Práctica 7: Normas y condición numérica de matrices

1 Introducción

La mayor parte de funciones del Álgebra Lineal en MATLAB trabaja tanto para matrices reales como complejas. En esta práctica veremos cómo podemos calcular la norma de vectores o matrices y estudiar la condición numérica de sistemas de ecuaciones lineales. Para más detalles recurra a la ayuda en el subdirectorio `\matfun` de MATLAB.

2 Trabajo de laboratorio

2.1 Normas de vectores y matrices

Recuerde que la p-norma de un vector $x = (x_1, \ldots, x_n)$ se define como

$$||x||_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty\,, \quad \text{y} \quad \|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|\,.$$

La función **norm(x,p)** de MATLAB permite calcular cualquiera de estas normas (por defecto, $p = 2$). Adicionalmente, el parámetro $p = -\infty$ permite calcular $\min_i |x_i|$.

Ejercicio 1 *Aplique la función* ***norm(x,p)*** *con* $p = 1, 2, \infty, -\infty$ *al vector* $x = [1, 2, 3, 4]$.

A su vez, si A es una matriz $m \times n$, la norma $\|\cdot\|_p$ inducida se define como

$$\|A\|_p = \max_{x\neq 0} \|Ax\|/\|x\|.$$

En particular,

$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|\,, \qquad \|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

MATLAB entiende el comando **norm(x,p)** aplicado a una matriz para los parámetros $p = 1, 2, \infty$.

Ejercicio 2 *Aplique la función* ***norm(x,p)*** *con $p = 1, 2$ y ∞ a la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Previamente modifique el formato de la salida por medio del comando ***format long****.*

Recuerde que la norma 2 es igual al máximo valor singular de la matriz, lo que se puede calcular en MATLAB usando el comando `max(svd(`*matriz*`))`. Puesto que para matrices grandes éste es un cálculo costoso, MATLAB incluye la función **normest** para estimar dicha norma y que opera más rápidamente.

Ejercicio 3 *Aplique las funciones* ***max(svd(x))*** *y* ***normest(x)*** *a la matriz A definida en el ejercicio anterior y compare el resultado con la norma 2 obtenida ahí.*

2.2 Condición numérica de una matriz

El número de condición de una matriz A en la norma 2, $\kappa_2(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$, se calcula también como el cociente entre el valor singular más grande y el más pequeño de A. En MATLAB esta magnitud se obtiene usando el comando **cond(x)**. A su vez para el número de condición $\kappa_1(A)$ se incluye la función **condest(x)** que encuentra una estimación (aproximación) de la misma.

Ejercicio 4 *La matriz de Hilbert*

$$H_n = \left(\frac{1}{i+j-1} \right)_{i,j=1}^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \cdots & 1/(n-1) \\ 1/2 & 1/3 & \cdots & 1/n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \\ 1/(n-1) & 1/n & \cdots & 1/(2n-1) \end{pmatrix}$$

es un ejemplo clásico de una matriz mal condicionada. En MATLAB *se puede construirla fácilmente usando el comando* ***hilb(n)****.*

1. *Escriba un script de* MATLAB *para calcular los valores de $\kappa_2(H_n)$ para $n = 1, 2, \ldots, 10$. Dibuje los resultados en escala logarítmica (comando* ***semilogy****).*

2. *Estime la dependencia del número de condición de la matriz de Hilbert de sus dimensiones. ¿De qué tipo de crecimiento se trata, lineal, exponencial, etc.?*

Puesto que calcular el número de condición de una matriz puede ser computacionalmente muy costoso, podemos buscar "síntomas" indirectos de que una matriz es mal condicionada:

- $\det(A)\,\det(A^{-1})$ calculado es significativamente $\neq 1$;
- $(A^{-1})^{-1}$ calculado es significativamente $\neq A$;
- AA^{-1} calculado es significativamente $\neq I$,

y otros.

Ejercicio 5 *Para la matriz de Hilbert H_{10} aplique los criterios*

$$|\det(H_{10})\,\det(H_{10}^{-1}) - 1|, \quad \|(H_{10}^{-1})^{-1} - H_{10}\|_2, \quad \|H_{10}H_{10}^{-1} - I_{10}\|_2$$

para detectar la mala condición de la misma.

Ejercicio 6 *Tome un vector columna de 10 elementos arbitrario, por ejemplo*

```
x=[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]'
```

y construya el vector $b = H_{10}x$. Claramente, x es la solución del sistema

$$H_{10}x = b\,.$$

Resuelva este sistema usando la división derecha del MATLAB, $A\backslash B = A^{-1}B$. Compare el resultado con el vector x original, calculando la norma del error absoluto.