partial f_y}{\partial y}$$

$$\Delta s_z + \frac{1}{1+n}\frac{\partial^2 I_1(s)}{\partial z^2} = -\frac{n}{1-n}\nabla\vec{f} - 2\frac{\partial f_z}{\partial z}$$

$$\Delta t_{xy} + \frac{1}{1+n}\frac{\partial^2 I_1(s)}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)$$

$$\Delta t_{xz} + \frac{1}{1+n}\frac{\partial^2 I_1(s)}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)$$

$$\Delta t_{yz} + \frac{1}{1+n}\frac{\partial^2 I_1(s)}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z}\right)$$

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ELÁSTICO LINEAL EN DESPLAZAMIENTOS

1. Vector Galerkin ($\vec{P}$) y ecuación de Navier

$$\vec{u} = \frac{1}{2m}\left[2(1-n)\Delta - \nabla\nabla\right]\vec{P} \qquad \Delta^2\vec{P} = -\frac{1}{1-n}\vec{f}$$

2. Potencial de deformación de Lamé (y) y ecuación de Navier

$$\vec{u} = \frac{1}{2m}\nabla y \qquad \nabla^2 y = cons\tan te$$

3. Relación entre el vector Galerkin y el potencial de Lamé

$$y = -\nabla\vec{P}$$

TERMOELASTICIDAD

1. Inversión y analogía de Duhamel-Neumann

$$e_{ij} = \frac{n+1}{E}s_{ij} - \frac{n}{E}d_{ij}s_{kk} + \frac{g(1-2n)}{E}d_{ij}\Delta\Theta$$

2. Coeficiente de dilatación térmica

$$a \equiv \frac{g(1-2n)}{E}$$

ELASTICIDAD LINEAL 2D: ESTADO DE TENSIÓN PLANA

	Ley de Hooke Generalizada	Inversión de la Ley de Hooke Generalizada
Constantes de Lamé	$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4m(m+l)}{2m+l} & \frac{2ml}{2m+l} & 0 \\ \frac{2ml}{2m+l} & \frac{4m(m+l)}{2m+l} & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m+l}{m(2m+3l)} & -\frac{l}{2m(2m+3l)} & 0 \\ -\frac{l}{2m(2m+3l)} & \frac{m+l}{m(2m+3l)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix}$
Constantes elásticas	$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-n^2} & \frac{En}{1-n^2} & 0 \\ \frac{En}{1-n^2} & \frac{E}{1-n^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{n}{E} & 0 \\ -\frac{n}{E} & \frac{1}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+n}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix}$

$$e_z = \begin{cases} -\dfrac{l}{2m+l}\left(e_x + e_y\right) \\ \\ -\dfrac{n}{1-n}\left(e_x + e_y\right) \end{cases}$$

Beltrami-Michell

$$\Delta_1(s_x + s_y) = -(1+n)\nabla_1 \vec{f}$$

ELASTICIDAD LINEAL 2D: ESTADO DE DEFORMACIÓN PLANA

	Ley de Hooke Generalizada	Inversión de la Ley de Hooke Generalizada
Constantes de Lamé	$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2m+l & l & 0 \\ l & 2m+l & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2m+l}{4m(m+l)} & -\frac{l}{4m(m+l)} & 0 \\ -\frac{l}{4m(m+l)} & \frac{2m+l}{4m(m+l)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix}$
Constantes elásticas	$\begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E(1-n)}{(1+n)(1-2n)} & \frac{En}{(1+n)(1-2n)} & 0 \\ \frac{En}{(1+n)(1-2n)} & \frac{E(1-n)}{(1+n)(1-2n)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{1+n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-n^2}{E} & -\frac{n(1+n)}{E} & 0 \\ -\frac{n(1+n)}{E} & \frac{1-n^2}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+n}{E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ t_{xy} \end{pmatrix}$

$$s_z = \begin{cases} \frac{l}{2(m+l)}\left(s_x + s_y\right) \\ n\left(s_x + s_y\right) \end{cases}$$

Beltrami-Michell

$$\Delta_1(s_x + s_y) = -\frac{1}{1-n}\nabla_1 \vec{f}$$