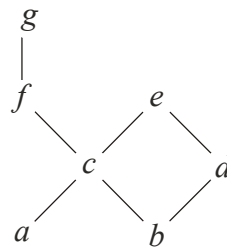
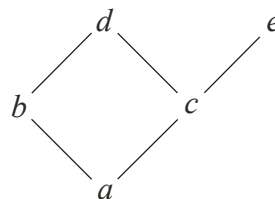


## RETÍCULOS Y ÁLGEBRAS DE BOOLE

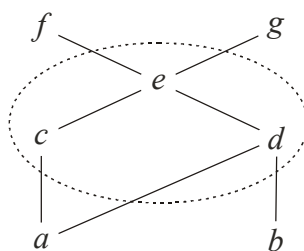
1. Sea  $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24\}$  ordenado por divisibilidad. Dibujar el diagrama de orden de  $A$ .
2. Sea  $X = \{a, b, c\}$ . Dibujar el diagrama de orden (inclusión) de  $\wp(X)$ .
3. Sea  $S = \{2, 4, 6, 12, 20\}$  ordenado por divisibilidad. Hallar elementos maximales, minimales, máximo y mínimo de  $S$ .
4. Sea  $T = \{2, 3, 4, 16\}$  ordenado por divisibilidad. Hallar elementos maximales, minimales, máximo y mínimo de  $T$ .
5. Hallar los elementos maximales y minimales del conjunto  $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$  de números naturales primos, ordenado por divisibilidad.
6. Hallar los elementos maximales y minimales del siguiente conjunto ordenado:



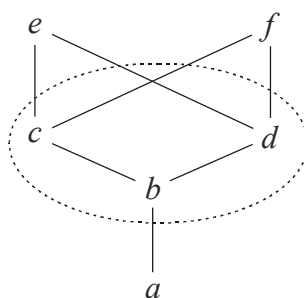
7. Sea  $F = \{a, b, c, d, e\}$  ordenado según el siguiente diagrama. Hallar todos los subconjuntos de  $F$  en los que el elemento  $c$  sea mínimo.



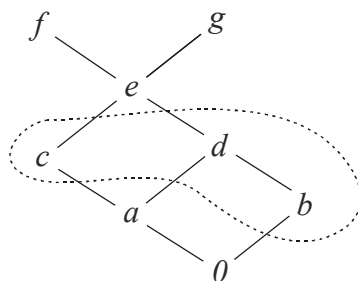
8. Para el mismo conjunto ordenado del ejercicio anterior, hallar todos los subconjuntos de  $F$  para los que el elemento  $c$  sea máximo.
9. Sea  $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$  ordenado como muestra la figura. Hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de  $X = \{c, d, e\}$ .



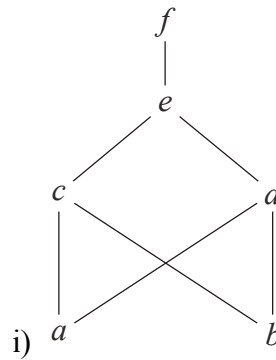
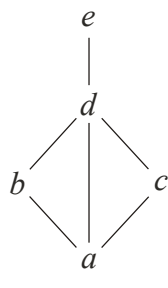
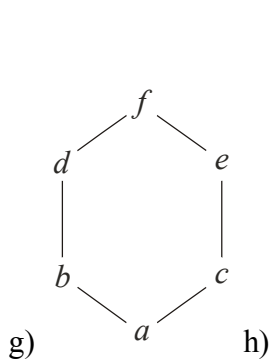
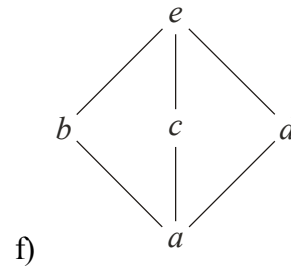
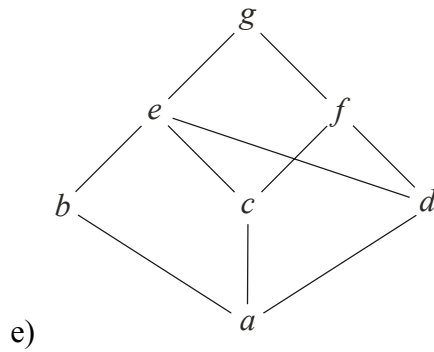
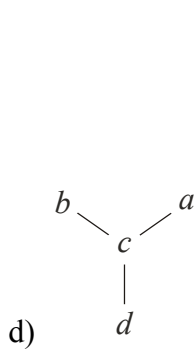
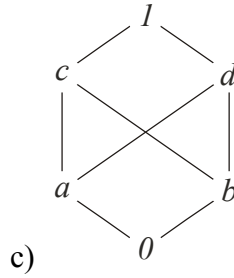
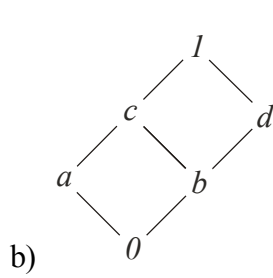
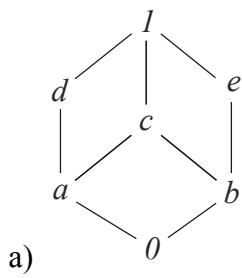
10. Sea  $W = \{a, b, c, d, e, f\}$  ordenado como muestra la figura. Hallar las cotas superiores e inferiores, supremo e ínfimo de  $Y = \{b, c, d\}$ .



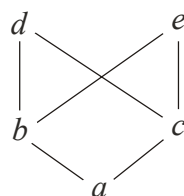
11. Sea  $S = \{0, a, b, c, d, e, f, g\}$  el conjunto ordenado que muestra la siguiente figura, y sea  $L = \{b, c, d\}$ . Hallar cotas superiores e inferiores de  $L$ , así como  $\sup(L)$  e  $\inf(L)$ .



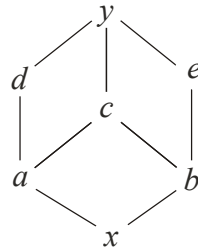
12. Repetir el ejercicio anterior para los subconjuntos  $M = \{a, e, g\}$  y  $K = \{b, c, f, g\}$ .
13. Sea  $E = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$  el conjunto de naturales pares, ordenado por divisibilidad. ¿Se trata de un conjunto bien ordenado?
14. Sea el retículo  $D(m)$  de los divisores del natural  $m$ , con las operaciones:  
 $a \vee b = m.c.m.\{a, b\} = [a, b]$  y  $a \wedge b = m.c.d.\{a, b\} = (a, b)$   
 Dibujar el diagrama de orden para  $m = 36$ .
15. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos ordenados son retículos?



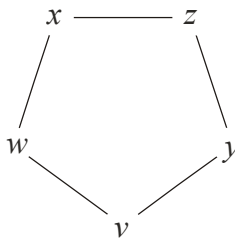
16. Determinar cuáles de los siguientes conjuntos es retículo respecto de la divisibilidad:  $A = \{2,3,4,12\}$ ,  $B = \{1,2,3,9,18\}$  y  $C = \{1,3,4,9\}$ .
17. Sea  $P = \{a,b,c,d,e\}$  el conjunto ordenado cuyo diagrama se muestra a continuación. ¿Es  $P$  un retículo? Hallar dos subconjuntos de  $P$  que sean retículos con el orden inducido.



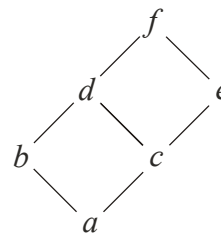
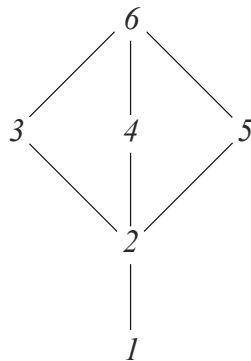
18. Sea el retículo  $L$  que se muestra a continuación. Determinar cuáles de los siguientes subconjuntos son subretículos de  $L$ :  $L_1 = \{x, a, b, y\}$ ,  $L_2 = \{x, a, e, y\}$ ,  $L_3 = \{a, c, d, y\}$  y  $L_4 = \{x, c, d, y\}$ .



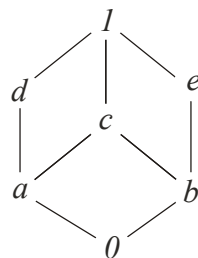
19. Sea el retículo  $D = \{v, w, x, y, z\}$  representado a continuación. Hallar todos los subretículos de  $K$  con tres o más elementos.



20. Razonar si son o no isomorfos los dos retículos siguientes:

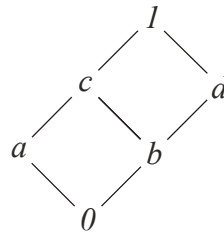


21. Se considera el siguiente retículo:



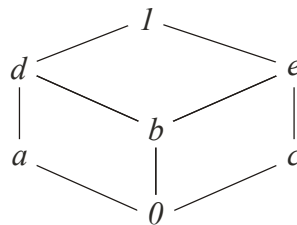
- ¿Qué elementos no nulos son disyuntivamente irreducibles?
- ¿Qué elementos son átomos?
- ¿Cuáles de los siguientes son subretículos de  $L$ ?  
 $L_1 = \{0, a, b, 1\}$  ;  $L_2 = \{0, a, e, 1\}$  ;  $L_3 = \{a, c, d, 1\}$  ;  $L_4 = \{0, c, d, 1\}$
- ¿Es  $L$  distributivo?
- Encontrar, si existen, los complementarios de los elementos  $a, b, y c$ .
- ¿Es  $L$  un retículo complementado?

22. Se considera el siguiente retículo:



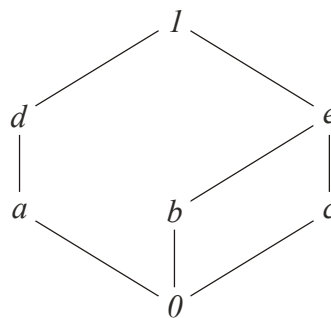
- Encontrar los elementos disyuntivamente irreducibles no nulos y los átomos de  $L$ .
- ¿Es  $L$  distributivo?
- ¿Es  $L$  complementado?

23. Se considera el retículo representado por el siguiente diagrama:

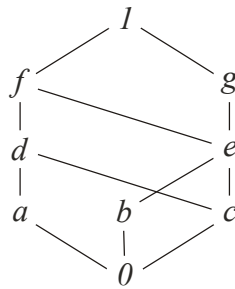


- Encontrar todos sus subretículos con cinco elementos.
- Encontrar todos sus átomos y sus elementos disyuntivamente irreducibles.
- Encontrar, si existen, los complementos de  $a$  y  $b$ .
- ¿Es  $L$  distributivo?
- ¿Es  $L$  complementado?

24. Dado el siguiente retículo, hallar todos sus elementos disyuntivamente irreducibles:



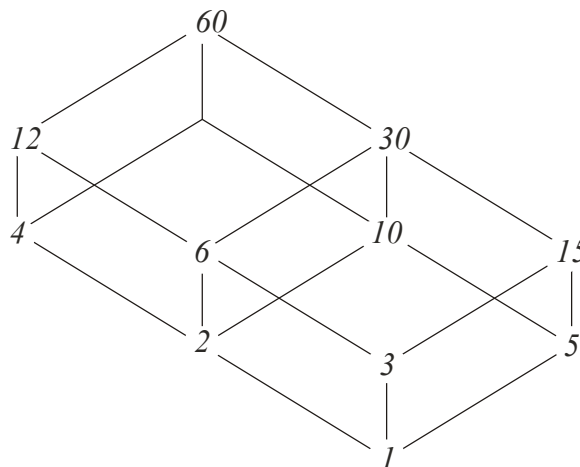
25. Sea el retículo  $L$  representado por el siguiente diagrama:



- Encontrar todos los elementos disyuntivamente irreducibles.
- Encontrar todos los átomos.
- Encontrar, si existen, los complementos de  $a$  y  $b$ .
- Expresar cada elemento  $x$  de  $L$  como disyunción irredundante de elementos disyuntivamente irreducibles.
- ¿Es  $L$  distributivo?
- ¿Es  $L$  complementado?

26. Se considera el retículo  $D(60)$  de los divisores naturales de 60, ordenado por la relación de divisibilidad.

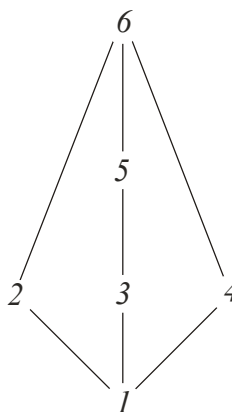
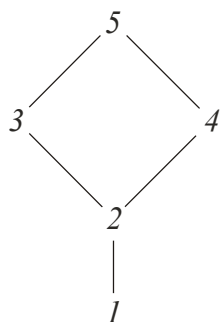
- ¿Qué elementos son disyuntivamente irreducibles?
- ¿Qué elementos son átomos?
- Encontrar, si existen, los complementos de 2 y 10.
- Expresar cada número  $x$  como disyunción irredundante de un número mínimo de elementos disyuntivamente irreducibles.



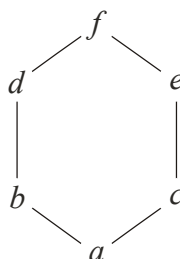
27. Considerar el retículo de los enteros positivos ordenados por la relación de divisibilidad.

- ¿Qué elementos son disyuntivamente irreducibles?
- ¿Qué elementos son átomos?

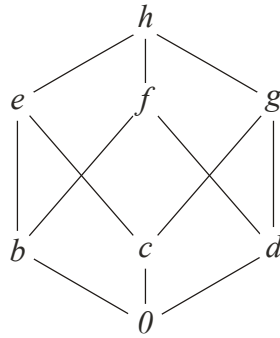
28. Hallar los átomos de los siguientes retículos:



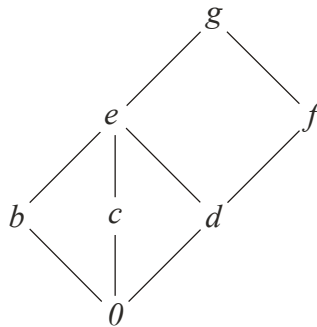
29. Demostrar que el retículo  $D(m)$  de los divisores naturales de  $m$  es un álgebra de Boole si  $m$  es libre de cuadrados (todos sus divisores primos son distintos). ¿Es cierto el recíproco?
30. Considerar el álgebra de Boole  $D(210)$ .
- Enumerar sus elementos y dibujar su diagrama.
  - Encontrar el conjunto  $A$  de átomos.
  - Encontrar dos subálgebras con ocho elementos.
  - ¿Es  $X = \{1, 2, 6, 120\}$  un subretículo de  $D(210)$ ? ¿Es una subálgebra?
  - ¿Es  $Y = \{1, 2, 3, 6\}$  un subretículo de  $D(210)$ ? ¿Es una subálgebra?
  - Hallar el número de subálgebras de  $D(210)$ .
31. Considerar el álgebra de Boole  $D(110)$ .
- Enumerar sus elementos y dibujar su diagrama.
  - Hallar todas sus subálgebras.
  - Hallar el conjunto  $A$  de átomos de  $D(110)$ .
  - Establecer el isomorfismo canónico existente entre  $D(110)$  y  $P(A)$ .
32. ¿Qué elementos de  $P(X)$  son átomos? ¿Cuáles son disyuntivamente irreducibles?
33. Utilizar el siguiente retículo para probar que, en un retículo, la descomposición de un elemento como disyunción irredundante de elementos disyuntivamente irreducibles no es única:



34. Hallar una descomposición irredundante y disyuntivamente irreducible del elemento  $h$  del siguiente retículo:

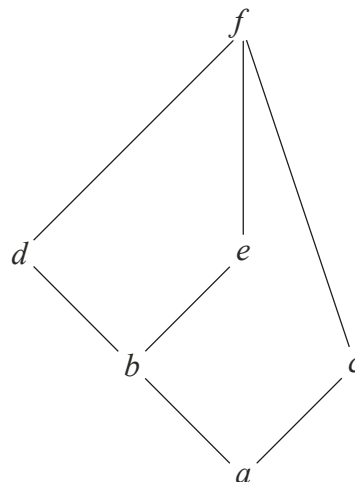
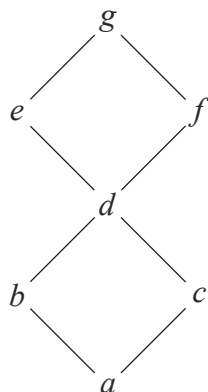
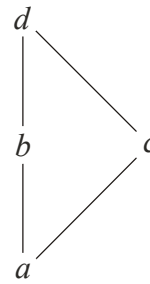
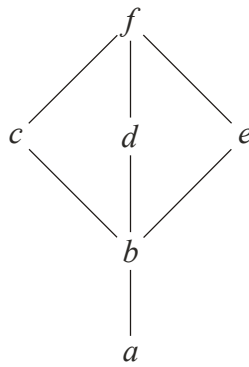


35. Hallar una descomposición irredundante y disyuntivamente irreducible del elemento  $g$  del siguiente retículo:



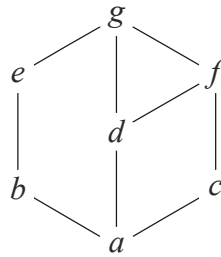
36. Demostrar que en un retículo distributivo finito, todo elemento se expresa como disyunción irredundante de elementos disyuntivamente irreducibles, de forma única.

37. Determinar cuáles de los siguientes retículos son no distributivos:

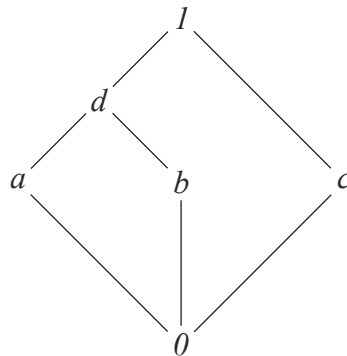




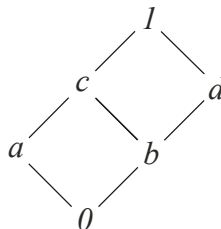
38. Se considera el siguiente retículo. Hallar los átomos y los elementos disyuntivamente irreducibles. ¿Es distributivo?



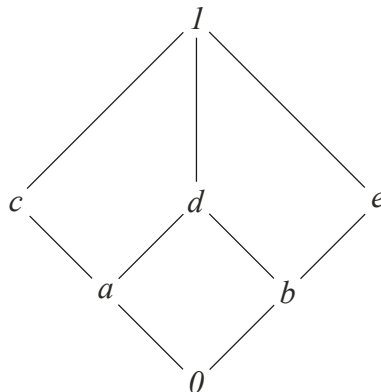
39. Hallar complementos para el elemento  $a$  en el siguiente retículo acotado:



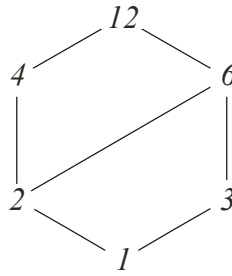
40. Probar que en un retículo distributivo y acotado, si existen complementos, éstos son únicos. Comprobarlo con el siguiente retículo:



41. Concluir que el siguiente retículo es no distributivo, verificando que existen elementos con más de un complemento.



42. Sea el retículo  $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$  ordenado por la divisibilidad. Hallar complementos para los elementos 4 y 6. ¿Es  $D(12)$  distributivo?



43. Sea  $D(70) = \{1, 2, 5, 7, 10, 14, 35, 70\}$ .
- Razonar que se trata de un álgebra de Boole con las operaciones:  
 $a + b = m.c.m.\{a, b\} = [a, b]$ ,  $a \cdot b = m.c.d.\{a, b\} = (a, b)$ ,  $\bar{a} = \frac{70}{a}$
  - Hallar  $10 + 14$ ,  $10 \cdot 14$ ,  $\overline{10}$ ,  $35 \cdot (2 + \overline{7})$ ,  $35 \cdot 10 + \overline{14}$  y  $(2 + 7) \cdot \overline{14 \cdot 10}$
  - Determinar si los conjuntos  $X = \{1, 5, 10, 70\}$  e  $Y = \{1, 2, 35, 70\}$  son subálgebras.
44. Probar que las siguientes igualdades son equivalentes en un álgebra de Boole:
- $a + b = b$
  - $a \cdot b = a$
  - $\bar{a} + b = 1$
  - $a \cdot \bar{b} = 0$
45. Encontrar todas las subálgebras de  $D(210)$ .
46. Transformar las siguientes expresiones booleanas en sumas de productos completas, utilizando las propiedades de álgebra de Boole:
- $F_1(x, y, z) = x\bar{y}z$
  - $F_2(x, y, z) = z(\bar{x} + y) + \bar{y}$
  - $F_3(x, y, z) = (\bar{x} + y) + \bar{x}y$
  - $F_4(x, y, z) = x(\bar{x}y + \bar{x}y + \bar{y}z)$
  - $F_5(x, y, z) = (\bar{x} + y)(\bar{x}y)$
  - $F_6(x, y, z) = y(\bar{z} + yz)$
  - $F_7(x, y, z) = x(xy + \bar{y} + \bar{x}y)$
47. Escribir cada una de las siguientes expresiones del álgebra de Boole  $P(X)$  como unión de intersecciones completa:
- $F(A, B, C) = (A \cup \bar{B}) \cap (\bar{C} \cup B)$
  - $G(A, B, C) = (\bar{B} \cup C) \cap (\bar{A} \cup C)$
48. Dada la expresión booleana  $E(x, y, z) = x\bar{y} + xy\bar{z} + \bar{x}y\bar{z}$ , probar;

- a)  $E + x\bar{z} = E$   
 b)  $x + E \neq E$   
 c)  $\bar{z} + E \neq E$

49. Calcular las tablas de valores para las siguientes funciones booleanas:

- a)  $F(x, y) = x\bar{y}$   
 b)  $F(x, y, z) = xy + \bar{z}$   
 c)  $F(x, y, z) = x\bar{y} + (\overline{xyz})$   
 d)  $F(x, y, z) = x(yz + \bar{y}\bar{z})$   
 e)  $F(x, y, z) = \bar{x}y + \bar{y}z$   
 f)  $F(x, y, z) = x\bar{y}z + (\overline{xyz})$   
 g)  $F(x, y, z) = \bar{y}(xz + \bar{x}z)$

50. Calcular, en caso de que existan, los valores de la variable  $x$  que satisfacen las siguientes ecuaciones:

- a)  $x \cdot 1 = 0$   
 b)  $x + x = 0$   
 c)  $x \cdot 1 = x$   
 d)  $x \cdot \bar{x} = 1$

51. ¿Qué valores de las variables booleanas  $x$  e  $y$  satisfacen la igualdad  $xy = x + y$ ?

52. Demostrar que  $x\bar{y} + y\bar{z} + \bar{x}z = \bar{x}y + \bar{y}z + x\bar{z}$ .

53. El operador *XOR*, representado por el símbolo  $\oplus$  se define así:  $1 \oplus 1 = 0$ ,  $1 \oplus 0 = 1$ ,  $0 \oplus 1 = 1$  y  $0 \oplus 0 = 0$ . Demostrar que se verifican las relaciones:

- a)  $x \oplus y = (x + y)(\bar{x}\bar{y})$   
 b)  $x \oplus y = (x\bar{y}) + (\bar{x}y)$

54. Probar la veracidad o falsedad de las siguientes relaciones:

- a)  $x \oplus y = y \oplus x$   
 b)  $x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$   
 c)  $x + (y \oplus z) = (x + y) \oplus (x + z)$   
 d)  $x \oplus (y + z) = (x \oplus y) + (x \oplus z)$

55. Encontrar las formas normales conjuntiva y disyuntiva para cada una de las funciones dadas por la siguiente tabla:

$x$	$y$	$z$	$F$	$G$	$H$	$I$
1	1	1	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	1
1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	1	1

56. Hallar la forma normal disyuntiva de la función  $F(x, y, z) = (x + y)\bar{z}$  :
- utilizando las propiedades del álgebra de Boole.
  - a partir de la tabla de valores.
57. Demostrar que tanto  $\{+, \bar{\phantom{x}}\}$  como  $\{, \bar{\phantom{x}}\}$  son conjuntos de operadores funcionalmente completos (toda función booleana se puede representar utilizando exclusivamente dichos operadores), mientras que  $\{+, \cdot\}$  no lo es.
58. Demostrar que el operador *NAND*, representado por  $\uparrow$ , y definido como sigue, es en sí mismo, un conjunto funcionalmente completo:
- $$1 \uparrow 1 = 0, 1 \uparrow 0 = 0 \uparrow 1 = 0 \uparrow 0 = 1$$
- (probar que  $\bar{x} = x \uparrow x$  y  $(xy) = (x \uparrow y) \uparrow (x \uparrow y)$  ó  $x + y = (x \uparrow x) \uparrow (y \uparrow y)$ ))
59. Demostrar que el operador *NOR*, representado por  $\downarrow$ , y definido como sigue, es en sí mismo, un conjunto funcionalmente completo:
- $$0 \downarrow 0 = 1, 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 1 \downarrow 1 = 0$$
- (probar que  $\bar{x} = x \downarrow x$  y  $(xy) = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$  ó  $x + y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$ ))